PROCEDIMENTO PARA O CÁLCULO DE NORMAS $\mathcal{H}_2$ E $\mathcal{H}_\infty$ EM SISTEMAS NÃO LINEARES COM SALTOS MARKOVIANOS

Gabriela W. Gabriel* José C. Geromel*

*Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação / UNICAMP, Campinas, SP, Brasil

Email: ggabriel@dca.fee.unicamp.br, geromel@dsce.fee.unicamp.br

Resumo— This paper is devoted to analyze stability of state feedback sampled-data control of Markov jump nonlinear systems subjeted to additive noise at the same time a guaranteed cost is assured to the $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norms. For this purpose, the hybrid system theory is one of the keys to embed the discontinuities imposed by the control law in the system formulation. In view of this new formulation, the problems associated to the $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ norm evaluation are defined. Their solutions are discussed under the perspective of Bellman's Principle of Optimality. The main contribution of this paper is the proposition of a numerical method to (approximately) solve these problems as the first step to address the optimal control problems applied to sampled-data control of Markov jump nonlinear systems. An example illustrates the proposed theory.

Palavras-chave— Sampled-data Control, Nonlinear Systems, Markov Processes, Hybrid Systems, Optimal Control.

Resumo— Este artigo tem como objetivo analisar a estabilidade dos sistemas não lineares sujeitos a saltos markovianos sob os quais incidem uma lei de controle amostrado por realimentação de estados e ruído do tipo aditivo ao mesmo tempo em que um custo garantido é assegurado para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Para isso, a teoria dos sistemas híbridos é uma das ferramentas chaves para incorporar as descontinuidades impostas pela lei de controle à formulação do problema. Em vista desta nova formulação, os problemas associados ao cálculo das normas de interesse $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são definidos. Suas soluções são discutidas sob a perspectiva do Princípio de Otimalidade de Bellman. A principal contribuição deste artigo é a proposição de um método numérico que permite resolver (aproximadamente) tais problemas como um primeiro passo para o projeto de controle amostrado ótimo aplicado a sistemas não lineares com saltos markovianos. Um exemplo ilustra a teoria proposta.

Palavras-chave— Controle Amostrado, Sistemas Não Lineares, Processos Markovianos, Sistemas Híbridos, Controle Ótimo.

1 Introdução

Nas teorias de controle clássica e moderna, o estudo dos sistemas não lineares sempre foi um desafio. Uma das principais razões para este fato é a elevada complexidade matemática para lidar com esta classe de sistemas no que se refere à sua generalidade e às limitações das ferramentas matemáticas disponíveis atualmente que permitam analisar, ou mesmo resolver, tais problemas. Por outro lado, para os sistemas lineares e invariantes no tempo, muitas técnicas clássicas e modernas de análise de estabilidade e projetos de controladores estão disponíveis e bem sedimentadas na literatura (como apresentadas em Franklin et al. (2015), dentre outras excelentes referências). A medida que não linearidades conhecidas e bem caracterizadas são introduzidas nos sistemas lineares, novas técnicas são estudadas, entendidas e utilizadas. Um exemplo é o caso dos sistemas lineares com saltos markovianos (MJLS, do inglês *Markov Jump Linear Systems*) em que o estado atual da cadeia de Markov é conhecida. Neste contexto, inserem-se os livros Costa et al. (2005), Costa et al. (2013) e suas referências.

Outro exemplo de não linearidades que têm sido alvo de muitas pesquisas nas últimas décadas são os sistemas originalmente contínuos controlados através de equipamentos digitais. Uma das principais dificuldades matemáticas ao se tratar tais sistemas são as não linearidades exponenciais introduzidas no processo de discretização destes sistemas, como referência para esta técnica clássica, ver Chen e Francis (1995) e suas referências. Além desta, outras técnicas foram propostas como a de *lifting*, ver Tan e Grigoriadis (2000), a de *input-delay*, ver Fridman et al. (2004), e a abordagem de sistemas híbridos, ver Goebel et al. (2009). Em especial, esta última permite a coexistência de sinais contínuos e discretos na planta evitando as não linearidades exponenciais e, por isso, tem se mostrado bastante adequada para descrever e tratar os sistemas com controle amostrado. A redução desta complexidade matemática possibilitou avançar a teoria de análise de estabilidade, cálculo de índices de desempenho e projeto de controladores inclusive em sistemas complexos como os MJLS, como pode ser visto em Gabriel (2016) e Gabriel et al. (2018).

Seguindo esta abordagem, em Gabriel e Geromel (2016) é mostrado o desenvolvimento teórico do cálculo exato de determinado índices de desempenho, baseado na resolução de um problema de duas condições de contorno (TPBVP, do inglês *Two-Point Boundary Value Problem*) composto por equações de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJBE, do inglês *Hamilton-Jacobi-Bellman Equation*) aplicado a sistemas não-lineares. A resolução numérica destes problemas, no entanto, recai na solução de equações diferenciais bastante complexas do ponto de vista analítico. Recentemente, o artigo Gabriel et al. (2018) apresenta, sob o ponto de vista numérico, uma possibilidade de resolver problemas similares através de problemas de otimização convexas. Tendo em vista esta nova perspectiva, este artigo tem como objetivo ir além do que foi proposto em Gabriel e Geromel (2016) apresentando um procedimento numérico para o cálculo (aproximado) de índices de desempenho do tipo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ em sistemas não lineares sujeitos a ruídos do tipo aditivo, a exemplo do que foi realizado em Gabriel et al. (2018). A resolução do problema proposto em Gabriel e Geromel (2016) recai na resolução de equações diferenciais parciais, cuja solução numérica é bem conhecida. Uma discussão a respeito deste tópico pode ser encontrada em Smears (2011). No entanto, este artigo propõe a sua solução através de um problema de otimização convexa cuja principal motivação é a evolução futura para o projeto de controladores ótimos aplicados a sistemas não lineares.

A notação utilizada é padrão. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{K}$ denotam, respectivamente, os conjuntos dos números naturais, reais, reais não negativos e dos N primeiros números naturais, $\mathbb{K} = \{1, 2 \cdots, N\}$. Para matrizes ou vetores reais, $(')$ indica a transposta. Para qualquer matriz simétrica, $X > 0$ ($X \geq 0$) indica que ela é (semi-)definida positiva. O operador esperança matemática é denotado por $\mathcal{E}(\cdot)$, a esperança condicional por $\mathcal{E}^\nu\{\cdot\} = \mathcal{E}\{(\cdot) \mid \nu\}$ e $\mathbb{P}(\cdot)$ indica a probabilidade de $(\cdot)$. Para um sinal contínuo qualquer $w \in \mathbb{R}^r$, a norma de sua trajetória para todo $t \in \mathbb{R}^+$ é $\|w\|_2^2 = \int_0^\infty \mathcal{E}\{w(t)'w(t)\}dt$ e $\mathcal{L}_2$ define o conjunto de sinais contínuos tais que sua norma é finita. Sempre que possível e quando não interferir na compreensão do texto, utilizar-se-á a notação simplificada $f(t) = f$. Além disso, $f(t_k^-)$, $t_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, indica o limite à esquerda de $f(t)$ quando $t \to t_k$. Para um sistema $\mathcal{S}$, $\|\mathcal{S}\|_2$ indica sua norma $\mathcal{H}_2$ e $\|\mathcal{S}\|_\infty$, sua norma $\mathcal{H}_\infty$, como usualmente definido para os sistemas estocásticos. O conjunto de matrizes U_i, $i \in \mathbb{K}$, é abreviado para $U = (U_1, U_2, \cdots, U_N)$ e $U > 0$ (≥ 0) indica que $U_i > 0$ (≥ 0), $\forall i \in \mathbb{K}$.

2 Sistemas híbridos de controle

Primeiramente, considere um sistema dinâmico contínuo em sua representação no espaço de estados definida por

$$\dot{x}(t) = f_{\theta(t)}(x(t), u(t)) + E_{\theta(t)}w(t) \tag{1}$$

$$z(t) = g_{\theta(t)}(x(t), u(t)) \tag{2}$$

evoluindo a partir de $x(0) = x_0$, em que assume-se que $f_i(0, 0) = 0$ e $g_i(0, 0) = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Além disso, para o conjunto de entradas a serem consideradas, assume-se que a solução de (1) existe e é unicamente definida. Para este sistema, $x(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ é o estado, $u(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^m$ é o controle e $w(\cdot) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^r$ é uma entrada exógena contínua definida na classe de sinais $\mathcal{L}_2$ tal que $0 = w \in \mathcal{L}_2$. Além disso, $\theta(t) \in \mathbb{K}$ é uma variável aleatória governada por um processo markoviano a tempo contínuo caracterizado por uma condição inicial $\theta(0) = \theta_0$ tal que $\mathcal{P}(\theta_0 = i) = \pi_{i0} \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, que satisfaz $\sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} = 1$. A matriz de taxa de transição $\{\lambda_{ij}\} = \Lambda \in \mathbb{R}^{N \times N}$ define as probabilidades de transição,

$$\mathcal{P}(\theta(t+h) = j | \theta(t) = i) = \delta_{i-j} + \lambda_{ij}h + o(h), \tag{3}$$

onde δ_{i-j} é a função delta de Kronecker, ou seja, $\delta_{i-j} = 1$, se $i = j \in \mathbb{K}$, e $\delta_{i-j} = 0$, caso contrário, e $\lim_{h \to 0^+} o(h)/h = 0$. Os elementos de Λ são tais que $\lambda_{ij} \geq 0$, $\forall i \neq j$, e $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Para o sistema acima, define-se o conjunto das entradas de controle admissíveis como $U = \{u \in \mathbb{R}^m \times [0, +\infty) : u(t) = u(t_k), \forall t \in [t_k, t_{k+1}),\ \forall k \in \mathbb{N}\}$, que corresponde ao conjunto de leis de controle constantes por partes, definidos para cada instante t_k, $k \in \mathbb{N}$, conforme

$$u(t_k) = \mu_{\theta(t_k)}(x(t_k)), \tag{4}$$

onde a sequência discreta de tempos de amostragem é definida por $\{t_k\}_{k=0}^\infty$, tal que $t_0 = 0$ e $t_{k+1} - t_k = T > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, ou seja, os instantes de amostragem são igualmente espaçados e independentes do processo markoviano.

Para o sistema (1)–(2) sujeito à lei de controle (4), define-se ainda a variável estendida $\xi' = [x'\ u']$, para a qual escreve-se as funções

$$F_\theta(\xi) + J_\theta w = \begin{bmatrix} f_\theta(x, u) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{c\theta} \\ 0 \end{bmatrix} w_c, \tag{5}$$

$$G_\theta(\xi) = g_\theta(x, u), \tag{6}$$

$$H_\theta(\xi) = \begin{bmatrix} x \\ \mu_\theta(x) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Assim, a exemplo do que foi realizado em Gabriel e Geromel (2016), pode-se reescrever o sistema (1)–(2) sujeito ao controle (4) como um sistema híbrido S totalmente equivalente conforme

$$\dot{\xi}(t) = F_{\theta(t)}(\xi(t)) + J_{\theta(t)}w(t), \tag{8}$$

$$z(t) = G_{\theta(t)}(\xi(t)), \tag{9}$$

$$\xi(t_k) = H_{\theta(t_k^-)}(\xi(t_k^-)), \tag{10}$$

o qual evolui a partir de $\xi(0^-) = \xi_0$ e $\theta(0^-) = \theta(0) = \theta_0$ com probabilidade um, em decorrência da definição (3). De fato, (8) em conjunto com (10) definem a equação dinâmica do sistema (1) e a lei de controle constante por partes (4). A equação (9) é uma releitura da equação (2) na nova variável estendida. Nota-se que a equação (10) reflete a continuidade do estado x bem como a descontinuidade imposta na lei de controle, através da função $\mu_\theta(x)$.

O objetivo é calcular o valor da função $\rho_\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^+$ associada ao cálculo das normas de interesse $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ definida por

$$\rho_\gamma(\xi(0)) = \sup_{w \in \mathcal{L}_2} \|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2, \tag{11}$$

onde z e ξ são definidos através do sistema S e $\xi(0) = H_{\theta_0}(\xi_0)$, ξ_0 escolhido a priori. Uma vez definido (11), as normas de interesse passam a ser descritas em função de $\rho_\gamma(\xi(0))$. De fato, a norma $\mathcal{H}_\infty$, seguindo a definição usual conforme utilizada em Costa et al. (2013), é obtida resolvendo-se o problema de otimização

$$\inf_{\gamma} \left\{ \gamma^2 : \rho_\gamma(0) \leq 0 \right\}, \tag{12}$$

onde foi adotado $\xi_0 = 0$. Por outro lado, para $\xi(0) = H_{\theta_0}(\xi_0)$ e $\xi_0 \neq 0$, $\rho_\infty(\xi(0)) = \|z\|_2^2$ é obtido fazendo-se $\gamma = +\infty$, para o qual (11) implica em $w^* \equiv 0$. Neste caso, calcula-se

$$\|\mathcal{S}\|_2^2 = \rho_\infty(\xi(0)), \tag{13}$$

que fornece o valor da norma $\mathcal{H}_2$ conforme é usualmente definida para os sistemas estocásticos, ver Costa et al. (2013). Em Gabriel e Geromel (2016), é apresentado o resultado teórico para o cálculo de norma em sistemas não lineares com saltos markovianos sujeitos a uma lei de controle amostrado por realimentação de estados. Porém, não há na literatura, procedimento numérico baseado em problemas de otimização convexa que permitam o cálculo destas normas. Neste sentido, a próxima seção retoma o resultado de Gabriel e Geromel (2016) sob a ótica das normas de interesse quando considerados ruídos externos aditivos para, na sequência, apresentar um procedimento numérico baseado em hipóteses factíveis para o seu cálculo (aproximado).

3 Cálculo das Normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Conforme dito anteriormente, em vista desta classe de problemas, uma dificuldade imediata para o cálculo das normas (12) e (13) corresponde aos saltos que ocorrem na lei de controle nos instantes de amostragem, o que causa uma descontinuidade na função $\mu_{\theta(t)}(x(t))$, em $t = t_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Utilizando-se a abordagem híbrida recém definida em conjunto com o Princípio de Otimalidade de Bellman (ver Bellman (1954)), observa-se que as descontinuidades provocadas pelo processo de amostragem do sinal são automaticamente incorporadas ao problema. De fato, considere o conjunto de funcionais $V_i(\xi, t) \; : \; \mathbb{R}^{n+m} \times [t_k, t_{k+1}) \to \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \mathbb{K}$, e solução de

$$V_i(\xi_k, t_k) \geq \sup_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{E}^{i,\xi_k} \Big\{ V_{\theta(t_{k+1}^-)}(\xi(t_{k+1}^-), t_{k+1}^-) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{ G_\theta(\xi)' G_\theta(\xi) - \gamma^2 w' w \} d\tau \Big\}, \tag{14}$$

onde $\xi(t_k) = \xi_k$ e $\theta(t_k) = i \in \mathbb{K}$. Considerando-se as hipóteses usuais de continuidade, o funcional $V_i(\xi_k, t_k)$ é o custo entre os instantes t_k e $+\infty$ para o modo $i \in \mathbb{K}$. Suponha a existência de funções definidas positivas e invariantes no tempo $v_i(\xi) : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^+$, $i \in \mathbb{K}$, tais que os custos finais (que incluem as descontinuidades impostas por (10)) satisfazem $V_{\theta(t_{k+1}^-)}(\xi(t_{k+1}^-), t_{k+1}^-) = v_{\theta(t_{k+1})}(\xi_{k+1})$ com probabilidade um e, quando consideradas em (14), produzem as condições iniciais $V_i(\xi_k, t_k) = v_i(\xi_k)$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Se o conjunto de funções $v_i(\cdot)$ existir, $\forall i \in \mathbb{K}$, então o Princípio da Otimalidade de Bellman se verifica para o sistema híbrido $\mathcal{S}$. Neste caso, para $w = 0 \in \mathcal{L}_2$,

$$\begin{aligned} v_i(\xi_k) & \\ &\geq \mathcal{E}^{i,\xi_k} \Big\{ \int_{t_k}^{t_{k+1}} G_\theta(\xi)' G_\theta(\xi) d\tau + v_{\theta(t_{k+1})}(\xi_{k+1}) \Big\} \\ &> \mathcal{E}^{i,\xi_k} \Big\{ v_{\theta(t_{k+1})}(\xi_{k+1}) \Big\} \end{aligned} \tag{15}$$

onde $\xi(t_k) = \xi_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. A consequência imediata deste fato é que o sistema é estável em média quadrática. Além disso, cada porção do custo, para cada $k \in \mathbb{N}$, é limitada e pode ser calculada como em (15). Assim, o custo ótimo associado ao ruído de pior caso $w^* \in \mathcal{L}_2$ é dado por

$$\begin{aligned} \rho_\gamma(\xi(0)) & \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{E} \left\{ v_{\theta(t_k)}(\xi_k) - \mathcal{E}^{i,\xi_k} \Big\{ v_{\theta(t_{k+1})}(\xi_{k+1}) \Big\} \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ v_{\theta_0}(\xi(0)) \right\} = \sum_{i \in \mathbb{K}} \pi_{i0} v_i(H_i(\xi_0)). \end{aligned} \tag{16}$$

A partir de (16), pode-se concluir que o valor de $\rho_\gamma(\cdot)$ pode ser exatamente calculado quando o limitante superior definido pelo sinal de desigualdade atinge o seu valor mínimo. Este resultado é apresentado em Gabriel e Geromel (2016).

O problema de cálculo de norma visto sob esta perspectiva, permite expandir a análise do problema de cálculo de norma sob o ponto de vista de projeto de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. Temas a serem abordados em pesquisas futuras. Por enquanto, apresentamos os resultados teóricos que nos permitem efetivamente (e aproximadamente) calcular as normas de interesse $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ recém definidas sob esta nova ótica.

Teorema 1 (Gabriel e Geromel (2016)) *Considere um período de amostragem constante $T > 0$. Se existirem funções definidas positivas $v_i(\xi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, $\forall i \in \mathbb{K}$, tais que as funções $V_i(\xi, t)$ satisfaçam*

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \Big\{ \frac{\partial V_i}{\partial \xi}' (F_i(\xi) + J_i w) - \gamma^2 w' w \Big\} + \frac{\partial V_i}{\partial t} + G_i(\xi)' G_i(\xi) \leq -\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_{ij} V_j, \tag{17}$$

$\forall i \in \mathbb{K}$, sujeitas às condições de contorno

$$V_i(\xi, 0) \leq v_i(\xi), \; V_i(\xi, T) \geq v_i(H_i(\xi)), \tag{18}$$

então o sistema híbrido $\mathcal{S}$ é estável em média quadrática e a função $\rho_\gamma(\xi(0))$ satisfaz (16).

Prova: A prova é decorrência imediata de Gabriel e Geromel (2016) quando considerado o sistema híbrido (8)–(10) e notando-se que uma solução de (17) é também solução de (14). □

A partir do Teorema 1, duas observações são importantes. A primeira delas é que o ruído de pior caso pode facilmente ser calculado como $w^* = \frac{1}{2}\gamma^{-2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \xi}' J_\theta$. Neste caso, o supremo descrito em (17) equivale a $\frac{1}{4}\gamma^{-2}\frac{\partial V_i}{\partial \xi}' J_i J_i' \frac{\partial V_i}{\partial \xi}$, $\forall i \in \mathbb{K}$, o que leva, em conjunto com as condições de contorno (18) definidas na igualdade, ao valor exato da função $\rho_\gamma(\cdot)$ através (16). A segunda é que as condições apresentadas no Teorema 1 são importantes quando analisadas sob um ponto de vista numérico uma vez que elas parametrizam todas as soluções que fornecem um limitante superior para os custos ótimos (12)–(13) considerando o contexto dos sistemas não lineares com saltos markovianos. Nota-se, porém, que o problema definido pelo Teorema 1 é de difícil solução sendo necessária uma estratégia específica para cada sistema em análise. No entanto, para um conjunto particular de soluções $V_i(\xi, t)$, $i \in \mathbb{K}$, embora a desigualdade (17) não mais se verifique na igualdade, um limitante superior ainda pode ser calculado para o caso dos sistemas não lineares. A próxima seção apresenta a principal contribuição deste artigo que corresponde a um procedimento numérico e convexo para o cálculo dos valores das normas definidas por (12) e (13).

4 Limitantes Superiores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$

Dado $T > 0$, resolver o problema definido pelo Teorema 1 implica em resolver uma equação diferencial parcial. A principal contribuição deste artigo é apresentar uma formulação alternativa para este problema, a qual pode facilmente ser resolvida através de ferramentas de otimização convexa. Para isso, considere um conjunto de funcionais de custo na forma $V_i(\xi, t) = \xi' X_i(t)\xi$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Neste caso, a desigualdade (14) continua sendo verificada, porém, embora a estabilidade continue sendo verificada através de (15), somente um custo garantido para a função $\rho_\gamma(\xi(0))$, no contexto dos sistemas não lineares, pode ser calculado através de (16). O teorema abaixo apresenta este resultado, no qual a desigualdade estrita foi utilizada em (17) e (18), sem perda de generalidade.

Teorema 2 *Sejam $T > 0$ e $\gamma > 0$ dados. Se existir um conjunto de funções matriciais definidas positivas $X_i(t) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$, definida para todo $t \in [0, T)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, para as quais*

$$\begin{bmatrix} \Xi_i(\xi, X_i) & G_i(\xi)' & \xi' X_i J_i \\ \bullet & -I & 0 \\ \bullet & \bullet & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{19}$$

$$\xi' X_i(T)\xi - H_i(\xi)' X_i(0) H_i(\xi) > 0, \tag{20}$$

onde

$$\Xi_i(\xi, X_i) = \tag{21}$$

$$\xi' X_i F_i(\xi) + F_i(\xi) X_i \xi + \xi' \left(\dot{X}_i + \sum_{j\in\mathbb{K}} \lambda_{ij} X_j \right) \xi,$$

se verificam para todo $i \in \mathbb{K}$, então o sistema $\mathcal{S}$ é estável em média quadrática e um limitante superior para a função $\rho_\gamma(\xi(0))$ é dado por (16).

Prova: Dado que (19) é verdadeira, aplicando-se o complemento de Schur em seus elementos $(2, 2)$ e $(3, 3)$, obtém-se a mesma desigualdade de (17) quando considerados $V_i(\xi, t) = \xi' X_i(t)\xi$, $\forall i \in \mathbb{K}$, e o cálculo do supremo como na seção anterior. Além disso, (20) em conjunto com $X(0) > 0$, satisfazem as condições de contorno (18), para $v_i(\xi) = \xi' X(0)\xi$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Neste caso, o conjunto de funções $V_i(\xi, t)$ e $v_i(\xi)$ recém definidas satisfaz as condições de necessidade do Teorema 1. A escolha particular de $V_i(\xi, t)$ faz com que somente um limitante superior para o valor da função $\rho_\gamma(\xi(0))$ se verifique para o caso não linear, completando assim a prova. □

A respeito do Teorema 2, é importante observar que, no caso dos sistemas lineares com saltos markovianos, tanto no contexto clássico quanto de controle amostrado, a solução de (17) de fato é uma forma quadrática, como bem conhecido na literatura, ver Costa et al. (2013) e Gabriel et al. (2018). Neste caso, o Teorema 2 fornece o valor exato da função $\rho_\gamma(\xi(0))$. Para o caso dos sistemas não lineares, a partir do Teorema 2, é possível estabelecer uma formulação convexa que verifique a estabilidade do sistema híbrido $\mathcal{S}$ ao mesmo tempo em que os limitantes superiores para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ são calculadas. Estes resultados são apresentados pelos próximos corolários.

Corolário 3 (Cálculo da Norma $\mathcal{H}_\infty$) *Seja $T > 0$ dado. O sistema $\mathcal{S}$ é estável em média quadrática e $\|\mathcal{H}\|_\infty \leq \gamma$ é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_\infty$ associada a $\mathcal{S}$, se o problema*

$$\inf_{\gamma,\ X(t)>0} \left\{ \gamma^2 \ : \ (19) - (20) \right\}, \tag{22}$$

$\forall i \in \mathbb{K}$, for factível com $X_i(t) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ uma função matricial em $t \in [0, T)$, $\forall i \in \mathbb{K}$.

Prova: Observe que no contexto de cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ tem-se $\xi_0 = 0$, que equivale a fazer $\rho_\gamma(0) \leq 0$, onde $\rho_\gamma(\cdot)$ é definido segundo (11) com $X(t)$ calculado segundo (19)–(20). Assim, este corolário é uma consequência imediata de (12) e do Teorema 2. □

Corolário 4 (Cálculo da Norma $\mathcal{H}_2$) *Seja $T > 0$ dado. O sistema $\mathcal{S}$ é estável em média quadrática e $\|\mathcal{S}\|_2^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{K}} \pi_{i0} H_i(\xi_0)' X_i(0) H_i(\xi_0)$*

é um limitante superior para a norma $\mathcal{H}_2$ associada a $\mathcal{S}$, se o problema

$$\inf_{X(t)>0} \sum_{i\in\mathbb{K}} \pi_{i0} H_i(\xi_0)' X_i(0) H_i(\xi_0) \qquad (23)$$

sujeito a (19)*, eliminando-se a última linha e a última coluna, e a* (20)*,* $\forall i \in \mathbb{K}$*, for factível com* $X_i(t) \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ *uma função matricial em* $t \in [0, T)$*,* $\forall i \in \mathbb{K}$*.*

Prova: A prova é similar à prova do Corolário 3, em que o valor do limitante superior da norma é dado por (16) com $\rho_\gamma(\xi(0))$ definido conforme (11) para $\xi_0 \neq 0$ e $\gamma = +\infty$. Neste caso, $\gamma = +\infty$ equivale a fazer (17), para $i \in \mathbb{K}$, conforme

$$\frac{\partial V_i}{\partial \xi}' F_i(\xi) + \frac{\partial V_i}{\partial t} + G_i(\xi)' G_i(\xi) \leq -\sum_{j\in\mathbb{K}} \lambda_{ij} V_j. \quad (24)$$

Esta condição corresponde a excluir a terceira linha e terceira coluna de (19). □

O TPBVP definido pelo Teorema 1 deve ser resolvido no domínio $\mathcal{X} \times [0, T)$, com $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{(n+m)}$. Do ponto de vista numérico, os valores das funções $F_i(\xi)$, $G_i(\xi)$ e $H_i(\xi)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, são conhecidos uma vez que um conjunto de pontos $\xi \in \mathcal{X}$, suficientemente grande, for definido a priori. Além disso, como uma solução numérica deve ser encontrada, basta que sejam considerados n_P pontos em $\xi \in \mathcal{X}$. A próxima seção ilustra a teoria apresentada utilizando para isso um sistema de um pêndulo simples, que corresponde a uma planta não linear. Neste exemplo, foi gerado um região cúbica $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^3$ contendo n_P pontos, tal que, no caso $\mathcal{H}_2$, os pontos ξ_0 e $H(\xi_0)$ estejam contidos em $\mathcal{X}$.

5 Solução Numérica e Exemplo

A estrutura definida para as funções custo $V_i(\xi, t)$, $i \in \mathbb{K}$, implicam em uma equação diferencial nas funções $X_i(t)$, $i \in \mathbb{K}$, definidas pelos problemas (22) e (23). Para isso, o método apresentado em Gabriel et al. (2018) é adequado e de fácil aplicação. Assim, considere funções matriciais $X(t)$ lineares por partes, $\forall t \in [t_p, t_{p+1}]$, na forma

$$X_i(t) = X_{ip} + (X_{i(p+1)} - X_{ip})\left(\frac{t - t_p}{\eta}\right), \quad (25)$$

onde $p = 0, \cdots, n_T - 1$, com $X_{ip} > 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e todo $p = 0, \cdots, n_T$. Segmentando-se o intervalo $[0, T]$ em n_T segmentos de reta de comprimento $\delta = T/n_T$, para que a desigualdade (19) se verifique em todo o intervalo, basta que (19) seja verificada em todo segmento de reta, no início e no fim de cada intervalo $[t_p, t_{p+1}]$, onde $t_p = p\delta$ e $p = 0, 1, \cdots, n_T - 1$.

Para ilustração, considere a equação dinâmica de um pêndulo simples inextensível dada por

$$\ddot{\alpha} + (g/l)\sin(\alpha) = u\cos(\alpha). \qquad (26)$$

onde o parâmetro $g/l \in \{1, 4\}$ varia de acordo com uma cadeia de Markov, $g = 9.8m/s^2$ é a aceleração da gravidade, l é o comprimento do pêndulo e α é o seu deslocamento angular medido a partir da vertical. O controle u é uma força externa horizontal aplicada na sua extremidade. Fazendo-se $\xi' = [\xi_1\ \xi_2\ \xi_3] = [\alpha\ \dot{\alpha}\ u]$, reescreve-se o sistema em sua formulação híbrida, onde

$$F_i(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3\cos(\xi_1) - (g/l)_i \sin(\xi_1) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_i(\xi)' = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_i & 0 \end{bmatrix} \xi, \; G_i(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi,$$

$\forall i \in \mathbb{K}$, com $g/l \in \{1, 4\}$ definindo os dois modos da cadeia de Markov, $\mathbb{K} = \{1, 2\}$. A matriz de taxa de transição Λ e as matrizes de ganho L_1 e L_2 são dadas por

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}, \; \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1791 & -0.5561 \\ -0.2972 & -0.8691 \end{bmatrix}.$$

A probabilidade inicial é $\pi_0 = [1\ 0]'$ e o período de amostragem $T = 250$ ms. Utilizando $n_T = 4$ e $n_P \in \{8, 64, 512\}$, os resultados decorrentes dos Corolários 3 e 4, referentes ao cálculo dos limitantes superiores para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, respectivamente, estão apresentado na Tabela 1 para duas condições inicias diferentes para a norma $\mathcal{H}_2$ e duas matrizes J_i distintas, para a norma $\mathcal{H}_\infty$. Por outro lado, nota-se que uma aproximação linear para o sistema definido por (26) pode ser obtida utilizando-se as matrizes

$$F_1(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi, \; F_2(\xi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi,$$

válidas para pequenos ângulos α. Aplicando-se os resultados dos Corolários 3 e 4 na aproximação linear de (26), os valores obtidos para as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ estão descritos na Tabela 2, para as mesmas condições anteriores. Neste caso, pode-se observar que, para a quantidade de pontos selecionada, o algoritmo proposto para os sistemas não lineares fornece apenas um limitante superior para as normas de interesse, uma vez que os valores da Tabela 1 são, em todos os casos, superiores aos apresentados na Tabela 2. Além disso, de acordo com os dados destas tabelas, pode-se observar que quanto maior o ângulo inicial, mais distantes estão os resultados do sistemas não linear e de sua aproximação linear, o que condiz com o fato desta última ser válida somente para pequenos valores do ângulo α.

Nota-se que o esforço computacional para resolver os problemas propostos cresce com a dimensão de $\mathbb{R}^{n+m}$. Por fim, é importante observar que as condições iniciais (traduzidas pelas matrizes J_i, $i \in \mathbb{K}$) devem capturar todas as componentes das

Tabela 1: Resultados para a planta não linear.

		$n_P = 8$	$n_P = 64$	$n_P = 512$
$\|\mathcal{S}\|_2^2$	$\xi_0 = [\pi/6\ \pi/6\ 0]'$	4.43	3.08	2.74
	$\xi_0 = [\pi/15\ \pi/15\ 0]'$	0.17	0.15	0.15
$\|\mathcal{S}\|_\infty$	$J_i = [\pi/6\ \pi/6\ 0]'$	9.12	6.43	5.58
	$J_i = [\pi/15\ \pi/15\ 0]'$	0.92	0.79	0.76

Tabela 2: Resultados para a aproximação linear.

		$n_P = 8$	$n_P = 64$	$n_P = 512$
$\|\mathcal{S}\|_2^2$	$\xi_0 = [\pi/6\ \pi/6\ 0]'$	1.02	0.87	0.83
	$\xi_0 = [\pi/15\ \pi/15\ 0]'$	0.16	0.14	0.13
$\|\mathcal{S}\|_\infty$	$J_i = [\pi/6\ \pi/6\ 0]'$	2.04	1.76	1.68
	$J_i = [\pi/15\ \pi/15\ 0]'$	0.82	0.71	0.68

variáveis de interesse $X_i(T)$, $\forall i \in \mathbb{K}$, como é usual nos problemas de otimização $\mathcal{H}_2$, uma vez que a resolução destes sistemas não lineares requer que uma grande quantidade de restrições sejam verificadas simultaneamente, o que pode implicar em valores elevados nas componentes não capturadas pelas condições iniciais.

6 Conclusões

Este artigo propõe um procedimento numérico para o cálculo das normas de interesse $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ associado aos sistemas não lineares com saltos markovianos sujeitos a leis de controle amostrado e ruídos do tipo aditivo. Este cálculo é realizado através da função $\rho_\gamma(\cdot)$ definida de forma única para os dois problema. No caso não linear apenas um limitante superior pode ser calculado, ainda assim sua importância encontra-se no fato de que esta função é essencial para a resolução de problemas de controle baseados nestas normas, Gabriel et al. (2018). O projeto de controladores $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ é deixado para pesquisas futuras.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e à FAPESP por possibilitarem o desenvolvimento deste projeto de pesquisa através dos processos No. 303887/2014-1 e No. 2016/06343-5, respectivamente.

Referências

Bellman, R. (1954). Dynamic programming and a new formalism in the calculus of variations, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **40**: 231–235.

Chen, T. e Francis, B. A. (1995). *Optimal Sampled-Data Control Systems*, Springer-Verlag, London, UK.

Colaneri, P., Geromel, J. C. e Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: An RH_2 / RH_∞ Viewpoint*, Academic Press, London, UK.

Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Marques, R. P. (2005). *Discrete-time Markov Jump Linear Systems, Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, London, UK.

Costa, O. L. V., Fragoso, M. D. e Todorov, M. G. (2013). *Continuous-time Markov Jump Linear Systems, Probability and Its Applications*, Springer-Verlag, Berlim, DE.

Franklin, G. F., Powell, J. D. e Emami-Naeini, A. (2015). *Feedback Control Of Dynamic Systems*, Pearson, USA.

Fridman, E., Seuret, A. e Richard, J.-P. (2004). Robust sampled-data stabilization of linear systems - an input delay approach, *Automatica* **40**: 1441–1446.

Gabriel, G. W. (2016). *Optimal Sampled-Data State Feedback Control Applied to Markov Jump Linear Systems*, Tese (doutorado), FEEC - UNICAMP, Campinas, BR.

Gabriel, G. W. e Geromel, J. C. (2016). Teoria unificada de sistemas de controle amostrado, *Anais do XXI Congresso Brasileiro de Automática* pp. 116–121.

Gabriel, G. W., Gonçalves, T. R. e Geromel, J. C. (2018). Optimal and robust sampled-data control of markov jump linear systems: A differential lmi approach, *IEEE Transaction on Automatic Control* . accepted.

Geromel, J. C. e Gabriel, G. W. (2015). Optimal $\mathcal{H}_2$ state feedback sampled-data control design for markov jump linear systems, *Automatica* **54**: 182–188.

Geromel, J. C. e Korogui, R. H. (2011). *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*, Edgard Blücher, São Paulo, BR.

Goebel, R., Sanfelice, R. G. e Teel, A. R. (2009). Hybrid dynamical systems, *IEEE Control Systems Magazine* pp. 28–93.

Smears, I. (2011). Hamilton-jacobi-bellman equations, *Technical report*, University of Durham, Durham.

Tan, K. e Grigoriadis, K. M. (2000). State-feedback control of lpv sampled-data systems, *Mathematical Problems in Engineering* **6**(2–3): 145–170.