# GERAÇÃO RÁPIDA E VIRTUALMENTE EXATA DE PORTAS QUÂNTICAS VIA MÉTODOS ITERATIVOS DO TIPO LYAPUNOV

Paulo Sergio Pereira da Silva\*, Pierre Rouchon $^{\dagger}$ , Hector Bessa Silveira $^{\ddagger}$ 

\*Escola Politécnica – PTC, Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, SP

<sup>†</sup>Centre Automatique et Systèmes, Mines ParisTech, Paris, France

<sup>‡</sup>Departamento de Automação e Sistemas (DAS), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC

Emails: paulo@lac.usp.br, pierre.rouchon@mines-paristech.fr, hector.silveira@ufsc.br

Abstract— The problem of quantum gate generation is a nonlinear open loop control problem. On one hand, optimal control produces fast controls, but with enormous computational complexity, which is unacceptable for large order systems. On the other hand, Lyapunov stabilization may produce slow controls but with acceptable complexity. A third approach to tackle the complexity of optimal control is called GRAPE (Gradient Ascent Pulse Engineering), which is essentially a numerical version of optimal control using gradient methods, and that may produce very good results for large order systems. Our work introduces a fourth approach, which is an iterative application of a Lyapunov stabilization procedure and is based on geometric properties of quantum systems and the unitary Lie group. By fixing the desired final time  $T_f$ , our method may produce a solution with an arbitrary precision. Our approach seems to be more natural and geometrically motivated than the numerical schemes associated to the GRAPE method. Hence, some restrictions on the control law can be introduced in a quite natural way. Furthermore, the efficiency of our method is assured by some mathematical proofs of convergence. An example of a three coupled-qubit system is presented, for which an upper bound  $T_f^*$  for the minimal-time solution is known. Our method is able to generate fast and virtually exact solutions, with  $T_f$  around  $T_f^*$ .

Keywords— Quantum Control, Quantum Gates, Nonlinear Control, Lyapunov Stability, Stabilization.

Resumo— O problema de geração de portas quânticas é um problema de controle não linear em malha aberta. Por um lado, o controle ótimo gera controles rápidos mas com uma complexidade computacional imensa, inaceitável para sistemas da ordem alta. Por outro lado, a estabilização via Lyapunov pode produzir controles lentos, mas com complexidade aceitável. Uma terceira técnica para abordar a complexidade do controle ótimo é denominada de GRAPE (Gradient Ascent Pulse Engineering), que é essencialmente uma versão numérica do controle ótimo utilizando o método do gradiente, podendo produzir resultados muito bons para sistemas de ordem alta. Neste trabalho, introduzimos um quarto método, que é uma aplicação iterativa de um procedimento de estabilização via Lyapunov, baseado nas propriedades geométricas de sistemas quânticos e do grupo de Lie unitário. Fixado o tempo final desejado  $T_f$ , nosso método é capaz de produzir uma solução com precisão arbitrária. Nossa abordagem parece ser mais natural e geometricamente motivada que os esquemas numéricos do método GRAPE. Assim, algumas restrições na lei de controle podem ser introduzidas de forma relativamente natural. Mais ainda, a eficiência do nosso método é garantida por algumas provas matemáticas de convergência. Um exemplo de um sistema de três bits quânticos acoplados é apresentado. Para este exemplo, uma cota superior  $T_f^*$  para o tempo mínimal de solução é conhecida. Nosso método é capaz de gerar uma solução rápida e virtualmente exata, com  $T_f$  em torno de  $T_f^*$ .

Palavras-chave— Controle Quântico, Portas Quânticas, Controle Não Linear, Estabilidade de Lyapunov, Estabilização.

## 1 Introdução

O problema básico de geração de portas quânticas via controle coerente é um problema de controle em malha aberta de um sistema controlável e invariante à direita com m entradas  $u=(u_1,\ldots,u_m)$  e estado X(t), denominado de propagador, que evolui no grupo unitário U(n). Uma introdução aos problemas de controle quântico pode ser encontrada em alguns excelentes livros textos (D'Alessandro, 2008; Cong, 2014). É fato conhecido que o controle ótimo pode produzir leis de controle eficientes e rápidas no contexto de preparação de estado e geração de portas quânticas (Palao and Kosloff, 2002; Palao and Kosloff, 2003). No entanto, para ordens n elevadas, esta abordagem não é aplicável devido a restri-

ções de complexidade (Schirmer and de Fouquieres, 2011). Como uma abordagem alternativa, técnicas de estabilização de Lyapunov-LaSalle também foram utilizadas (Yamamoto et al., 2007; Mirrahimi, 2009; Mirrahimi et al., 2005; Grivopoulos and Bamieh, 2003; Zhang et al., 2014; Pan et al., 2015; Dong and Petersen, 2010). O presente trabalho é baseado principalmente nas técnicas desenvolvidas em (Silveira et al., 2016). Naquele trabalho, a solução de um problema de rastramento de trajetórias via estabilização de Lyapunov permite solucionar o problema de geração de portas quânticas quando o tempo final  $T_f$  é suficientemente grande. Neste caso, não podemos fixar a priori  $T_f$  pois, dado um erro final desejado  $\epsilon$ , encontramos  $T_f$  suficientemente grande tal que exista solução que admita um erro menor que  $\epsilon$ .

No presente trabalho são apresentadas duas contribuições principais. A primeira é um algoritmo (Algoritmo 1) que soluciona o problema de rastreamento para um tempo final  $T_f$  e um erro admissível  $\epsilon$ , ambos fixados a priori. O ingrediente principal do Algoritmo 1 é a aplicação sucessiva do mesmo método de rastreamento de (Silveira et al., 2016), gerando assim uma sequência de trajetórias que terão um erro final cada vez menor. A segunda contribuição (Algoritmo 2) é um refinamento da primeira. Apresentamos um método que permite diminuir arbitrariamente o erro da solução gerada pelo Algoritmo 1, para o mesmo tempo final  $T_f$ . O ingrediente principal é o fato de que o fluxo do sistema estabilizado em malha fechada é localmente uma contração. Desta forma, a prova da eficiência do Algoritmo 2 é uma aplicação do Teorema da Contração de Banach. Ressaltamos que o Algoritmo 2 só funciona localmente, isto é, se a trajetória gerada pelo Algoritmo 1 admite um erro final  $\epsilon$  suficientemente pequeno.

## 2 Preliminares e Definição do Problema

Neste trabalho consideramos um sistema quântico controlável e invariante à direita da forma:

$$\dot{X}(t) = -\iota \left( H_0 + \sum_{k=1}^m u_k(t) H_k \right) X(t) \tag{1}$$

$$= \left( S_0 + \sum_{k=1}^m u_k(t) S_k \right) X(t), \quad X(0) = I,$$

onde  $X \in \mathrm{U}(n)$  é o estado (propagador),  $S_0 = -\iota H_0, S_k = -\iota H_k \in \mathfrak{u}(n)$  (álgebra de Lie associada a  $\mathrm{U}(n)$ ), e  $u_k(t) \in \mathbb{R}$  são os controles. Consideramos aqui a mesma função de Lyapunov  $\mathcal{V} : \mathcal{W} \subset \mathrm{U}(n) \to [0,\infty)$  definida em (Silveira et al., 2014):

$$\mathcal{V}(\widetilde{X}) = -\text{Tr}\left(\frac{(\widetilde{X} - I)^2}{(\widetilde{X} + I)^2}\right) \ge 0,$$
 (2)

onde W é o subconjunto aberto de U(n) dado por

$$\mathcal{W} = \{ W \in U(n) \mid \det(I + W) \neq 0 \}. \tag{3}$$

Foi mostrado em (Silveira et al., 2014) que  $\mathcal{V}(\widetilde{X})$  é uma noção de distância entre  $\widetilde{X} \in \mathcal{W}$  e a matriz identidade I. Esta noção de distância pode ser estendida a uma noção de distância (não limitada) entre duas matrizes  $X_1, X_2 \in \mathrm{U}(n)$ : dist :  $\mathrm{U}(n) \times \mathrm{U}(n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$  é definida por dist $(X_1, X_2) = \mathcal{V}(X_1^{\dagger}X_2)$  quando  $X_1^{\dagger}X_2 \in \mathcal{W}$ , e dist $(X_1, X_2) = \infty$  quando  $X_1^{\dagger}X_2 \notin \mathcal{W}$ . O problema seguinte foi solucionado em (Silveira et al., 2016):

**Problema 1** (Geração Fraca de Portas Quânticas) Fixe  $X_{goal} \in U(n)$  associada à porta quântica a ser sintetizada. Fixe um erro admissível  $\epsilon > 0$ . A geração fraca de porta quântica

 $X_{goal} \in U(n)$  consiste em encontrar um tempo final  $T_f > 0$  suficientemente grande e entradas de controle  $u_k : [0, T_f] \to \mathbb{R}$  de modo que o estado do sistema (1) seja levado da condição inicial X(0) = I para alguma condição final  $X(T_f)$  tal que  $dist(X(T_f) - X_{goal}) \le \epsilon$ .

A solução do Problema 1 proposta em (Silveira et al., 2016) considerou uma trajetória de referência  $\overline{X}(t)$ , que é solução do sistema (1) com condição inicial  $\overline{X}(0) = \overline{X}_0$  e gerada pela aplicação de entradas de referência da forma

$$\overline{u}_{k}(t) = \sum_{\ell=1}^{M} \left[ a_{k\ell} \sin(2\ell\pi t/T) + b_{k\ell} \cos(2\ell\pi t/T) \right].$$
(4a)

Note que as entradas de referência são definidas como a soma de M harmônicos de  $\sin(2\pi t/T)$  e de  $\cos(2\pi t/T)$ , cujas amplitudes são parametrizadas pelo par de vetores  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{mM} \times \mathbb{R}^{mM}$ , onde T > 0 é o período e

$$\mathbf{a} = (a_{11}, \dots, a_{1M}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mM})(4b)$$

$$\mathbf{b} = (b_{11}, \dots, b_{1M}, \dots, b_{m1}, \dots, b_{mM})$$
 (4c)

Considere o sistema de referência (em U(n))

$$\dot{\overline{X}}(t) = S_0 \overline{X}(t) + \sum_{k=1}^{m} \overline{u}_k(t) S_k \overline{X}(t), \quad \overline{X}(0) = \overline{X}_0,$$
(5)

e a matrix de erro (de rastreamento)  $\widetilde{X}(t)=\overline{X}^{\dagger}(t)X(t)\in \mathrm{U}(n)$ . Logo, a dinâmica de  $\widetilde{X}(t)$  é dada por

$$\dot{\widetilde{X}}(t) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{u}_k(t) \widetilde{S}_k(t) \widetilde{X}(t), \quad \widetilde{X}(0) = \widetilde{X}_0 = \overline{X}_0^{\dagger},$$

onde  $\widetilde{u}_k(t) = u_k(t) - \overline{u}_k(t)$ , e  $\widetilde{S}_k(t) = \overline{X}^{\dagger}(t)S_k\overline{X}(t)$ . Assuma that  $\widetilde{X}(0) \in \mathcal{W}$ . Considere a lei de controle:

$$\widetilde{u}_k(t) = f_k \operatorname{Tr} \left[ \widetilde{Z} \left( \widetilde{X}(t) \right) \widetilde{S}_k(t) \right], \quad (7a)$$

$$u_k(t) = \widetilde{u}_k(t) + \overline{u}_k(t),$$
 (7b)

$$\widetilde{S}_k(t) = \overline{X}^{\dagger}(t)S_k\overline{X}(t),$$
 (7c)

onde  $f_k > 0, k = 1, \dots, m$ , são os ganhos escolhidos e  $\widetilde{Z}$  é a aplicação definida por

$$\widetilde{Z}(\widetilde{X}) = \widetilde{X}(\widetilde{X} - I)(\widetilde{X} + I)^{-3}.$$
 (7d)

Esta lei de controle produz o sistema em malha fechada<sup>1</sup> (5)-(6)-(7). É mostrado em (Silveira et al., 2016) que

$$\dot{\mathcal{V}} = -\sum_{k=1}^{m} 4\widetilde{u}_k(t) \operatorname{Tr} \left[ \widetilde{Z} \left( \widetilde{X}(t) \right) \widetilde{S}_k(t) \right]$$
 (8)

e, assim, para a lei de controle (7a), obtemos que  $\dot{\mathcal{V}} = -\sum_{k=1}^m \frac{4}{f_k} \widetilde{u}_k^2(t) \leq 0$ . Os principais resultados de (Silveira et al., 2016) estão resumidos em:

 $<sup>^{1}\</sup>mathrm{Também}$  equivalente ao sistema em malha fechada (1)-(5)-(7).

**Teorema 1** Considere o sistema em malha fechada (5)-(6)-(7). Assuma que  $\widetilde{X}(0) \in W$  e que a entrada de referência é da forma (4a). Então, existe M suficientemente grande tal que, para quase toda escolha do par  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ , garante-se convergência exponencial de  $V(\widetilde{X}(t))$  para zero (e convergência exponencial de²  $\|\widetilde{X}(t) - I\|$  também para zero).

É importante ressaltar que o valor minimal de M no resultado acima é facilmente verificável pela integração numérica do sistema em malha fechada. O algoritmo de solução do Problema 1 formulado em (Silveira et al., 2016) é baseado no Teorema 1, e consiste nas duas fases descritas a seguir<sup>3</sup>:

Fase 1 Escolha  $T_f$ , um inteiro positivo M e um par  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Calcule a solução  $\overline{X}_{old}(t)$  de (5) com  $\overline{X}_{old}(0) = I$  e entrada de referência (4a). Calcule a translação à direita  $R = \overline{X}_{old}(T_f)^{\dagger} X_{goal} \in U(n)$  que move  $\overline{X}_{old}(T_f)$  para  $X_{goal} \in U(n)$ .

Fase 2 Simule o sistema em malha fechada (5)-(6)-(7) com  $X(0)=I, \overline{X}(0)=\overline{X}_{old}(0)R=R$  e entrada de referência (4a).

Este método de duas fases pode solucionar o Problema 1 (versão fraca), ao menos quando  $T_f$  é suficientemente grande. Neste artigo, consideramos a seguinte versão forte do problema de geração de portas quânticas:

Problema 2 (Problema de Geração Forte de Portas Quânticas) Fixe  $\epsilon > 0$  e  $X_{goal} \in U(n)$  associada à porta quântica a ser gerada. Fixe um tempo final desejado  $T_f > 0$ . Dizemos que o problema de geração forte da porta quântica  $X_{goal} \in U(n)$  é  $T_f$ -solúvel se pudermos calcular leis de controle em malha aberta  $u_k : [0, T_f] \to \mathbb{R}$  de modo que o estado de (1) seja levado de X(0) = I para  $X(T_f)$  tal que  $dist(X(T_f), X_{goal}) \leq \epsilon$ .

Um algoritmo será chamado virtualmente exato se ele puder construir uma solução do Problema 2 (versão forte) para todo  $\epsilon > 0$  (tão pequeno quanto se queira).

## 3 Algoritmo de Geração Iterativa de Trajetórias de Referência

Esta seção descreve o primeiro algoritmo (Algoritmo 1) aqui proposto para a geração de trajetórias de referência baseado numa abordagem de estabilização via Lyapunov. A idéia é simples, e se baseia na repetição sucessiva do método composto pelas fases 1 e 2 descritas na seção anterior. A grosso modo, no passo  $\ell \in \mathbb{N}$  do Algoritmo 1,

geramos uma curva  $\overline{X}^{\ell}:[0,T_f]\to \mathrm{U}(n)$  pela aplicação de entradas de referência  $\overline{u}_k^{\ell}:[0,T_f]\to\mathbb{R},$  $k = 1, \dots m$ , ao sistema (5) com condição inicial  $\overline{X}^{\ell}(0) = I$ . Em seguida, consideramos a trajetória de referência  $\overline{X}(t)$  obtida pela translação à direita de  $\overline{X}^{\ell}(t)$  de modo a respeitar a condição final  $\overline{X}(T_f) = X_{goal}$ . Então, escolhe-se a curva  $\overline{X}^{\ell+1}(t)$ do passo  $\ell+1$ como a solução X(t)do sistema em malha fechada (1)-(5)-(7) com condição inicial X(0) = I. É mostrado em (Pereira da Silva et al., 2018) que  $\operatorname{dist}(X_{goal}, \overline{X}^{\ell+1}(T_f)) \leq$  $\operatorname{dist}(X_{goal}, \overline{X}^{\ell}(T_f))$ , ou seja, cada iteração só pode diminuir o erro final cometido ou, no pior dos casos, manter o erro cometido no caso de igualdade. Tal igualdade só ocorre num conjunto de medida nula, no sentido da Observação 1 abaixo.

Antes de descrevermos precisamente o Algoritmo 1, vamos introduzir a noção de trajetórias de referência  $\lambda$ -atrativas. Considere a bola fechada  $\overline{B}_c^{\mathcal{V}}(I) = \{X \in \mathrm{U}(n) \mid \mathrm{dist}(X,I) \leq c\}$ , onde c > 0 (finito). Uma trajetória de referência  $\overline{X}: [0,T_f] \to \mathrm{U}(n)$  gerada por certas entradas de referência  $\overline{u}_k: [0,T_f] \to \mathbb{R}$  em (5) é denominada de  $\lambda$ -atrativa em  $\overline{B}_c^{\mathcal{V}}(I)$ , onde  $\lambda$  é um numero real no intervalo (0,1), quando o sistema em malha fechada (6)-(5)-(7) satisfaz

$$\operatorname{dist}(\widetilde{X}(T_f), I) \le \lambda \operatorname{dist}(\widetilde{X}(0), I),$$
 (9)

para todo  $\widetilde{X}(0) = \overline{X}^{\dagger}(0) \in \overline{B}_{c}^{\mathcal{V}}(I).$ 

Observação 1 Fixe c > 0. É demonstrado em (Pereira da Silva et al., 2018) que para uma trajetória de referência não ser λ-atrativa para ne $nhum \lambda \in (0,1)$ , é exigido que as entradas de referência obedeçam a uma equação diferencial polinomial não trivial de ordem M (este M é o mesmo valor minimal do Teorema 1). Em particular, é preciso que o M-jato em t=0 de tais entradas seja solução da referida equação, o que só ocorre num conjunto de medida nula em relação à escolha de tal M-jato em t=0. Além disso, pode-se demonstrar que, se as entradas de referência são escolhidas como em (4), então tal fato ocorrerá somente num conjunto de medida nula em rela- $\tilde{c}$ ão à escolha do par  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  de (4). È importante ressaltar que em (Pereira da Silva et al., 2018) é fornecida uma caracterização completa das trajetórias de referência  $\lambda$ -atrativas.

# Algoritmo 1 Geração Iterativa de Trajetórias de Referência Passo 0.

Escolha  $T_f > 0$  e entradas de referência  $\overline{u}_k(t)$ :  $[0,T_f] \to \mathbb{R}$  da forma (4) para alguma escolha do par  $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ . Determine  $\overline{X}^0(t) = \overline{X}(t)$ ,  $t \in [0,T_f]$ , por integração numérica do sistema (5) com  $\overline{X}^0(0) = \overline{X}(0) = I$ . Defina  $\overline{u}_k^0(t) = \overline{u}_k(t)$ ,  $k = 1, \ldots, m$ , e guarde o valor de  $\overline{X}^0(T_f)$ .

 $<sup>^2 \</sup>mbox{Neste}$ trabalho, a norma matricial será sempre a norma de Frobenius.

 $<sup>^3\</sup>text{Este}$  método funciona quando  $\mathcal{V}(R)=\text{dist}(\overline{X}_{old}(T_f),X_{goal})$  é finito. Caso contrário, devese usar um método de duas iterações baseado na raiz quadrada de R, cf. (Silveira et al., 2016).

**Passo**  $1 \leq \ell \leq N_1$  ( $N_1$  é o número de passos) **Fase 1.** Assuma que no passo  $\ell - 1$  foi gerada a curva  $\overline{X}^{\ell-1} : [0, T_f] \to U(n)$ , com  $\overline{X}^{\ell-1}(0) = I$ , pela aplicação das entradas  $\overline{u}_k^{\ell-1} : [0, T_f] \to \mathbb{R}$  no sistema (5). Determine a translação à direita

$$R^{\ell} = \left\{ \overline{X}^{\ell-1}(T_f) \right\}^{\dagger} X_{goal} \in U(n). \tag{10}$$

Fase 2. Calcule X(t) por integração numérica do sistema em malha fechada<sup>4</sup> (1)-(5)-(7) com: X(0) = I,  $\overline{X}(0) = \overline{X}^{\ell-1}(0)R^{\ell} = R^{\ell}$ ,  $\overline{u}_k(t) = \overline{u}^{\ell-1}(t)$  e  $\widetilde{u}_k(t)$  dado por (7a). Defina  $\overline{X}^{\ell}(t) = X(t)$  e  $\overline{u}_k^{\ell}(t) = u_k(t) = \widetilde{u}_k(t) + \overline{u}_k(t)$ ,  $t \in [0, T_f]$ ,  $k = 1, \ldots, m$ .

O próximo resultado e a Observação 1 anterior justificam a efetividade do Algoritmo 1 acima.

Proposição 1 (Pereira da Silva et al., 2018) Seja  $d_{\ell} = dist(\overline{X}^{\ell}(T_f), X_{goal})$ . Então  $d^{\ell}$  é uma sequência não crescente. Além disso, se  $\overline{X}^{\ell-1}$ :  $[0, T_f] \to U(n)$  for  $\gamma_{\ell}$ -atrativa, então  $d_{\ell} \leq \gamma_{\ell} d_{\ell-1}$ .

Observação 2 Há duas modificações importantes que podem melhorar o desempenho do Algoritmo 1 (e que foram consideradas na Seção 5):

(A) Saturação da Entrada. Pode-se incluir saturações nas entradas de referência  $\overline{u}_k^\ell(t)$ . Além disso, isto pode ser feito sem se perder a  $\lambda$ -atratividade da trajetória de referência  $\overline{X}^\ell(t)$  (Pereira da Silva et al., 2018). Como a saturação diminui a margem para se ter uma derivada negativa da função de Lyapunov, é natural se esperar uma perda de desempenho na presença de saturação.

(B) Saturação de Posição. Em cada passo  $\ell$ do Algoritmo 1, temos que  $dist(\overline{X}(0), \overline{X}^{\ell}(0)) =$  $dist(R^{\ell}, I) = \mathcal{V}(R^{\ell})$ . A entrada  $\widetilde{u}_k(t)$  é definida por (7), e verifica-se que ela pode ser bastante alta quando dist $(R^{\ell}, I)$  também for alta. Isto pode produzir entradas elevadas, ou entradas que ficam trancadas quase o todo tempo quando saturações são consideradas. Um truque para se evitar isto é uma espécie de saturação de posição, onde substituímos a expressão original de  $R^{\ell}$  em (10) por uma versão saturada. Este truque está relacionado diretamente com o algoritmo de duas fases descrito em (Silveira et al., 2014, Algorithm 3.1) para que a lei de controle evite as suas singularidades. Para isto, considere que  $R^{\ell}$  é decomposto  $como R^{\ell} = V diag[\exp(j\theta_1), \dots, \exp(j\theta_n)]V^{\dagger},$ onde  $V \in U(n)$ . Sem perda de generalidade, assuma que  $\theta_i \in [-\pi, \pi]$ . Então, podemos substituir os ângulos  $\theta_i$  por uma versão saturada sat $(\theta_i)$ , onde sat(·) é uma função de saturação com valor máximo de π/8 (considerado na Seção 5), por exemplo. É recomendada a utilização da decomposição de Schur devido à sua estabilidade numérica.

#### 4 Algoritmo do Ponto Fixo

Nesta seção vamos apresentar o segundo algoritmo (Algoritmo 2) proposto no presente trabalho, o qual pode ser considerado um refinamento do Algoritmo 1 acima. Nas aplicações, se o Algoritmo 1 gerou uma solução com erro final  $\epsilon$  suficientemente pequeno, então o Algoritmo 2 é capaz de diminuir este erro o tanto quanto se desejar. Neste sentido, o Algoritmo 2 pode gerar soluções virtualmente exatas do problema de geração forte de portas quânticas (Problema 2 da Seção 2). O ingrediente fundamental é o Teorema da Contração de Banach aplicado ao fluxo do sistema em malha fechada.

Considere uma trajetória de referência  $\overline{X}$ :  $[0,T_f] \to \mathrm{U}(n)$  que seja solução de (5) para entradas de referência fixadas. Assuma que a condição inicial  $\overline{X}(0)$  é escolhida de forma que  $\overline{X}(T_f) = X_{goal}$  (veja a Fase 2 do Algoritmo 1).

Agora, fixe  $R \in \mathrm{U}(n)$ , e considere o sistema (5)-(6) em malha fechada com a realimentação R-corrigida

$$\widetilde{u}_{1k}(t) = f_k \operatorname{Tr} \left[ \widetilde{Z} \left( \widetilde{X}(t) R \right) \widetilde{S}_k(t) \right].$$
 (11)

Note que<sup>5</sup>, restringindo-se ao instante inicial  $t_0 = 0$ , o sistema em malha-fechada (variante no tempo) (6)-(11) admite um fluxo bem definido  $\mathcal{F}: [0, T_f] \times \mathcal{W} \to \mathrm{U}(n)$  em que  $\widetilde{X}(t) = \mathcal{F}(t, \widetilde{X}_0)$ . Construa a translação à direita

$$\widetilde{X}_1(t) = \widetilde{X}(t)R.$$
 (12)

Então, pela invariância à direita do sistema (6), é fácil mostrar que a dinâmica de  $\tilde{X}_1(t)$  é variante no tempo e dada por:

$$\dot{\widetilde{X}}_{1}(t) = \sum_{k=1}^{m} \widetilde{u}_{1k}(t) \widetilde{S}_{k}(t) \widetilde{X}_{1}(t), \quad \widetilde{X}_{1}(0) = \widetilde{X}_{0} R, 
\widetilde{u}_{1k}(t) = f_{k} \operatorname{Tr} \left[ \widetilde{Z} \left( \widetilde{X}_{1}(t) \right) \widetilde{S}_{k}(t) \right],$$
(13)

ou seja, corresponde às mesmas equações do sistema em malha-fechada original (6)-(7), mas com  $\widetilde{X}$  substituído por  $\widetilde{X}_1$  e com a condição inicial transladada  $\widetilde{X}_1(0) = \widetilde{X}_0 R$ . Como  $\widetilde{X}(t) = \mathcal{F}(t,\widetilde{X}_0)$ , então  $\widetilde{X}_1(t) = \mathcal{F}(t,\widetilde{X}_0R)$ . Em particular, fixando  $T_f > 0$  e assumindo que  $R \in \mathrm{U}(n)$  é um ponto fixo do mapa

$$\mathcal{G}_{T_f,\widetilde{X}_0}(R) = \mathcal{F}(T_f,\widetilde{X}_0 R), \tag{14}$$

isto é,  $\mathcal{G}_{T_f,\widetilde{X}_0}(R)=R$ , então segue-se que  $\widetilde{X}_1(T_f)=R$ , donde conclui-se que  $\widetilde{X}(T_f)=R$ 

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Como o sistema (5) é invariante à direita, isto irá produzir  $\overline{X}(t) = \overline{X}^{\ell-1}(t)R^{\ell}$ . Portanto,  $\overline{X}(T_f) = X_{qoal}$ .

 $<sup>^5</sup>$ Quando desconsideramos a parte (5) do sistema em malha fechada (5)-(6)-(11), resulta que o sistema em malha fechada reduzido (6)-(11) é um sistema variante no tempo.

 $<sup>^6</sup>$  Aqui, não estamos sendo precisos por não explicitarmos o domínio de definição do mapa  $\mathcal{G}_{T_f,\widetilde{X}_0}.$ 

 $\overline{X}^{\dagger}(T_f)X(T_f)=I$  por (12), que por sua vez implica que  $X(T_f)=X_{goal}$ . O ponto crucial é que **um ponto fixo** R **do mapa (14) permite obter uma solução do problema com erro nulo.** Na prática, o Algoritmo 2 descrito abaixo (baseado na prova do Teorema da Contração de Banach), obtém, quando o mesmo converge, uma estimativa de R com erro arbitrariamente pequeno. Esta estimativa pode ser então usada como correção da realimentação para obter uma solução do Problema 2 (geração forte de portas quânticas) da Seção 2 com erro arbitrariamente pequeno.

Algoritmo 2 Algoritmo do Ponto Fixo

Assuma que escolhemos  $X_0 \in U(n), T_f > 0$ , e entradas de referências  $\overline{u}_k : [0, T_f] \to \mathbb{R}, k = 1, \ldots, m$ . Escolha um inteiro  $N_2 > 2$  e um erro aceitável  $\epsilon > 0$ . Defina  $R_0 = I$  e inicialize  $\ell = 1$ .

WHILE  $\ell \leq N_2$ 

(a)  $R_{\ell} = \mathcal{G}_{T_f, \widetilde{X}_0}(R_{\ell-1}) = \mathcal{F}(T_f, \widetilde{X}_0 R_{\ell-1})$  (computado pela integração numérica de (5)-(13) no intervalo de tempo  $[0, T_f]$ , com  $R = R_{\ell-1}$ ). (b)  $Se \ \ell \geq 2 \ e \ \|R_{\ell} - R_{\ell-1}\| \geq \|R_{\ell-1} - R_{\ell-2}\|$  (falhou no teste de contração), então atribua  $k = \ell - 1$  e  $\ell = N_2$  (para terminar o WHILE). (c)  $Se \ \ell \geq 2 \ e \ \|R_{\ell} - R_{\ell-1}\| < \|R_{\ell-1} - R_{\ell-2}\|$  (passou no teste de contração), então atribua  $k = \ell - 1$ .

(d)  $\ell \leftarrow \ell + 1$  (incremente  $\ell$ ).

**END** (do WHILE) Atribua  $R = R_{k-1}$  e defina  $\epsilon_{corr} = ||R_k - R_{k-1}||$ .

Observação 3 Em (Pereira da Silva et al., 2018) é demonstrado que  $||X(T_f) - X_{goal}|| \le \epsilon_{corr}$  quando utilizamos a lei de controle R-corrigida (11) no sistema (5)-(6). Simulações mostram que às vezes vale a pena utilizar (11) mesmo quando o teste de contração falha. Saturações são indesejáveis para o bom funcionamento do Algoritmo 2. No entanto, o Algoritmo 2 gera pequenas correções na entrada para compensação de erros também pequenos, e portanto a saturação aqui não implicará em grandes diferenças no resultado final.

A efetividade do Algoritmo 2 é garantida por:

**Teorema 2** (Pereira da Silva et al., 2018) Assuma que a trajetória de referência é  $\lambda$ -atrativa. Então, existem  $\epsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tais que, se  $\|\widetilde{X}_0 - I\| < \epsilon$  (norma de Frobenius), então:

- A imagem da bola fechada  $\overline{B}_{\delta}(I) \triangleq \{X \in U(n) \mid ||X I|| \leq \delta\}$  pelo mapa (14) está contida em  $\overline{B}_{\delta}(I)$ .
- O mapa (14) é uma contração quando restringido a  $\overline{B}_{\delta}(I)$ .

Em particular, se  $\|\widetilde{X}_0 - I\| < \epsilon$ , então a sequência  $\{R_\ell\}$  determinada pelo Algoritmo 2 (com  $N_2 \to \infty$ ) convergirá para o único ponto fixo R de (14) quando  $\ell \to \infty$ .

#### 5 Exemplo

O sistema quântico aqui considerado é um sistema que evolui em U(8), sendo constituído de três qbits (bits quânticos) acoplados. Portanto, o espaço de Hilbert de evolução é o produto tensorial  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ , onde cada  $\mathbb{C}^2$  é o espaço de um único qubit. Aqui consideraremos as mesmas notações de (Khaneja et al., 2002). As matrizes de "spin" de Pauli e a identidade serão denotadas por:

$$I_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

As seguintes notações matriciais são utilizadas para a definição da dinâmica do sistema:

 $I_{1w} = I_w \otimes I_2 \otimes I_2, I_{2w} = I_2 \otimes I_w \otimes I_2, I_{3w} = I_2 \otimes I_2 \otimes I_w.$ 

Ressaltamos que letra w pode representar x, y, ou z. Por exemplo,  $I_{1x}$  denota  $I_x \otimes I_2 \otimes I_2$ . Tal sistema quântico é da forma (1) com n=8 e m=7, onde as matrizes Hamiltonianas são dadas por  $H_0=2\pi JI_{1z}\,I_{2z}+2\pi JI_{2z}I_{3z}$  ("arrasto"),  $H_1=2\pi I_{1x},\ H_2=2\pi I_{1y},\ H_3=2\pi I_{2x},\ H_4=2\pi I_{2y},\ H_5=2\pi I_{3x},\ H_6=2\pi I_{3y},\ H_7=I_2\otimes I_2\otimes I_2$  (controle da fase global) e J=1 é uma constante (normalizada). Pode ser mostrado que este sistema é controlável.

O objetivo é gerar a porta quântica SWAP, que inverte o estado quântico dos qubits 1 e 3, e deixa o estado quântico da porta 2 invariante. Como é usual, denotamos a base canônica de  $\mathcal{H}$  por  $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$  =  $\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |011\rangle, |100\rangle, |101\rangle, |110\rangle, |111\rangle\}.$ Portanto, a matriz associada à porta quântica SWAP é dada por  $X_{goal} = |000\rangle\langle000| +$  $|001\rangle\langle100| + |010\rangle\langle010| + |011\rangle\langle110| + |100\rangle\langle001| +$  $|101\rangle\langle101| + |110\rangle\langle011| + |111\rangle\langle111| \in U(n)$ (utilizamos a notação de Dirac, em que  $\langle \phi |$ representa o dual (transposto conjugado) de  $|\phi\rangle$ ). Para tal porta quântica, o tempo minimal  $T^*$  possui uma cota superior conhecida:  $T^* = \frac{3\sqrt{3}}{2J}$  (veja (Khaneja et al., 2002, Teo.2), (Khanejā et al., 2005)). Os ganhos  $f_k$  em (7a),  $k \in \{1, 2, ..., 7\}$ , foram escolhidos como  $f_k = K = \pi$ . A semente do Algoritmo 1 foi gerada por uma escolha aleatória do par  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (com elementos no intervalo [-K/10, K/10]) para se definir (e manter fixadas de uma vez por todas) as entradas de referência (4) com M = 5 e m = 7. Uma saturação nas leis de controle  $u_k(t)$  com  $u_{max} = 12$  (igual para todas as entradas) foi utilizada, assim como uma saturação de posição para ângulos menores que  $\pi/8$ , mas em nenhuma simulação as entradas saturaram. A Tabela 1 resume os resultados obtidos. Lembre que  $T^*$  é uma cota superior conhecida do tempo minimal (o tempo minimal não é conhecido), e aqui  $\epsilon_{non-corr}$  e  $\epsilon_{corr}$  são

respectivamente a norma de Frobenius do erro final  $||X(T_f) - X_{goal}||$  após o fim dos Algoritmos 1 e 2. Quando o teste de contração não passou no Algoritmo 2, assinalamos o valor do erro encontrado com a marca (E). A quarta coluna da Tabela 1 exibe o tempo típico de computação num PC com Windows 10  $\mathbb R$  e MATLAB  $\mathbb R$ . A última coluna exibe o complementar  $(1 - \mathcal F)$  da fidelidade de pior caso, que é uma medida da precisão da porta quântica gerada bastante utilizada em computação quântica, estimando 7 a probabilidade de erro numa operação da porta gerada no pior caso. Em todas as simulações, com exceção da primeira, temos que  $N_1 = N_2 = 1000$ . Na primeira simulação, temos  $N_1 = N_2 = 100$ .

| $T_f/T^*$ | $\epsilon_{non-corr}$ | $\epsilon_{corr}$ | tempo    | $1-\mathcal{F}$ |
|-----------|-----------------------|-------------------|----------|-----------------|
|           |                       |                   | exec.(s) |                 |
| 3.0       | 2e-03                 | $1.0e{-7}$        | 81       | $3.7e{-13}$     |
| 3.0       | $1.2e{-14}$           | $1.0e{-14} (E)$   | 551      | $3.7e{-13}$     |
| 2.0       | 5.2e-3                | 2.1e-3 (E)        | 721      | $4.9e{-7}$      |
| 1.5       | 9.3e-3                | 6.8e-3 (E)        | 620      | $5.0e{-6}$      |
| 1.0       | 1.3e-3                | 1.0e-3            | 804      | $1.7e{-7}$      |
| 0.75      | 0.11                  | 0.11 (E)          | 571      | $2.3e{-3}$      |
| 0.5       | 1.9                   | 1.9 (E)           | 548      | $9.3e{-1}$      |

Tabela 1: Resumo dos resultados de simulação.

#### 6 Conclusões

O exemplo de sistema quântico apresentado neste artigo também foi abordado em (Pereira da Silva et al., 2018), onde se considerou uma outra porta quântica desejada em que o tempo minimal é perfeitamente conhecido. O resultados daquele artigo mostraram que as técnicas propostas (comuns ao presente artigo) são capazes de gerar a referida porta quântica no tempo minimal com boa fidelidade, assim como gerar tal porta com precisão virtualmente exata em tempos próximos do minimal. Naquele artigo também foi mostrada a efetividade das técnicas para sistemas de ordem elevada. No presente artigo, consideramos a geração da porta quântica "SWAP". Neste caso, somente uma cota superior do tempo minimal  $T^*$  é conhecida. Nossas técnicas foram capazes de gerar a porta "SWAP" com excelente fidelidade para tempos finais  $T_f$  da ordem de  $T^*$ , conforme podemos constatar pela Tabela 1.

#### Agradecimentos

A pesquisa do primeiro autor foi financiada por (colocado na versão com autores).

A pesquisa do segundo autor foi financiada por (colocado na versão com autores).

# Referências

Cong, S. (2014). Control of quantum systems: theory and methods, John Wiley & Sons.

- D'Alessandro, D. (2008). Introduction to Quantum Control and Dynamics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Dong, D. and Petersen, I. R. (2010). Quantum control theory and applications: a survey, *IET Control Theory Applications* 4(12): 2651–2671.
- Grivopoulos, S. and Bamieh, B. (2003). Lyapunov-based control of quantum systems, *Decision and Control*, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on, Vol. 1, IEEE, pp. 434–438.
- Khaneja, N., Glaser, S. J. and Brockett, R. (2002). Sub-riemannian geometry and time optimal control of three spin systems: Quantum gates and coherence transfer, *Phys. Rev. A* 65: 032301–.
- Khaneja, N., Glaser, S. J. and Brockett, R. (2005). Erratum: Sub-riemannian geometry and time optimal control of three spin systems: Quantum gates and coherence transfer [phys. rev. a 65, 032301 (2002)], Phys. Rev. A 71: 039906.
- Mirrahimi, M. (2009). Lyapunov control of a quantum particle in a decaying potential, Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, Vol. 26, Elsevier, pp. 1743–1765.
- Mirrahimi, M., Rouchon, P. and Turinici, G. (2005). Lyapunov control of bilinear schrödinger equations, *Automatica* **41**(11): 1987–1994.
- Palao, J. P. and Kosloff, R. (2002). Quantum computing by an optimal control algorithm for unitary transformations, *Phys. Rev. Lett.* **89**(18): 188301–.
- Palao, J. P. and Kosloff, R. (2003). Optimal control theory for unitary transformations, *Phys. Rev. A* **68**(6): 062308–.
- Pan, Y., Ugrinovskii, V. and James, M. R. (2015). Lyapunov analysis for coherent control of quantum systems by dissipation, 2015 American Control Conference (ACC), pp. 98–103.
- Pereira da Silva, P. S., Rouchon, P. and Silveira, H. B. (2018). Fast and virtually exact quantum gate generation via Lyapunov-LaSalle techniques, pp. 1–23. To be submitted.
- Schirmer, S. G. and de Fouquieres, P. (2011). Efficient algorithms for optimal control of quantum dynamics: the krotov method unencumbered, *New Journal of Physics* **13**: 073029–.
- Silveira, H. B., Pereira da Silva, P. S. and Rouchon, P. (2014). Quantum gate generation by t-sampling stabilization, *International Journal of Control* 87(6): 1227–1242.
- Silveira, H. B., Pereira da Silva, P. S. and Rouchon, P. (2016). Quantum gate generation for systems with drift in u(n) using lyapunov-lasalle techniques, *International Journal of Control* **89**(1): 1–16. DOI:10.1080/00207179.2016.1161830.
- Yamamoto, N., Tsumura, K. and Hara, S. (2007). Feedback control of quantum entanglement in a two-spin system, *Automatica* **43**(6): 981 992.
- Zhang, J., Liu, Y.-x., Wu, R.-B., Jacobs, K. and Nori, F. (2014). Quantum feedback: theory, experiments, and applications,  $arXiv\ preprint\ arXiv:1407.8536$ .

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>De fato, a probabilidade de acerto é igual a  $\mathcal{F}^2$ . Se  $\mathcal{F}$  for pequeno, então  $1 - \mathcal{F} \approx (1 + \mathcal{F})(1 - \mathcal{F}) = 1 - \mathcal{F}^2$ .