

IDENTIFICAÇÃO E CONTROLE POR TORQUE COMPUTADO DE UMA PLATAFORMA INERCIAL PARA ESTABILIZAÇÃO E RASTREAMENTO DA LINHA DE VISADA

MATHEUS F. REIS, JOÃO C. MONTEIRO, GUILHERME P. S. CARVALHO, ALEX F. NEVES,
ALESSANDRO J. PEIXOTO*

*Coppe-UFRJ

Centro de Tecnologia, Cidade Universitária
Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo— The majority of works in line of sight (LOS) stabilization and tracking using inertially stabilized platforms (ISP) apply simple linear controllers to achieve the required performance. Commonly, linear models are employed to describe the relationship between torque and position of the ISP joints, such as a double integrator with an inertia gain. However, high-accuracy and fast motion applications may require more complex control techniques, demanding accurate dynamic and kinematic models, and system *identification* procedures. In this work, we propose a cascade control topology for stabilization and tracking of the line of sight of a camera in a 3-DOF ISP installed on a vessel. Using measurements from joint encoders and an inertial navigation system (INS) fixed on the vessel, an inner controller cancels the *dynamic* disturbances acting on the ISP joints, while an outer kinematic controller ensures LOS tracking. For this type of controller, the ISP joint axes are critical parameters with respect to the tracking performance, since their uncertainty introduce bias in the control response. For this reason, a simple, yet efficient identification procedure for the joint axes is proposed. Simulations in Gazebo using the Rock robotics framework and a Unity-based viewer show the efficiency of this procedure and the performance of the proposed cascade controller for LOS stabilization and tracking.

Palavras-chave— Line of sight stabilization, inertial platform, computed torque control.

Resumo— A maioria dos trabalhos em estabilização e rastreamento da linha de visada (LOS) com plataformas inerciais (ISPs) utilizam simples controladores lineares para atingir o nível de performance exigido. Geralmente, modelos lineares são suficientes para descrever a relação ângulo-torque para as juntas da plataforma, tais como um simples duplo integrador. Porém, em operações que requerem alta velocidade e/ou acurácia, técnicas de controle mais complexas podem ser necessárias. Tais técnicas em geral demandam modelos mais realistas para o sistema considerado, bem como procedimentos para a identificação de parâmetros destes modelos. Neste trabalho, é proposta uma topologia de controle em cascata para estabilização e rastreamento da linha de visada de uma câmera, utilizando uma plataforma inercial de 3 eixos instalada em um navio. Utilizando medições de encoders localizados nas juntas e um sistema de navegação inercial (INS) acoplado ao navio, um controlador interno cancela perturbações dinâmicas devido ao movimento do navio, enquanto um controlador cinemático externo garante o rastreamento da LOS. Nesta abordagem, os eixos das juntas são parâmetros críticos em relação ao desempenho de rastreamento, pois sua incerteza introduz um bias em relação a referência desejada. Por isso, um simples e eficiente procedimento de identificação é proposto. Simulações em Gazebo com o ambiente de simulação Rock e um visualizador baseado em Unity mostram a eficiência do procedimento e o desempenho do controlador proposto.

Palavras-chave— Estabilização da linha de visada, plataformas inerciais, controle por torque computado.

1 Introdução

Estabilização da linha de visada (LOS) é um problema comum na literatura de controle. Plataformas inerciais (do inglês *Inertial Stabilization Platform* - ISP) são utilizadas para estabilização de cargas em aplicações de estabilização e rastreamento, quando um sensor precisa ser estabilizado e/ou apontado de forma precisa em um ambiente dinâmico. Alguns exemplos são: câmeras para vigilância aérea e para a indústria de entretenimento (Hurák e Řezáč, 2009), sensores de longo alcance para veículos (Debruin, 2008), aplicações militares (Kazemy et al., 2007) e câmeras térmicas para detecção de vazamento de óleo (Skjelten et al., 2011).

ISPs são geralmente compostas por gimbais concêntricos montados em uma base móvel (veículo) equipadas com motores e encoders/tacômetros com uma carga fixa no último gimbal. Giroscópios ou sistemas de navegação inercial (do inglês *Inertial Navigation System* - INS) são usados para medir o movimento do veí-

culo (*estabilização indireta*) ou medir diretamente o movimento da carga (*estabilização direta*).

Tipicamente, não é possível utilizar sensores de última geração em configuração direta devido à limitações de tamanho e carga da ISP. Em geral, tais limitações inexistem na configuração indireta, especialmente em aplicações com grandes veículos, como navios. Porém, neste método é necessário realizar a estimação do movimento da carga a partir do movimento medido do veículo e da ISP. Esta estimativa será afetada por diversas fontes de erros, como incerteza paramétrica, precisão dos encoders e rigidez da estrutura mecânica da plataforma, o que pode resultar em níveis de performance insuficientes ao se utilizar controladores baseados na linearização do modelo do sistema (Kennedy e Kennedy, 2003).

Para garantir resultados satisfatórios e desenvolver modelos confiáveis para o sistema real, é necessário um conhecimento preciso dos parâmetros do sistema. Parâmetros geométricos (Π_g) influenciam o Jacobiano da ISP e consistem nas compo-

nentes dos vectores de eixo e distâncias entre as juntas. Parâmetros dinâmicos (Π_d) influenciam as matrizes de massa, Coriolis e os termos de gravidade da equação dinâmica, e são compostos por massas, componentes de inércia e posição dos centros de massa dos elos.

Grande parte da pesquisa atual em *identificação paramétrica* está focada na estimação dos parâmetros dinâmicos. Em (Swevers et al., 2007) e (Calanca et al., 2011), séries de Fourier finitas são utilizadas para geração de trajetórias suficientemente ricas para excitar cada parâmetro, e a identificação é baseada no método dos mínimos quadrados. Em (Wu et al., 2012), as trajetórias são geradas utilizando séries de Fourier modificadas e a identificação é baseada no método de maximização da verossimilhança (maximum likelihood). Recentemente, (Fontanelli et al., 2017) propôs um algoritmo baseado em desigualdades lineares matriciais (LMIs) com trajetórias geradas por séries de Fourier finitas para identificar os parâmetros dinâmicos para o kit de robótica cirúrgica *da Vinci*. Este método também garante a viabilidade física dos parâmetros identificados, o que não é considerado em métodos anteriores.

Em contraste com tais trabalhos, focamos na identificação dos parâmetros geométricos. Apesar de importante, o impacto na performance devido à incerteza nos parâmetros dinâmicos normalmente pode ser reduzida por uma escolha apropriada da arquitetura e por uma boa sintonia do controlador. Em (Reis et al., 2018), mostra-se que mesmo sob consideráveis incertezas paramétricas, um controlador por torque computado com PID garante um desempenho satisfatório. Por outro lado, a incerteza nos parâmetros geométricos pode causar grandes níveis de bias.

Neste trabalho, propomos um método de identificação para os vetores de eixos das juntas e uma topologia de controle em cascata para estabilização e rastreamento. A malha de controle interna é um controlador por torque computado no espaço das juntas, responsável por compensar a dinâmica não-linear da planta, reduzindo-a a um duplo integrador com perturbação. A malha externa procura cancelar distúrbios cinemáticos e utiliza um controle PID no espaço operacional para garantir o rastreamento. Esta arquitetura é robusta a incertezas paramétricas e difere da proposta em (Reis et al., 2018) por fornecer uma análise mais simples e completa em relação à robustez do controle à incertezas paramétricas. Simulações em Gazebo utilizando o ambiente de simulação Rock e uma interface de usuário baseada em Unity demonstram a robustez e performance do algoritmo de controle e do método de identificação propostos.

2 Modelagem

2.1 Notação e Convenções

Esta seção introduz notações e definições utilizadas neste trabalho. Sejam os conjuntos $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $\mathbb{N}_1 = \{1, 2, \dots\}$. A menos que seja dito o contrário, $i, j, k \in \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1 \cup \{b, s, c\}$.

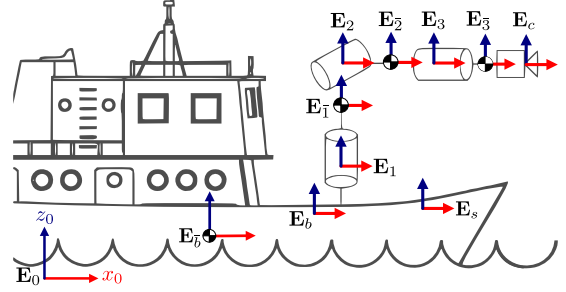


Figura 1: Convenções adotadas para a ISP.

Considerando a Fig. 1, defina o seguinte:

- $\mathbf{E}_0$: sistema de referência inercial;
- $\mathbf{E}_i$: fixo no corpo i com origem em seu centro de gravidade (CG) ($i \in \mathbb{N}_1 \cup \{b\}$);
- $\mathbf{E}_i$: fixo no corpo i com origem no eixo da i -ésima junta ($i \in \mathbb{N}_1$);
- $\mathbf{E}_s$: fixo na INS em configuração indireta;
- $\mathbf{E}_b$: fixo no veículo ($\mathbf{E}_b \equiv \mathbf{E}_s$);
- $\mathbf{E}_c$: fixo na câmera, no último elo;
- $R_{ij} \in SO(3)$: matriz de rotação de $\mathbf{E}_j$ em relação a $\mathbf{E}_i$;
- $x_i^k, y_i^k, z_i^k \in \mathbb{R}^3$: vetores da base canônica de $\mathbf{E}_i$, escritos em $\mathbf{E}_k$;
- $p_{ij}^k \in \mathbb{R}^3$: vetor de posição da origem de $\mathbf{E}_i$ até a origem de $\mathbf{E}_j$, representado em $\mathbf{E}_k$;
- $v_{ij}^k \in \mathbb{R}^3$: velocidade linear de $\mathbf{E}_i$ em relação a $\mathbf{E}_j$, escrita em $\mathbf{E}_k$;
- $\omega_{ij}^k \in \mathbb{R}^3$: velocidade angular de $\mathbf{E}_i$ em relação a $\mathbf{E}_j$, escrita em $\mathbf{E}_k$;
- $g_{ij} \in SE(3)$: transformação homogênea de $\mathbf{E}_j$ até $\mathbf{E}_i$;
- $h_i^j \in \mathbb{R}^3$: vetor unitário definindo o eixo de rotação da i -ésima junta, representado em $\mathbf{E}_j$ ($i \in \mathbb{N}_1$);
- $m_i \in \mathbb{R}$, $I_i^i \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: massa e tensor de inércia do corpo i representado em $\mathbf{E}_i$ ($i \in \mathbb{N}_1 \cup \{b\}$);
- $\mathbf{S} : \mathbb{R}^3 \mapsto so(3)$ operador do produto vetorial;
- $\mathbf{I}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matriz identidade $n \times n$.

Quando o índice sobrescrito é omitido em um vetor, o mesmo está escrito no sistema inercial $\mathbf{E}_0$.

2.2 Cinemática

Defina a configuração de $\mathbf{E}_c$ como $\eta_c = [\eta_{c1}^\top \ \eta_{c2}^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$, composta pela posição inercial da câmera $\eta_{c1} = p_{0c}$ e por uma parametrização de orientação, como por exemplo os ângulos de roll, pitch e yaw (RPY), em $\eta_{c2} = [\phi_{0c} \ \theta_{0c} \ \psi_{0c}]^\top$. A configuração da câmera pode ser obtida a partir da configuração do navio g_{0b} e da cinemática direta g_{bc} da ISP:

$$g_{0c} = g_{0b}(\eta_b) g_{bc}(q, \Pi_g), \quad (1)$$

onde $q \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de ângulos das juntas e Π_g é o vetor de parâmetros *geométricos* da ISP, composto por combinações de componentes dos vetores de eixo $h_1^b, h_{i+1}^b (i = 1, 2)$ e de distâncias entre as juntas $p_{b1}^b, p_{i,i+1}^b (i = 1, 2)$.

Seja $\vec{v}_{0i}$ e $\vec{\omega}_{0i}$ as velocidades lineares e angulares de $\mathbf{E}_i$, representadas por $v_{0i}^i \in \mathbb{R}^3$ e $\omega_{0i}^i \in \mathbb{R}^3$ quando escritas no próprio $\mathbf{E}_i$. Já que $\eta_{i1} = p_{0i}$ e η_{i2} é a orientação de $\mathbf{E}_i$ em ângulos de RPY, suas derivadas temporais são:

$$\dot{\eta}_{i1} = R_{0i}(\eta_{i2}) v_{0i}^i, \quad \dot{\eta}_{i2} = T_{0i}(\eta_{i2}) \omega_{0i}^i. \quad (2)$$

onde $T_{0i}(\eta_{i2}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é o *Jacobiano de representação*. É importante ressaltar que na representação RPY, $T_{0i}(\eta_{i2})$ perde posto em $\theta_{0i} = \pm\pi/2$.

Seja $V_{0i}^i = [(v_{0i}^i)^\top \ (\omega_{0i}^i)^\top]^\top \in \mathbb{R}^6$ o *twist* de velocidade associado à $\mathbf{E}_i$, tal que sua álgebra de Lie é dada por $\hat{V}_{0i}^i = g_{0i}^{-1} \dot{g}_{0i} \in se(3)$ (Murray et al., 1994). Dois twists de velocidade associados a dois sistemas de referência distintos $\mathbf{E}_i$ e $\mathbf{E}_j$ localizados no *mesmo corpo rígido* estão relacionados através da matriz adjunta $Ad_{g_{ij}} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$:

$$V_{0i}^i = Ad_{g_{ij}} V_{0j}^j, \quad Ad_{g_{ij}} = \begin{bmatrix} R_{ij} & \mathbf{S}(p_{ij}^i) R_{ij} \\ 0 & R_{ij} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

que possui a propriedade $Ad_{g_{ji}} = Ad_{g_{ij}}^{-1}$.

O twist V_{0c}^c associado à câmera pode ser escrito como $V_{0c}^c = V_{bc}^c + Ad_{bc}^{-1}(q, \Pi_g) V_{0b}^b$, onde V_{bc}^c é o twist de velocidade associado à $\mathbf{E}_c$ relativo ao sistema do veículo $\mathbf{E}_b$. Ele pode ser escrito em termos de $\dot{q} \in \mathbb{R}^3$ através do *Jacobiano geométrico* $J_{bc}^c(q, \Pi_g) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$:

$$V_{0c}^c = J_{bc}^c(q, \Pi_g) \dot{q} + Ad_{bc}^{-1}(q, \Pi_g) V_{0b}^b. \quad (4)$$

O *Jacobiano geométrico* da câmera pode ser dividido em $J_{bc}^c(q) = [(J_{bc1}^c)^\top (J_{bc2}^c)^\top]^\top$, onde $J_{bc1}^c, J_{bc2}^c \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ são suas partes lineares e angulares. Usando (4) e sua derivada temporal, as velocidades e acelerações angulares da câmera são

$$\omega_{0c}^c = J_{bc2}^c(q) \dot{q} + \omega_{0b}^b, \quad (5)$$

$$\dot{\omega}_{0c}^c = \dot{J}_{bc2}^c(q) \dot{q} + \dot{J}_{bc}^c(q) \dot{q} + \dot{\omega}_{0b}^b. \quad (6)$$

Usando a derivada de (2), $\ddot{\eta}_{c2}$ é dado por

$$\ddot{\eta}_{c2} = T_{0c}(\eta_{c2}) \dot{\omega}_{0c}^c + \dot{T}_{0c}(\eta_{c2}, \dot{\eta}_{c2}) \omega_{0c}^c. \quad (7)$$

Substituindo (5) e (6) em (7), obtém-se

$$\ddot{\eta}_{c2} = J_q \ddot{q} + L_q \dot{q} + J_\omega \dot{\omega}_{0b}^b + L_\omega \omega_{0b}^b, \quad (8)$$

onde as matrizes J_q, J_ω dependem de q, η_{c2} e Π_g , enquanto L_q, L_ω também dependem de $\dot{q}$ e $\dot{\eta}_{c2}$.

Uma importante propriedade algébrica é a *linearidade* de (8) em relação à Π_g :

$$\ddot{\eta}_{c2} = W_\eta(q, \dot{q}, \ddot{q}, \eta_{c2}, \dot{\eta}_{c2}, \omega_{0b}^b, \dot{\omega}_{0b}^b) \Pi_g. \quad (9)$$

onde $W_\eta \in \mathbb{R}^{3 \times N_g}$ é conhecido como *regressor cinemático*, e N_g é a dimensão de Π_g .

Dada a configuração do navio g_{0b} e seus twists de velocidade e aceleração $V_{0b}^b, \dot{V}_{0b}^b$, é possível calcular todas as configurações g_{0i} , velocidades V_{0i}^i e acelerações $\dot{V}_{0i}^i$ de cada link ($i = 1, 2, 3$) através de um procedimento iterativo, descrito abaixo.

Algoritmo 1 (Propagação Cinemática) O algoritmo é inicializado com $g_{00} = g_{0b}$, $V_{00}^0 = V_{0b}^b$, $\dot{V}_{00}^0 = \dot{V}_{0b}^b$. Então, configuração e twists de velocidade/aceleração são propagados de $i = 0$ até $i = n = 3$:

$$g_{0i} = g_{0,i-1} g_{i-1,i}, \quad (10)$$

$$V_{0i}^i = \Omega_{i-1,i}^\top (\Phi_{i,i-1} V_{0,i-1}^{i-1} + H_i \dot{q}_i), \quad (11)$$

$$\dot{V}_{0i}^i = \Omega_{i-1,i}^\top (\Phi_{i,i-1} \dot{V}_{0,i-1}^{i-1} + H_i \ddot{q}_i + A_i \dot{q}_i). \quad (12)$$

Em relação à câmera, $g_{0c} = g_{0n} g_{nc}$, $V_{0c}^c = Ad_{g_{cn}} V_{0n}^n$, $\dot{V}_{0c}^c = Ad_{g_{cn}} \dot{V}_{0n}^n$, com g_{cn} constante. As matrizes em (11), (12) são dadas por

$$\Phi_{i+1,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{S}(p_{i,i+1}^i) \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad H_{i+1}^\top = [0^\top (h_{i+1}^i)^\top],$$

$$R_{i,i+1} = \exp(\mathbf{S}(h_{i+1}^i) q_{i+1}), \quad \Omega_{i,i+1} = \begin{bmatrix} R_{i,i+1} & 0 \\ 0 & R_{i,i+1} \end{bmatrix},$$

$$A_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}(v_{0i}^i + \mathbf{S}(\omega_{0i}^i) p_{i,i+1}^i) h_{i+1}^i \\ \mathbf{S}(\omega_{0i}^i) h_{i+1}^i \end{bmatrix}.$$

Usando o **Algoritmo 1** para calcular (5), (6) e (7), é possível calcular numericamente $\ddot{\eta}_{c2}$, as matrizes J_q e J_ω e o termo $(L_q \dot{q} + L_\omega \omega_{0b}^b)$ em (8).

2.3 Dinâmica

Em (From et al., 2014), as equações de movimento de um sistema veículo-manipulador (*vehicle-manipulator system* - VMS) em relação sistema de referência do veículo $\mathbf{E}_b$ são dadas por

$$M_{qq} \ddot{q} + C_{qq} \dot{q} + G_q + M_{qV} \dot{V}_{0b}^b + C_{qV}^b V_{0b}^b = \tau_q, \quad (13)$$

onde $\tau_q \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de torques nas juntas da ISP, $M_{qq}(q, \Pi_g, \Pi_d) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $M_{qV}(q, \Pi_g, \Pi_d) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ são matrizes de massa, $C_{qq}(q, \dot{q}, V_{0b}^b, \Pi_g, \Pi_d) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $C_{qV}(q, \dot{q}, V_{0b}^b, \Pi_g, \Pi_d) \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$ são matrizes de Coriolis e $G_q(q, \eta_{b2}) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor de gravidade. O vetor $\Pi_d \in \mathbb{R}^{N_d}$ representa os parâmetros *dinâmicos* do sistema. Da mesma forma que

em (9), (13) também apresenta a propriedade de *linearidade* em relação à tais parâmetros (Siciliano et al., 2009):

$$Y_q(q, \dot{q}, \ddot{q}, \eta_{b_2}, V_{0b}^b, \dot{V}_{0b}^b, g, \Pi_g) \Pi_d = \tau_q, \quad (14)$$

onde $Y_q \in \mathbb{R}^{3 \times N_d}$ é um *regressor dinâmico*.

O método de *Newton-Euler* é um algoritmo computacionalmente eficiente para o cálculo da *dinâmica inversa* de (13). Dados $q, \dot{q}, \ddot{q}, \eta_{b_2}, V_{0b}^b, \dot{V}_{0b}^b, g, \Pi_g$ e Π_d , o algoritmo pode ser expresso por:

$$\tau_q = NE(q, \dot{q}, \ddot{q}, \eta_{b_2}, V_{0b}^b, \dot{V}_{0b}^b, g, \Pi_g, \Pi_d). \quad (15)$$

O método é composto por dois passos distintos: o primeiro é a *propagação de velocidades e acelerações* ao longo da cadeia cinemática, já introduzido no **Algoritmo 1**. O segundo passo consiste na resolução das equações de movimento para cada corpo rígido do sistema, começando do último elo até o frame do navio $\mathbf{E}_b$.

Algoritmo 2 (Propagação de Esforços)

Resolvendo as equações de Newton-Euler para as esforços (forças e torques) de contato $F_i^i \in \mathbb{R}^6$ entre dois corpos consecutivos, obtém-se:

$$F_i^i = \Phi_{i+1,i}^\top \Omega_{i,i+1} F_{i+1}^{i+1} + M_i \dot{V}_{0i}^i + B_i, \quad (16)$$

$$M_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{I}_3 & -m_i \mathbf{S}(p_{ii}^i) \\ m_i \mathbf{S}(p_{ii}^i) & I_i^i \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{S}(\omega_{0i}^i) (\mathbf{S}(\omega_{0i}^i) p_{ii}^i + v_{0i}^i) \\ m_i \mathbf{S}(p_{ii}^i) \mathbf{S}(\omega_{0i}^i) v_{0i}^i + \mathbf{S}(\omega_{0i}^i) I_i^i \omega_{0i}^i \end{bmatrix},$$

onde os parâmetros p_{ii}^i , m_i and I_i^i compõem Π_d .

Estas equações devem ser resolvidas de $i = n = 3$ até $i = 1$, utilizando os twists V_{0i}^i e $\dot{V}_{0i}^i$ previamente calculados através do **Algoritmo 1**. Além disso, $n + 1 = c$ e esforços externos agindo no frame da câmera $\mathbf{E}_c$ (último elo) não são considerados, e portanto $F_{n+1}^{n+1} = 0$.

Finalmente, os torques nas juntas podem ser calculados através da projeção dos esforços agindo em $\mathbf{E}_i$ sobre seus respectivos eixos de rotação:

$$\tau_{q_i} = H_i^\top \Omega_{i-1,i} F_i^i. \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Note que (16) não leva em consideração o peso dos elos. O efeito da gravidade (na direção $-z_0$) é introduzido modificando $\dot{V}_{0i}^i$ em (16):

$$\dot{V}_{0i}^i \leftarrow \dot{V}_{0i}^i - g \begin{bmatrix} R_{0i}^\top z_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (18)$$

Este algoritmo pode ser utilizado para o cálculo dos termos e de algumas matrizes em (13) separadamente, em particular as matrizes de massa M_{qq} , M_{qV} , o vetor de gravidade G_q e o termo de Coriolis $C_{qq} \dot{q} + C_{qV} V_{0b}^b$.

3 Formulação do Problema

Considere uma ISP em um veículo, cuja dinâmica é descrita por (13):

$$M_{qq} \ddot{q} + \tau_d = u(t), \quad (19)$$

onde $u(t) = \tau_q$ é o sinal de controle e $\tau_d = C_{qq} \dot{q} + G_q + M_{qV} \dot{V}_{0b}^b + C_{qV} V_{0b}^b$ é um distúrbio não-linear. A matriz de massa M_{qq} e o distúrbio τ_d podem ser calculados numericamente através do algoritmo de *Newton-Euler* descrito na Seção 2.3 e são, em geral, dependentes de todos os parâmetros do sistema (Π_g e Π_d).

Em configuração *indireta*, sensores inerciais de última geração permitem a medição precisa do movimento do veículo. Portanto, se os parâmetros geométricos Π_g são bem conhecidos, o **Algoritmo 1** pode ser utilizado para o cálculo de η_c , V_{0c}^c e $\dot{V}_{0c}^c$ a partir de $q, \dot{q}, \ddot{q}$ e $\eta_b, V_{0b}^b, \dot{V}_{0b}^b$.

O *objetivo de controle* é encontrar o sinal de controle $u(t)$ que assegura que a norma do erro de orientação absoluta da câmera $\tilde{\eta}_{c_2}(t) = \eta_{d_2}(t) - \eta_{c_2}(t)$ converge para um conjunto residual:

$$\beta := \{\|\tilde{\eta}_{c_2}(t)\| < \rho \mid t \rightarrow \infty\}, \quad (20)$$

onde $\rho > 0$ é uma constante apropriada tal que a orientação absoluta da câmera aproxima-se suficientemente de seu valor desejado.

Seja $\mathbf{E}_t$ o frame alvo com posição, velocidade e aceleração desejadas p_{0t} , $\dot{p}_{0t}$ e $\ddot{p}_{0t}$. Definindo $p_{ct} = p_{0t} - p_{0c} = [x_{ct} \ y_{ct} \ z_{ct}]^\top$ e supondo o *eixo óptico* da câmera alinhado com x_c^c , a orientação da câmera em coordenadas RPY que assegura a linha de visada correta $p_{ct}^c = \|p_{0t} - p_{0c}\| x_c^c$ é:

$$\eta_{d_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \arctan\left(\frac{-z_{ct}}{\sqrt{x_{ct}^2 + y_{ct}^2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{y_{ct}}{x_{ct}}\right) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Seja também as derivadas temporais de (21). Em aplicações de rastreamento de um alvo móvel, estas variáveis são funções de $\dot{p}_{0t}(t)$ e $\ddot{p}_{0t}(t)$ (consideradas conhecidas), e também da velocidade e aceleração inercial da câmera $\dot{p}_{0c}$ e $\ddot{p}_{0c}$, encontradas através de (2) (com $i = c$) e sua derivada temporal, após a obtenção de v_{0c}^c e $\dot{v}_{0c}^c$ utilizando o **Algoritmo 1**.

4 Controle em Cascata

Uma topologia em cascata é proposta para o controle de LOS da câmera. O controlador interno é baseado no método do *torque computado*, que idealmente cancela os distúrbios dinâmicos em (19), transformando o sistema em um duplo integrador no espaço das juntas. O controlador externo é um *PID* no espaço operacional com feed-forward de

aceleração e um termo linearizante para cancelar distúrbios *cinemáticos* agindo no sistema.

O controlador interno é dado por:

$$u(t) = \widehat{M}_{qq} z(t) + \widehat{\tau}_d, \quad (22)$$

onde $\widehat{M}_{qq} = M_{qq}(q, \widehat{\Pi}_g, \widehat{\Pi}_d)$ e o distúrbio $\widehat{\tau}_d$ é dado por $\widehat{\tau}_d = \tau_d(q, \dot{q}, V_{0b}^b, \dot{V}_{0b}^b, \eta_{b2}, \widehat{\Pi}_g, \widehat{\Pi}_d)$. Considerando $\widehat{\Pi}_g \neq \Pi_g$ e $\widehat{\Pi}_d \neq \Pi_d$, este controlador transforma o sistema em um duplo integrador no espaço das juntas com uma perturbação dependente do erro paramétrico. O controlador externo é dado por:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \ddot{\eta}_{d2} + K_D \dot{\tilde{\eta}}_{c2} + K_P \tilde{\eta}_{c2} + K_I \int_0^t \tilde{\eta}_{c2}(\tau) d\tau, \\ \sigma(t) &= \widehat{L}_q \dot{q} + \widehat{J}_\omega \dot{\omega}_{0b}^b + \widehat{L}_\omega \omega_{0b}^b, \\ z(t) &= (\widehat{J}_q)^{-1} [\lambda(t) - \sigma(t)], \end{aligned} \quad (23)$$

onde $K_P, K_I, K_D \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ são matrizes de ganho e $\widehat{J}_q = J_q(\widehat{\Pi}_g)$, $\widehat{L}_q = L_q(\widehat{\Pi}_g)$, $\widehat{J}_\omega = J_\omega(\widehat{\Pi}_g)$ e $\widehat{L}_\omega = L_\omega(\widehat{\Pi}_g)$. O restante das dependências das matrizes J_q, J_ω, L_q and L_ω foram omitidas por simplicidade, mas podem ser obtidas de (8).

Teorema 1 *Sejam (19) e (8) as equações dinâmicas e cinemáticas do mecanismo, respectivamente. Considerando a formulação do problema da Seção 3, defina o vetor completo de parâmetros $\Pi^T = [\Pi_g^T \Pi_d^T]$ e suponha que:*

- (i) $T_{0c}(\eta_{c2}(t))$ é não-singular para todo $t > 0$;
- (ii) existem $\rho_1, \rho_2 > 0$ tais que: $\|\dot{q}\| \leq \rho_1, \|\ddot{q}\| \leq \rho_2$ para $t > 0$;
- (iii) existem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tais que: $\|V_{0b}^b\| \leq \epsilon_1, \|\dot{V}_{0b}^b\| \leq \epsilon_2$ para $t > 0$.

Então, as leis de controle (22), (23) asseguram que a norma do erro RPY de orientação da câmera $\|\tilde{\eta}_{c2}\|$ converge para um conjunto residual de ordem $\mathcal{O}(\|\tilde{\Pi}\|)$, isto é, a constante ρ em (20) é limitada por $\|\tilde{\Pi}\|$. Além disso, $\rho \rightarrow 0$ se $\|\tilde{\Pi}\| \rightarrow 0$.

Prova: Primeiramente, note que a Suposição (i) é necessária para que $\widehat{J}_q^{-1}$ possa ser calculada em (23). Defina os erros $\widehat{M}_{qq} = M_{qq} - \widehat{M}_{qq}$ e $\tilde{\tau}_d = \tau_d - \widehat{\tau}_d$ devido à $\tilde{\Pi} \neq 0$. Substituindo a lei de controle interna (22) em (19), obtém-se

$$\ddot{q} = z(t) - \widehat{M}_{qq}^{-1} \tilde{\tau}_q, \quad (24)$$

$$\tilde{\tau}_q = \widehat{M}_{qq} \ddot{q} + \tilde{\tau}_d. \quad (25)$$

Agora, defina as matrizes $\tilde{J}_q = J_q - \widehat{J}_q$, $\tilde{J}_\omega = J_\omega - \widehat{J}_\omega$, $\tilde{L}_q = L_q - \widehat{L}_q$ e $\tilde{L}_\omega = L_\omega - \widehat{L}_\omega$, representando o erro matricial devido à $\tilde{\Pi}_g \neq 0$. Substituindo $\ddot{q}$ em (8) por sua expressão em (24), e usando a lei

de controle externa (23), a equação dinâmica do erro RPY é:

$$\lambda(t) - \ddot{\eta}_{c2} = \tilde{\tau}_d, \quad (26)$$

$$\tilde{\tau}_d = \widehat{J}_q \widehat{M}_{qq}^{-1} \tilde{\tau}_q - \Delta\eta_{c2}, \quad (27)$$

onde $\Delta\eta_{c2} = \tilde{J}_q \ddot{q} + \tilde{L}_q \dot{q} + \tilde{J}_\omega \dot{\omega}_{0b}^b + \tilde{L}_\omega \omega_{0b}^b$ é um distúrbio residual devido à $\tilde{\Pi}_g \neq 0$. Note que, devido à (14) e (9), é possível escrever (27) como:

$$\tilde{\tau}_d = \widehat{J}_q \widehat{M}_{qq}^{-1} Y_q \tilde{\Pi}_d - W_\eta \tilde{\Pi}_g. \quad (28)$$

Devido à (ii) e (ii), Y_q e W_η são limitados para todos os possíveis valores de $q, \dot{q}, \ddot{q}, \eta_{c2}, \eta_{b2}, V_{0b}^b$ e $\dot{V}_{0b}^b$. Além disso, Y_q também é limitado em relação à Π_g . Finalmente, é possível reescrever (26) utilizando $\tilde{\Pi}$:

$$\lambda(t) - \ddot{\eta}_{c2} = Z_\eta \tilde{\Pi}, \quad (29)$$

com o regressor $Z_\eta = [\widehat{J}_q \widehat{M}_{qq}^{-1} Y_q \quad -W_\eta]$, que também é limitado devido às limitações de Y_q e W_η . Portanto, $\|\tilde{\tau}_d\| \rightarrow 0$ se $\|\tilde{\Pi}\| \rightarrow 0$, e devido à (29), $\tilde{\eta}_{c2}$ tende à uma esfera de raio ρ , onde ρ é limitado por $\|\tilde{\Pi}\|$. $\square$

5 Identificação dos Eixos das Juntas

Como discutido anteriormente, incertezas nos parâmetros geométricos ($\widehat{\Pi}_g$) podem impactar a performance do sistema de maneira significativa, já que tais parâmetros são utilizados no cálculo do LOS desejado (21).

O procedimento de identificação é feito em terra, antes da instalação da ISP no navio. Portanto, é razoável supor que $\mathbf{E}_b \equiv \mathbf{E}_0$. Para obter a orientação da câmera em relação à $\mathbf{E}_0$, suponha que uma IMU encontra-se rigidamente acoplada ao último gimbal da ISP, onde $\mathbf{E}_s$ é seu sistema de referência correspondente. Além disso, R_{ij}^k representa a orientação de $\mathbf{E}_j$ relativa à $\mathbf{E}_i$, obtida no instante de tempo t_k . Então:

$$R_{0s}^k = R_{01}^k R_{12}^k R_{23}^k R_{3c} R_{cs} \quad (30)$$

onde R_{3c}, R_{cs} são constantes. Utilizando duas medidas distintas em t_k e t_{k+1} , definimos:

$$\begin{aligned} R^{k,k+1} &= R_{0s}^k (R_{0s}^{k+1})^T \\ &= R_{01}^k R_{12}^k R_{23}^k (R_{01}^{k+1} R_{12}^{k+1} R_{23}^{k+1})^T \end{aligned} \quad (31)$$

Utilizando (31), o seguinte procedimento de identificação é proposto:

1. Obtenha a orientação inicial R_{0s}^0 ;
2. Começando de $j = 1$, mantenha todas as outras juntas estacionárias e rotacione a j -ésima junta, obtendo uma nova medida R_{0s}^k ;

3. Repita o processo para a junta j até obter uma quantidade suficiente de dados;
4. Mova para a junta $j + 1$ e repita todo o processo.

Já que as juntas i ($i > j$) não se movem entre duas medidas consecutivas, começando de $j = 1$, (31) simplifica-se para:

$$R^{k,k+1} = [r_{mn}] = \exp(\mathbf{S}(h_1^b)(q_1^{k+1} - q_1^k)), \quad (32)$$

onde a única variável desconhecida é h_1^0 . Resolvendo para (32), obtém-se:

$$h_1^b = \frac{1}{2 \sin(q_1^{k+1} - q_1^k)} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Já que múltiplas medidas para cada junta foram tomadas, existem múltiplas estimativas para h_1^0 . Seja $H_1 \subset \mathbb{S}^2$ o conjunto (espaço amostral) contendo todas as k estimativas obtidas das equações (32) e (33), onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. As funções $\text{mean}(\cdot)$ e $\text{var}(\cdot)$ denotam a média e a variância do conjunto. A estimativa final $\hat{h}_1^0$ do eixo h_1^0 é dada por:

$$\hat{h}_1^0 = \text{mean} \left(\text{ball} \left(\text{mean}(H_1), \alpha \sqrt{\text{var}(H_1)} \right) \cap H_1 \right), \quad (34)$$

onde $\text{ball}(x, a)$ é uma esfera de raio a centrada em x e $\alpha > 0$. Basicamente, esta estimativa é a média das amostras $h \in H_1$ localizada suficientemente próxima à média de H_1 .

Para obter a estimativa $\hat{h}_2^1$ para h_2^1 , as matrizes R_{01}^k e R_{01}^{k+1} são calculadas usando $\hat{h}_1^0$, tal que (32) é modificada para:

$$R = (R_{01}^k)^T R^{k,k+1} R_{01}^{k+1} = \exp(\mathbf{S}(h_2^1)(q_2^{k+1} - q_2^k)), \quad (35)$$

e as equações (33) and (34) são utilizadas para obter a estimativa $\hat{h}_2^1$. O procedimento é repetido para obter $\hat{h}_3^2$.

Comentário 1 O algoritmo de identificação descrito nesta seção pode ser facilmente generalizado para um robô com $n > 0$ juntas rotacionais.

6 Resultados das Simulações

6.1 Identificação dos Eixos das Juntas

Seguindo o método descrito na Seção 5, a ISP é inicialmente posicionada em sua *home-position* ($q = [0 \ 0 \ 0]^T$), e cada junta é movida individualmente em passos de 10° , de -60° até 60° , como ilustrado em Fig. 2. Para emular uma IMU de baixa precisão instalada no último gimbal, um ruído branco de média zero e 1° de desvio padrão foi adicionado às medições de roll, pitch e yaw.

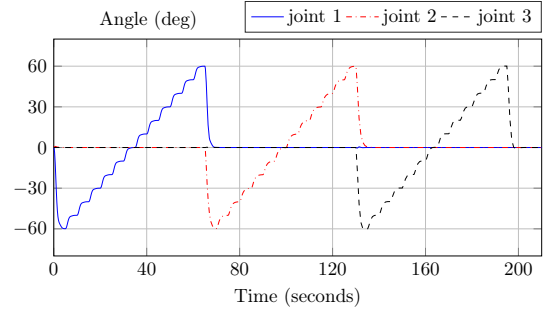


Figura 2: Ângulos das juntas durante o procedimento de identificação.

Sem nenhum conhecimento a priori sobre os vetores de eixos das juntas h_i^{i-1} , o algoritmo para identificação produz estimativas idênticas aos valores reais até a quarta casa decimal. Tal similaridade corresponde a um desvio menor que 0.01° em relação aos vetores reais. Note que, comparado à amplitude do ruído simulado para a IMU, a acurácia da identificação é notável. Os dados de identificação da primeira junta $h_1^b = z_0$ são mostrados na Fig. 3.

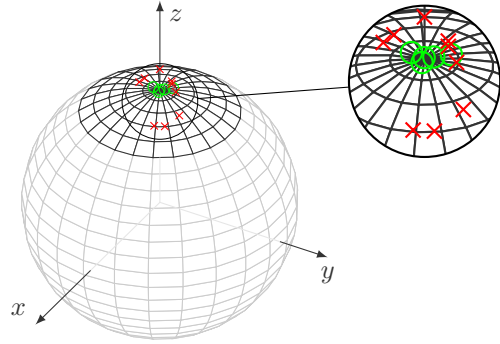


Figura 3: Ilustração do método de identificação aplicado à 1ª junta. Em vermelho, as amostras filtradas devido à sua distância relativa à média. Em verde, as amostras interiores à bola de raio $\alpha \text{var}(H_1)$ centrada na média. A esfera de raio 1 denota o conjunto $\mathbb{S}^2$ de vetores unitários do $\mathbb{R}^3$.

6.2 Controle para Estabilização e Rastreamento

O software de controle foi implementado no ambiente Rock de simulação em robótica, devido ao seu suporte nativo para aplicações em tempo real. Bibliotecas em C++ foram desenvolvidas para a implementação da estratégia de controle em cascata proposta em Seção 4, e o simulador Gazebo foi escolhido devido à sua representação confiável do mundo real e possibilidade de integração com o Rock (Watanabe et al., 2015). Além disso, uma interface de usuário personalizável foi desenvolvida, utilizando um visualizador baseado em Unity, ilustrado na Fig. 4.

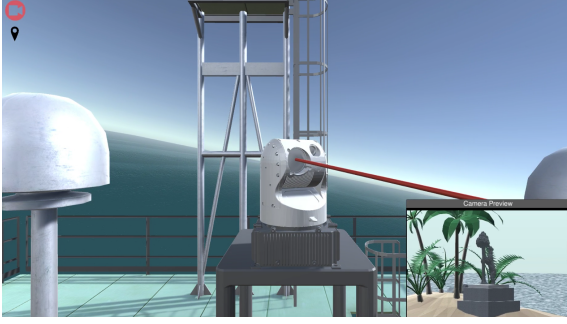


Figura 4: ISP rastreando um alvo na interface de usuário baseada em Unity. O controle proposto é executado através da integração Rock-Gazebo.

Para $\tilde{\Pi} = 0$ em (29), se as matrizes de ganho forem diagonais, as raízes das equações características devem ser apropriadamente escolhidas. O procedimento de ajuste dos ganhos consiste em escolher três raízes estáveis, uma delas suficientemente distante da origem e as outras duas sendo correspondentes aos polos de um polinômio característico de segunda ordem apropriado. O pólo distante foi escolhido em -10 rad/s , e o polinômio característico escolhido possui coef. de amortecimento igual 1.1 e frequência natural de 4 rad/s .

Em todas as simulações, o alvo permanece fixo em $p_{0t} = [100 \ 100 \ 0]^T$. Entretanto, as trajetórias de referência enviadas ao controlador são obtidas através das saídas p_{0t_f} , $\dot{p}_{0t_f}$ e $\ddot{p}_{0t_f}$ de um filtro linear de segunda ordem para $p_{0t}(t)$, ajustado para uma resposta sobre-amortecida com aproximadamente 5 segundos de tempo de assentamento e condição inicial em um ponto distante na direção de $x_c^c(0)$.

Os dados de movimento do veículo, representados pelas variáveis η_b , V_{0b}^b e $\dot{V}_{0b}^b$ foram obtidos através da simulação de um navio sujeito à ondas de espectro Jonswap com 200 harmônicos, 3 m de altura e 10 s de período agindo no eixo longitudinal do navio.

Os encoders e a INS foram simulados considerando efeitos de hardware como resolução, bias e ruído. Os encoders medem os ângulos das juntas q , através dos quais é possível *estimar* $\dot{q}$. A dinâmica eletromecânica dos motores e drivers, bem como atrito, não foram simulados. Porém, foi considerada uma saturação de $\pm 12.2 \text{ Nm}$ em cada motor.

A INS em configuração *indireta* mede as variáveis η_b , V_{0b}^b , $\dot{V}_{0b}^b$, com as quais é possível calcular uma estimativa das variáveis de interesse η_c , $\dot{\eta}_c$ e $\ddot{\eta}_c$ através do **Algoritmo 1**. Estas estimativas são usadas não apenas para calcular a referência correta de LOS, mas também na lei de controle externa em (23). Já que os encoders não são ideais e somente os eixos das juntas $\hat{h}_{i+1}^i$ são identificados, é esperado algum nível de bias nas estimativas de η_c , $\dot{\eta}_c$ e $\ddot{\eta}_c$.

Tabela 1: Parâmetros geométricos e dinâmicos, em unidades SI.

Parâmetro	$i = 1$			$i = 2$			$i = 3$		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z
p_{ii}^i	0.006	0.023	0.326	-0.094	0.006	0.059	0.336	0.006	-0.023
$p_{i-1,i}^{i-1}$	0.3	0	0	0	0	0.436	-0.254	0	0
I_i^i	2.42	0.58	1.93	1.12	0.92	0.88	0.54	0.93	0.86
m_i	18.9			21			26.5		

A Tabela 1 contém os parâmetros geométricos e dinâmicos usados nas simulações (considere $i = 0$ como $i = b$). Os eixos de junta *reais* são $h_1^b = z_0$, $h_2^1 = y_0$ e $h_3^2 = x_0$, os vetores de base canônicos do $\mathbb{R}^3$. Além disso, tem-se $p_{3c}^3 = [0.555 \ 0 \ 0.014]^T$, e o tensor de inércia representado em $\mathbf{E}_i$ pode ser calculado usando o *teorema dos eixos paralelos*, com $I_i^i = I_i^i - m_i (\hat{p}_{ii}^i)^2$. Estes parâmetros foram obtidos a partir do projeto mecânico de uma ISP de 3 eixos sendo atualmente desenvolvida através de uma colaboração entre diversos grupos, incluindo o laboratório de trabalho dos autores (LEAD/COPPE/UFRJ).

O erro de estimação nos eixos $\hat{h}_{i-1}^{i-1}$ está representado como uma matriz de rotação RPY R_{off} com $\alpha = 0.01^\circ$ de erro angular em cada junta. Para o controlador em cascata proposto, as matrizes e termos de (22) e (23) foram calculados pelos **Algoritmos 1 e 2**. Os valores dos parâmetros nominais usados no controle são dados pelos valores na Tabela 1 com algum erro percentual.

A Figura 5 mostra o resultado transitório e estacionário obtido para 20% de erro nos parâmetros dinâmicos Π_d , 50% de erro nas distâncias entre as juntas $p_{i-1,i}^{i-1}$ ($i = 1, 2, 3$) e um pequeno erro de 0.01° nos eixos, devido aos limites de precisão do algoritmo de identificação.

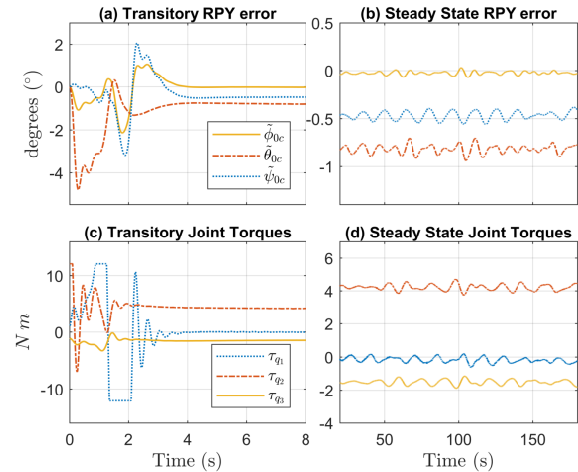


Figura 5: Resposta transitória e estacionária para o controlador proposto.

Na Fig. 5(a), note que o erro RPY inicial é zero, devido à trajetória de referência suave. Além disso, os torques nas juntas atingem a região de saturação durante o transiente, porém sem causar

queda de desempenho (Fig. 5(b)).

Os níveis de bias associados aos canais de pitch e yaw em Fig. 5(a) e (b) devem-se à incerteza em $p_{i-1,i}^{i-1}$ ($i = 1, 2, 3$) e ao ruído/bias dos sensores.

O nível de jitter na resposta estacionária é da ordem de 0.2° , mesmo para 20% de erro em Π_d , demonstrando a robustez o controlador proposto em relação ao cancelamento imperfeito da dinâmica em (22). Este é um resultado similar ao obtido em (Reis et al., 2018). Além disso, simulações adicionais demonstram que o jitter de fato *decrece* para incertezas menores em Π_g , como esperado devido ao **Teorema 1**.

A resposta estacionária para os torques nas juntas mantém-se limitada abaixo dos limites de saturação dos atuadores. Seu nível DC diferente de zero deve-se à presença de *desbalanceamento mecânico* na estrutura geométrica da ISP.

7 Conclusão

Neste trabalho, mostramos que um controlador por torque computado combinado a um simples PID é robusto a incertezas paramétricas. Idealmente, o controlador proposto garante estabilidade assintótica. Entretanto, na prática, a amplitude do erro é limitada a um pequeno conjunto residual, cuja norma cresce linearmente com o erro paramétrico. Resultados de simulação mostram que os erros em ângulos de RPY são limitados a um conjunto da ordem de 0.2° , mesmo sob 20% de erro nos parâmetros dinâmicos.

Como mostrado em (21), o cálculo da linha de visada é influenciado pelos parâmetros geométricos da ISP, especialmente pelos vetores de eixo das juntas. Já que esta incerteza muda a trajetória nominal, a mesma não pode ser compensada através do controle. Para reduzir este problema, um simples algoritmo de identificação foi proposto, baseado apenas nas propriedades geométricas da ISP. Os resultados das simulações mostram que, após a adição de ruído branco com 1° de desvio padrão para as medidas de orientação da câmera, este algoritmo foi capaz de identificar os vetores de eixo com um erro de 0.01° .

Referências

- Calanca, A., Capisani, L. M., Ferrara, A. e Magnani, L. (2011). MIMO closed loop identification of an industrial robot, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **19**(5): 1214–1224.
- Debruin, J. (2008). Control systems for mobile satcom antennas, *Control Systems, IEEE* **28**(1): 86–101.
- Fontanelli, G., Ficuciello, F., Villani, L. e Siciliano, B. (2017). Modelling and identification of the da vinci research kit robotic arms, *2017 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*.
- From, P. J., Gravdahl, J. T. e Pettersen, K. Y. (2014). *Vehicle-manipulator systems*, Springer.
- Hurák, Z. e Řezáč, M. (2009). Combined line-of-sight inertial stabilization and visual tracking: application to an airborne camera platform, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 8458–8463.
- Kazemy, A., Hosseini, S. A. e Farrokhi, M. (2007). Target-based line-of-sight stabilization in periscopes, *Mediterranean Conference on Control and Automation*.
- Kennedy, P. J. e Kennedy, R. L. (2003). Direct versus indirect line of sight (LOS) stabilization, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **11**(1): 3–15.
- Murray, R. M., Sastry, S. S. e Zexiang, L. (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*, 1st edn, CRC Press, Inc.
- Reis, M., Carvalho, G. P. S., Neves, A. F. e Peixoto, A. J. (2018). Dynamic model and line of sight control of a 3-dof inertial stabilization platform, *Proceedings of the IEEE American Control Conference*.
- Siciliano, B., Sciavicco, L. e Villani, L. (2009). *Robotics : Modelling, Planning and Control*, Advanced Textbooks in Control and Signal Processing, Springer, London. 013-81159.
- Skjelten, H., Gutvik, C. e Solberg, L. (2011). Ship based oil spill monitoring: A new integrated system for thickness evaluation and operational overview, *International Oil Spill Conference Proceedings (IOSC)*, Vol. 2011, American Petroleum Institute.
- Swevers, J., Verdonck, W. e De Schutter, J. (2007). Dynamic model identification for industrial robots, *IEEE Control Systems* **27**(5): 58–71.
- Watanabe, T., Neves, G., Cerqueira, R., Trocoli, T., Reis, M., Joyeux, S. e Albiez, J. (2015). The rock-gazebo integration and a real-time auv simulation, *Robotics Symposium (LARS) and 2015 3rd Brazilian Symposium on Robotics (LARS-SBR), 2015 12th Latin American*, IEEE, pp. 132–138.
- Wu, W., Zhu, S., Wang, X. e Liu, H. (2012). Closed-loop dynamic parameter identification of robot manipulators using modified fourier series, *International Journal of Advanced Robotic Systems* **9**(1): 29.