

# PROJETO DE CONTROLADOR PID VIA LMIS PARA SISTEMAS DE POSICIONAMENTO SUJEITOS A HISTERESE E RETARDO DE TEMPO

PETRUS E. O. G. B. ABREU\*, FERNANDO O. SOUZA\*, BRUNO O. S. TEIXEIRA\*, LUIS A. AGUIRRE\*

\*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)  
Av. Antônio Carlos, 6627 - 31270-901, Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil

Emails: petrusabreu@ufmg.br, fosouza@cpdee.ufmg.br, brunoot@ufmg.br, aguirre@ufmg.br

**Abstract**— This paper deals with the design of Proportional-Integral-Derivative (PID) controllers with convergence rate specifications for positioning systems subject to hysteresis and time-delay. The hysteretic effect is modeled by the Prandtl-Ishlinskii operator susceptible to limited parametric uncertainty. The proposed result is based on robust control techniques coupled with linear matrix inequalities (LMIs). Numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the proposed method.

**Keywords**— PID controller, Hysteresis, Time-delay, Robust control, LMIs.

**Resumo**— Este artigo trata o problema de projeto de controladores do tipo Proporcional-Integral-Derivativo (PID) com especificações de taxa de convergência para sistemas de posicionamento sujeitos a histerese e retardo de tempo. O efeito histerético é modelado pelo operador de Prandtl-Ishlinskii passível de incerteza paramétrica limitada. O resultado proposto baseia-se em técnicas de controle robusto aliadas a desigualdades lineares matriciais (LMIs), do inglês: *Linear Matrix Inequalities*). Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a eficiência do método proposto.

**Palavras-chave**— Controlador PID, Histerese, Retardo de tempo, Controle robusto, LMIs.

## 1 Introdução

Atuadores baseados em materiais inteligentes, tais como piezoelétricos e ligas de memória de forma magnética, têm atraído grande interesse devido sua velocidade de resposta, alta resolução e rigidez (Croft et al., 1999; Peng e Chen, 2013). Esses atuadores exibem efeitos não lineares, como a histerese, o que torna a sua modelagem e controle desafiadores. Para lidar com esse desafio, há na literatura várias propostas de modelos de histerese (Wen, 1976; Ge e Jouaneh, 1997; Martins e Aguirre, 2016) e métodos de projetos de controladores para a sua compensação (Zhou et al., 2004; Janaideh et al., 2011; Riccardi et al., 2012; Liu et al., 2014). Neste trabalho, utiliza-se o operador de Prandtl-Ishlinskii (Janeideh et al., 2009) para o projeto de controladores robustos à incertezas histeréticas.

Além da histerese, o retardo de tempo é um outro efeito frequentemente encontrado em aplicações práticas (Liu e Su, 1998). Do ponto de vista de controle, a presença de retardo de tempo pode degradar o desempenho do sistema, podendo até levar à sua instabilidade. Para tratar esse problema, abordagens lineares e não lineares vêm sendo desenvolvidas (Yi et al., 2009; Mozelli e Souza, 2013; Fenili et al., 2014). Na abordagem linear, uma das principais ferramentas utilizadas é a combinação da teoria de Lyapunov-Krasovskii e LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*).

Apesar de existir uma extensiva quantidade de trabalhos tratando isoladamente sistemas com histerese ou com retardo de tempo, o caso em que se considera os dois efeitos combinados ainda tem sido pouco explorado na literatura. No me-

lhor conhecimento dos autores, o primeiro trabalho que trata o problema combinado é apresentado em Pan et al. (2001). Esse trabalho modela um sistema de corte de metal como um sistema incerto com histerese e retardo de tempo constante, para projeto de controle robusto adaptativo. Em sequência, alguns trabalhos tratam os efeitos de histerese e retardo de tempo em esquemas de controle adaptativo não linear (Ren et al., 2009; Li et al., 2012). A metodologia adotada é frequentemente descrita em dois passos: a escolha adequada de um funcional de Lyapunov-Krasovskii para tratar o problema de retardo de tempo e o emprego desse funcional em um esquema adaptativo por meio de técnicas não lineares (Hua e Li, 2015).

Neste trabalho propõe-se uma metodologia para o projeto de controladores PID robustos projetados para compensar incertezas histeréticas em conjunto com o retardo de tempo. Utilizando o operador de Prandtl-Ishlinskii, a histerese é representada como um parâmetro incerto e limitado para o projeto de controle. Dessa forma, a histerese é formulada como uma incerteza intervalar. O principal resultado deste trabalho é obtido por meio de técnicas de controle robusto aliadas a LMIs.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: na Seção 2 é apresentada a modelagem do sistema com histerese sujeito a um retardo de tempo constante. Na Seção 3 têm-se a formulação do problema e a metodologia utilizada para o projeto do controlador. Na Seção 4, resultados numéricos são utilizados para demonstrar a eficiência do método proposto. As conclusões são apresentadas na Seção 5.

## 2 Modelagem do Sistema de Posicionamento

Nesta seção, apresenta-se a modelagem do sistema de posicionamento com histerese sujeito a um retardo de tempo no sinal de controle.

### 2.1 Sistemas de Posicionamento com Histerese

Os sistemas histeréticos podem ser representados matematicamente por um modelo dinâmico  $\Sigma$  que descreve o comportamento linear do sistema, precedido de um operador  $\Gamma$  que descreve o efeito de histerese. Na Figura 1 é mostrado o diagrama de blocos que caracteriza esse tipo de sistema.

A dinâmica linear  $\Sigma$  desses sistemas de posicionamento pode ser aproximada adequadamente como sistemas de segunda ordem (Riccardi et al., 2013), da seguinte forma:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = b_0(\Gamma[v(t)] + \zeta) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (1)$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  referem-se à posição e a velocidade do atuador, respectivamente, e  $a_0$ ,  $a_1$  e  $b_0$  são os coeficientes do modelo que dependem da rigidez, do amortecimento elástico e da massa. A variável  $\zeta$  representa as perturbações externas.

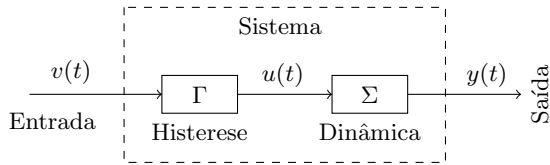


Figura 1: Sistema de posicionamento.

O comportamento histerético é modelado por meio do operador de Prandtl-Ishlinskii, que é dado pela soma ponderada de operadores elementares, também denominados como operadores de jogo (do inglês, *play operators*) (Kuhnen, 2003). Cada um desses operadores é definido por um raio  $r_i$ . Dessa forma, o  $i$ -ésimo operador de jogo  $P_{r_i}$ , para uma entrada contínua  $v(t)$ , é apresentado na Figura 2 e equacionado como

$$u_{r_i}(t) = \max(\min(v(t) + r_i, u_{r_i}(t^-)), v(t) - r_i) \triangleq P_{r_i}[v(t); u_{r_i}(t^-)], \quad (2)$$

sendo  $u_{r_i}(t)$  e  $u_{r_i}(t^-)$  o estado atual e o estado anterior do operador de jogo, respectivamente.

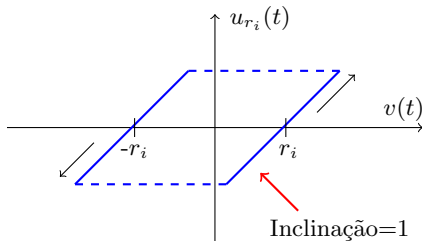


Figura 2: Operador de jogo.  $v(t)$  é o sinal de entrada e  $u_{r_i}(t)$  são os valores do estado do  $i$ -ésimo operador.

Para cada operador de jogo, têm-se dois modos possíveis em que seu estado pode estar em um instante de tempo  $t$ , como pode ser notado tanto pela Figura 2 quanto por (2). Um desses modos corresponde à região linear (i.e. em que o estado varia linearmente), tal que  $u_{r_i}(t) = v(t) \pm r_i$ . O segundo modo é denominado como a região de jogo, em que o estado é constante, dado por  $u_{r_i}(t) = u_{r_i}(t^-)$ .

O operador de Prandtl-Ishlinskii corresponde à soma ponderada de  $k$  operadores de jogo, tal que

$$u(t) = \Gamma[v(t); \mathbf{u}_r(t^-)] = \sum_{i=1}^k \theta_i P_{r_i}[v(t); u_{r_i}(t^-)], \quad (3)$$

sendo  $u_{r_i}(t)$  o estado atual do  $i$ -ésimo operador de jogo  $P_{r_i}$ ,  $\mathbf{u}_r(t) \triangleq [u_{r_1}(t) \ u_{r_2}(t) \ \dots \ u_{r_k}(t)]^T$  o vetor de estados no tempo  $t$  e  $\mathbf{u}_r(t^-)$  o vetor de estados no instante imediatamente anterior ao instante de tempo atual. Assume-se que cada ponderação  $\theta_i$  é limitada, não negativa e maior que zero.

Para reescrever (3) em uma forma compacta, define-se  $\mathcal{P} \triangleq [P_{r_1} \ P_{r_2} \ \dots \ P_{r_k}]^T$ , o qual representa a evolução temporal dos estados  $\mathbf{u}_r(t)$  de (3) com relação a uma entrada  $v(t)$ , tal que

$$\mathbf{u}_r(t) = \mathcal{P}[v(t); \mathbf{u}_r(t^-)]. \quad (4)$$

Ademais, define-se  $\boldsymbol{\theta} \triangleq [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_k]^T$  e  $\mathbf{r} \triangleq [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_k]^T$ . Assim, pode-se representar a saída do operador (3) como

$$u(t) = \Gamma[v(t); \mathbf{u}_r(t^-)] = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{u}_r(t). \quad (5)$$

**Exemplo 1** Para ilustrar um possível modelo do comportamento histerético (5), definem-se 3 operadores de jogo (2) com raios dados por  $\mathbf{r} = [0, 0,8, 1,7]^T$  e ponderados por  $\boldsymbol{\theta} = [5,88 \ 1,58 \ 0,47]^T$ . Na Figura 3, tem-se a relação saída pela entrada de cada um dos operadores e o ciclo de histerese resultante, Figuras 3(a) e 3(b), respectivamente.

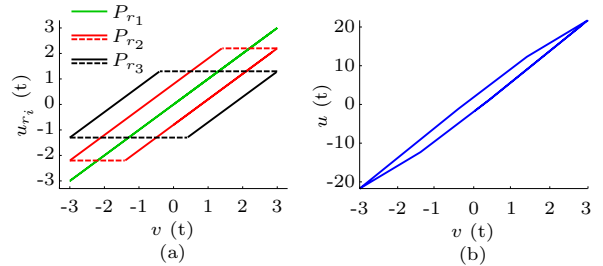


Figura 3: Ilustração de um operador (5). (a) Saída dos operadores  $P_{r_1}$ ,  $P_{r_2}$  e  $P_{r_3}$  e (b) Laço de histerese do operador (5). A entrada é  $v(t) = 3 \sin(t)$ .

### 2.2 Sistemas de Posicionamento Sujeitos a Histerese e Retardo de Tempo

Para o caso em que se considera o sistema completo em malha fechada, o retardo de tempo pode ser tratado como um atraso no sinal de controle

$v(t)$  (Mozelli e Souza, 2013). Portanto, o modelo dinâmico  $\Sigma$  (1) passa a ser representado por

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = b_0(u(t-\tau) + \zeta) - a_0x_1(t) - a_1x_2(t), \\ y(t) = x_1(t), \end{cases} \quad (6)$$

em que  $u(t-\tau) = \Gamma[v(t-\tau); \mathbf{u}_r(t-\tau)]$  é o operador (5) para a entrada de controle  $v(t-\tau)$ , com retardo de tempo  $\tau$ .

### 3 Projeto do Controlador

Para alcançar os objetivos deste trabalho, é proposto o projeto de um controlador PID com base em métodos de controle robusto via LMIs (Riccardi et al., 2013; Fenili et al., 2014).

#### 3.1 Formulação do Problema de Controle

Neste trabalho, o comportamento dinâmico do sistema é descrito por (6) e o efeito de histerese é dado por (5). O controlador  $C$  Proporcional-Integral-Derivado (PID) é dado por:

$$v(t) = k_P(y - r_{\text{ef}}) + k_I \int_0^t (y - r_{\text{ef}}) d\mathcal{T} + k_D \dot{y}, \quad (7)$$

em que  $k_P, k_D \geq 0$  e  $k_I > 0$ . Ademais, considera-se que  $r_{\text{ef}}(t)$  é constante, i.e.  $\dot{r}_{\text{ef}}(t) = 0$ ; ver Figura 4.

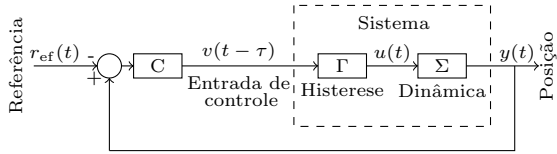


Figura 4: Diagrama do controle em malha fechada.

Para o projeto de controle, o sistema (6) é representado para  $\zeta = 0$ , como:

$$\begin{cases} \dot{e}_0(t) = e_1(t), \\ \dot{e}_1(t) = e_2(t), \\ \dot{e}_2(t) = r_{\text{ef}}(t) - a_0(e_1(t) - a_1e_2(t) + b_0u(t-\tau)), \end{cases} \quad (8)$$

em que  $e_1 = y - r_{\text{ef}}$ ,  $e_0 = \int_0^t e_1 d\mathcal{T}$  e  $e_2 = \dot{y}$ . No entanto, não é possível garantir estabilidade assintótica para a origem de (8) devido à sua dependência com o sinal de referência e por possuir um estado da integral do erro. Para contornar essa questão, considera-se a mudança de variável,  $\xi_0 = \dot{e}_0$ ,  $\xi_1 = \dot{e}_1$  e  $\xi_2 = \dot{e}_2$ , em que  $\xi_0$  corresponde ao erro de rastreamento:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_0(t) = \xi_1(t), \\ \dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t), \\ \dot{\xi}_2(t) = -a_0\xi_1(t) - a_1\xi_2(t) + b_0 \frac{d}{dt}(u(t-\tau)), \end{cases} \quad (9)$$

sendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t-\tau)) &= \frac{d}{dt}(\Gamma[v(t-\tau); \mathbf{u}_r(t-\tau)]) \\ &= \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{u}}_r(t-\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

em que  $\mathbf{u}_r(t-\tau)$  em (4), tem-se que

$$\dot{\mathbf{u}}_r(t-\tau) = \begin{bmatrix} \dot{P}_{r_1}[v(t-\tau); u_{r_1}(t-\tau)] \\ \vdots \\ \dot{P}_{r_k}[v(t-\tau); u_{r_k}(t-\tau)] \end{bmatrix}.$$

É importante ressaltar que os estados dos operadores de jogo (2) chaveiam entre as regiões linear e de jogo, definidas na Subseção 2.1. A derivada temporal de um operador de jogo pode ser tratada considerando dois conjuntos que envolvem essas regiões (Esbroom et al., 2014). Definindo  $\Pi_i(t)$  como o conjunto de valores em que  $P_{r_i}[v(t); u_{r_i}(t)]$  esteja dentro da região linear no instante  $t$  e  $\Pi_i^c(t)$  como o complemento de  $\Pi_i(t)$ , tem-se

$$\dot{P}_{r_i} = \begin{cases} \dot{v}, & \text{se } P_{r_i} \in \Pi_i(t-\tau), \\ 0, & \text{se } P_{r_i} \in \Pi_i^c(t-\tau). \end{cases} \quad (11)$$

Por fim, para o projeto de controle, representa-se  $\boldsymbol{\theta}^T$  como uma incerteza limitada. Com esse objetivo, define-se  $\bar{\theta}(t)$  como a soma das ponderações de cada um dos operadores de jogo que esteja na região linear no instante de tempo  $t$

$$\bar{\theta}(t) = \left[ \sum_i \theta_i : P_{r_i} \in \Pi_i(t) \right], \quad (12)$$

que tem valores limitados para o operador de histerese (5). Assim,  $\bar{\theta}(t)$  pode ser tratado como um parâmetro incerto limitado:

$$\bar{\theta}(t) : \bar{\theta} \in [\bar{\theta}_{\min}, \bar{\theta}_{\max}]. \quad (13)$$

Por meio das definições apresentadas em (11)-(13), tem-se que (10) pode ser interpretado como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t-\tau)) &= [\theta_1 \theta_2 \dots \theta_k] [\dot{P}_{r_1} \dot{P}_{r_2} \dots \dot{P}_{r_k}]^T \\ &= \bar{\theta}(t-\tau) \dot{v}(t-\tau), \end{aligned}$$

em que  $\dot{v}$  é a derivada temporal da ação de controle (7) que pode ser reescrita em função do erro, como  $v(t-\tau) = k_P e_1 + k_I e_0 + k_D e_2$ . Assim, a derivada do sinal de controle para o sistema em estudo é dada por  $\dot{v}(t-\tau) = k_P \xi_1 + k_I \xi_0 + k_D \xi_2$ , a qual pode ser expressa na forma matricial

$$\dot{v}(t-\tau) = \mathbf{k}^T \boldsymbol{\xi}(t-\tau), \quad (14)$$

com  $\mathbf{k} = [k_I \ k_P \ k_D]^T$  e  $\boldsymbol{\xi} = [\xi_0 \ \xi_1 \ \xi_2]^T$ .

Portanto, (10) pode ser reescrita apropriadamente na seguinte forma

$$\frac{d}{dt}(u(t-\tau)) = \bar{\theta} \dot{v}(t-\tau) = \bar{\theta} \mathbf{k}^T \boldsymbol{\xi}(t-\tau). \quad (15)$$

Pelo uso de (15), pode-se reescrever (9) em malha fechada na forma matricial

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\xi}(t) + \tilde{\mathbf{A}}_d \boldsymbol{\xi}(t-\tau), \quad (16)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{A}}_d = \bar{\theta} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{k}^T$ , com  $\bar{\theta}$  dado por (13), e

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_I \\ k_P \\ k_D \end{bmatrix}, \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, reescreveu-se o sistema sujeito a histerese e retardo de tempo como um sistema de controle com realimentação de estados.

### 3.2 Metodologia de Controle via LMIs

A metodologia de projeto de controladores PID descrita a seguir parte da condição de análise de estabilidade proposta em Fenili et al. (2014) para um retardo de tempo constante,  $d(t) = \tau$ .

**Lema 1** (Fenili et al., 2014) *Considere o sistema  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_d\mathbf{x}(t - \tau)$ . Sejam dados  $\tau > 0$  e  $\delta > 0$  uma taxa de convergência exponencial tal que  $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \kappa e^{-2\delta t}$ ,  $\forall t \geq 0$  e  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ . Então, a origem desse sistema é exponencialmente estável, com taxa de convergência exponencial  $\delta$ , se existirem matrizes:  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ ,  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1^T$ ,  $\mathbf{R}_2$  e  $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_3^T$ , tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^T & \varepsilon_1 \mathbf{S} \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2^T \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (18)$$

$$\Xi < 0, \quad (19)$$

em que  $\varepsilon_1 = \frac{e^{-2\delta\tau}}{\tau}$ ,  $\varepsilon_2 = e^{-2\delta\tau}$  e  $\Xi$  dado em (20).

Portanto, aplicando o Lema 1 ao sistema (16) obtemos o principal resultado deste trabalho.

**Teorema 1** *Considere o sistema de posicionamento sujeito a histerese e retardo de tempo (6), reescrito para o projeto de controle como (16). Considere também as seguintes condições dadas:  $\tau > 0$  e  $\delta > 0$  uma taxa de convergência exponencial tal que  $\|\xi(t)\| \leq \kappa e^{-2\delta t}$ ,  $\forall t \geq 0$  em que  $\xi(t)$  corresponde à evolução temporal dos estados em (16) com  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ,  $\alpha \neq 0$  um parâmetro de ajuste escalar e  $\bar{\theta}$  definido em (13). Se existirem matrizes  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^T$ ,  $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}}^T$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_1 = \bar{\mathbf{R}}_1^T$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{R}}_3 = \bar{\mathbf{R}}_3^T$  e  $\mathbf{X}$  com dimensões adequadas, tais que*

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}} & \bar{\mathbf{Q}} \\ \bar{\mathbf{Q}}^T & \varepsilon_1 \bar{\mathbf{S}} \end{bmatrix} > 0, \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_1 & \bar{\mathbf{R}}_2^T \\ \bar{\mathbf{R}}_2 & \bar{\mathbf{R}}_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (22)$$

$$\bar{\Xi}(\bar{\theta}) < 0 \text{ para } \begin{cases} \bar{\theta} = \bar{\theta}_{\min} \\ \bar{\theta} = \bar{\theta}_{\max} \end{cases} \quad (23)$$

em que  $\varepsilon_1 = \frac{e^{-2\delta\tau}}{\tau}$ ,  $\varepsilon_2 = e^{-2\delta\tau}$  e  $\bar{\Xi}(\bar{\theta})$  dado em (24) então, o sistema dinâmico (6) é exponencialmente estável, com taxa de convergência exponencial  $\delta$  e ganhos PID definidos pelo vetor  $\mathbf{k}^T = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{F}}^{-1})^T$ .

**Prova:** Note que o sistema (6) é exponencialmente estável se, e somente se, o sistema (16) for exponencialmente estável, conforme desenvolvimento apresentado na Subseção 3.1. Assim, as condições apresentadas no Teorema são obtidas aplicando o Lema 1 para análise do sistema (16).

Portanto, fazendo as substituições  $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$  e  $\mathbf{A}_d = \bar{\mathbf{A}}_d$ , definidas em (19), no Lema 1 são obtidas condições de análise de estabilidade para o sistema em (16) com  $\mathbf{k}$  definido *a priori*.

Entretanto, se  $\mathbf{k}$  é uma variável do problema a aplicação direta do Lema 1 resulta em condições não lineares. Portanto, para a obtenção das condições LMIs de síntese do controlador  $\mathbf{k}$  (16), são realizadas as transformações de congruência e definida a variável linearizante conforme a seguir.

Inicialmente definem-se as variáveis  $\bar{\mathbf{F}} \triangleq \mathbf{F}^{-1}$  e  $\bar{\Theta} \triangleq \bar{\mathbf{F}}\Theta\bar{\mathbf{F}}^T$ , sendo  $\Theta \triangleq [\bar{\mathbf{P}} \ \bar{\mathbf{Q}} \ \bar{\mathbf{S}} \ \bar{\mathbf{R}}_1 \ \bar{\mathbf{R}}_2 \ \bar{\mathbf{R}}_3]$ . Assim, as LMIs (21) e (22) são obtidas ao se pré e pós multiplicar as LMIs (17) e (18) por  $\text{diag}\{\bar{\mathbf{F}}, \dots, \bar{\mathbf{F}}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{\mathbf{F}}, \dots, \bar{\mathbf{F}}\}^T$ , respectivamente.

Para obter a LMI (23) faça  $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{A}_d = \bar{\mathbf{A}}_d = \bar{\theta}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{k}^T$  e  $\mathbf{G} = \alpha\mathbf{F}$  em (19) e, em seguida, pré e pós multiplique (19) por  $\text{diag}\{\bar{\mathbf{F}}, \dots, \bar{\mathbf{F}}\}$  e  $\text{diag}\{\bar{\mathbf{F}}, \dots, \bar{\mathbf{F}}\}^T$ , respectivamente. Por fim, definindo a variável linearizante  $\mathbf{X} = \mathbf{k}^T\bar{\mathbf{F}}^T$  a LMI (23) é obtida.

Finalmente, note que a LMI (23) é afim e depende linearmente do parâmetro de incerteza  $\bar{\theta}$ , portanto convexa para esse parâmetro. Assim, se a LMI (23) é satisfeita nos vértices de (13), também é verificado para qualquer valor de  $\bar{\theta}$  nesse intervalo. Dessa maneira, se as LMIs (21), (22) e, (23) para os valores de  $\bar{\theta}_{\min}$  e  $\bar{\theta}_{\max}$  forem satisfeitas, o sistema (6) é estável em malha fechada, com taxa de convergência exponencial  $\delta$ , pelo uso do controlador PID (7) com ganhos  $\mathbf{k}$  referidos em (16) e determinados como  $\mathbf{k}^T = \mathbf{X}(\bar{\mathbf{F}}^{-1})^T$ .  $\square$

## 4 Resultados Simulados

Nesta seção, resultados numéricos são apresentados para demonstrar a eficiência do método proposto e dos controladores obtidos.

Nas simulações consideram-se dois sistemas, um com resposta dinâmica lenta e outro rápida. Tais sistemas são modelados conforme (6), cujos parâmetros são dados por

$$\text{Sistema 1: } \begin{cases} b_0 = 1, a_0 = 4, a_1 = 2, \end{cases}$$

$$\text{Sistema 2: } \begin{cases} b_0 = a_0 = 1 \times 10^6, a_1 = 1900, \end{cases}$$

os quais são encontrados em Jayawardhana et al. (2008) e Riccardi et al. (2013), respectivamente.

O sistema 1 tem autovalores dados por  $\lambda_{1,2} = -1 \pm 1,7321j$ , com tempo de acomodação  $t_s = 4$  s (critério de 2% do valor final). O sistema 2 tem autovalores dados por  $\lambda_{1,2} = -950 \pm 312,25j$ , com  $t_s = 0,0042$  s. O comportamento histerético é modelado pelo operador (5) com 5 operadores de jogo, cujos raios são dados por  $\mathbf{r} = [0 \ 0,63 \ 1,27 \ 2,54 \ 4,45]^T$  e ponderados por  $\boldsymbol{\theta} = [5,88 \ 1,58 \ 0,47 \ 0,98 \ 0,4]^T$  (Edardar et al., 2014).

Na Tabela 1 são mostrados alguns dos parâmetros utilizados e controladores obtidos pelo Teorema 1. Ademais, com o intuito de validar a robustez e o esforço de controle dos controladores, considera-se que há um distúrbio externo do tipo degrau  $\zeta$ .

$$\Xi = \begin{bmatrix} 2\delta \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T + \tau \mathbf{R}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{R}_3 + \mathbf{S} + \mathcal{F} & \mathbf{P}^T + \tau \mathbf{R}_2^T - \varepsilon_2 (\mathbf{F} - \mathbf{A}^T \mathbf{G}^T) & \varepsilon_1 \mathbf{R}_3 - \mathbf{Q} + \varepsilon_2 \mathbf{F} \mathbf{A}_d & 2\delta \mathbf{Q} - \varepsilon_1 \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{P} + \tau \mathbf{R}_2 - \varepsilon_2 (\mathbf{F}^T - \mathbf{G} \mathbf{A}) & \tau \mathbf{R}_3 - \varepsilon_2 (\mathbf{G} + \mathbf{G}^T) & \varepsilon_2 \mathbf{G} \mathbf{A}_d & \mathbf{Q} \\ \varepsilon_1 \mathbf{R}_3^T - \mathbf{Q}^T + \varepsilon_2 \mathbf{A}_d^T \mathbf{F}^T & \varepsilon_2 \mathbf{A}_d^T \mathbf{G}^T & -\varepsilon_1 (\mathbf{R}_3 + \tau \mathbf{S}) & \varepsilon_1 \mathbf{R}_2 \\ 2\delta \mathbf{Q}^T - \varepsilon_1 \mathbf{R}_2^T & \mathbf{Q}^T & \varepsilon_1 \mathbf{R}_2^T & -\varepsilon_1 \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

com  $\mathcal{F} = \varepsilon_2 (\mathbf{F} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{F}^T)$ .

$$\Xi(\bar{\theta}) = \begin{bmatrix} 2\delta \bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{Q}}^T + \tau \bar{\mathbf{R}}_1 - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_3 + \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathcal{F}} & \bar{\mathbf{P}}^T + \tau \bar{\mathbf{R}}_2^T - \varepsilon_2 (\bar{\mathbf{F}}^T - \alpha \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{A}}^T) & \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_3 - \bar{\mathbf{Q}} + \varepsilon_2 \bar{\theta} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{X} & 2\delta \bar{\mathbf{Q}} - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_2 \\ \bar{\mathbf{P}} + \tau \bar{\mathbf{R}}_2 - \varepsilon_2 (\bar{\mathbf{F}} - \alpha \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{F}}^T) & \tau \bar{\mathbf{R}}_3 - \varepsilon_2 \alpha (\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T) & \alpha \varepsilon_2 \bar{\theta} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{X} & \bar{\mathbf{Q}} \\ \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_3^T - \bar{\mathbf{Q}}^T + \varepsilon_2 \bar{\theta} \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{B}}^T & \alpha \varepsilon_2 \bar{\theta} \mathbf{X}^T \bar{\mathbf{B}}^T & -\varepsilon_1 (\bar{\mathbf{R}}_3 + \tau \bar{\mathbf{S}}) & \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_2 \\ 2\delta \bar{\mathbf{Q}}^T - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_2^T & \bar{\mathbf{Q}}^T & \varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_2^T & -\varepsilon_1 \bar{\mathbf{R}}_1 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

com  $\bar{\mathcal{F}} = \varepsilon_2 (\bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{A}}^T)$ .

Tabela 1: Parâmetros de projeto.

| Sistema | $\tau$  | $\alpha$ | $\delta$ | $k_i$  | $k_p$  | $k_d$              |
|---------|---------|----------|----------|--------|--------|--------------------|
| 1       | 0,01    | 0,05     | 10,87    | 953,29 | 147,30 | 7,61               |
|         | 0,1     | 0,15     | 1,81     | 3,83   | 2,89   | 0,89               |
| 2       | 0,00015 | 0,05     | 18,48    | 5,75   | 0,008  | $1 \times 10^{-6}$ |
|         | 0,0015  | 0,1      | 9,26     | 2,83   | 0,004  | $9 \times 10^{-7}$ |

Na Subseção 4.1, avalia-se o efeito de diferentes valores de retardo de tempo e, na Subseção 4.2, varia-se  $\delta$  com  $\tau$  fixo.

#### 4.1 Variação do Retardo de Tempo

A Figura 5 apresenta os resultados do sistema 1 utilizando os controladores presentes na Tabela 1.

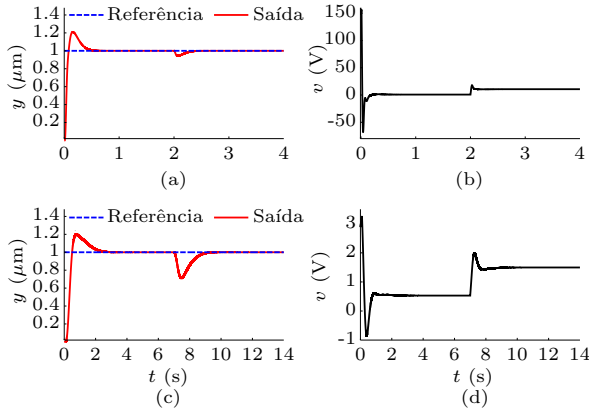


Figura 5: Resposta temporal  $y$  e entrada de controle  $v$  do sistema 1, em (a) e (b) para  $\tau=0,01$ , e em (c) e (d) para  $\tau=0,1$ , usando os parâmetros dados na Tabela 1. Um distúrbio  $\zeta=-100$  é aplicado em  $t=2$  s para  $\tau=0,01$  e de  $\zeta=-8$  em  $t=7$  s para  $\tau=0,1$ .

A maior taxa de convergência que atendeu as LMIs (21)-(23) para  $\tau=0,01$ , foi de  $\delta=10,87$ . A Tabela 1 mostra que para esses valores, os ganhos encontrados para o controlador PID são relativamente altos quando comparados com os obtidos no teste em que  $\tau=0,1$  com o maior valor de  $\delta=1,81$ . Percebe-se que para o primeiro teste a energia demandada pelo controlador é maior, possibilitando assim rápida convergência e uma maior robustez a distúrbios do tipo degrau (compare Figura 5(b) e 5(d)). Como esperado, têm-se uma relação direta entre o esforço de controle e o valor de  $\delta$ .

A Figura 6 apresenta os resultados do sistema 2 utilizando os controladores presentes na Tabela 1. Para  $\tau=0,00015$  e  $\delta=18,48$ , tanto a resposta dinâmica quanto o sinal de controle possuem uma maior variação em comparação ao controlador para  $\tau=0,0015$  com  $\delta=9,26$ , o que resulta em um menor tempo de acomodação e maior esforço de controle.

Os resultados sugerem que quanto maior o valor de  $\tau$ , menor o de  $\delta$ , que viabiliza o projeto. Além disso, verifica-se que a variação de  $\tau$  e  $\delta$  afeta a resposta dinâmica.

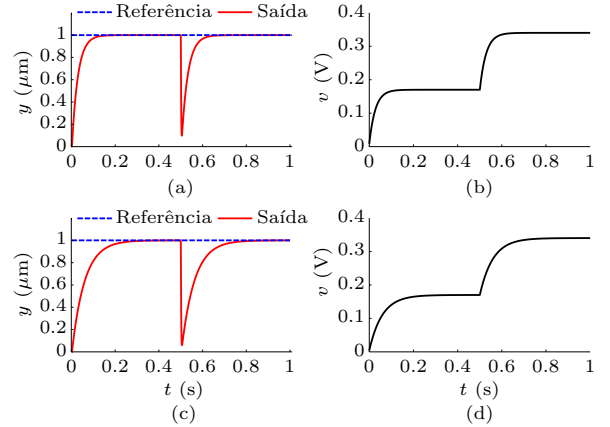


Figura 6: Resposta temporal  $y$  e entrada de controle  $v$  do sistema 2, em (a) e (b) para  $\tau=0,00015$ , e em (c) e (d) para  $\tau=0,0015$ , usando os parâmetros dados na Tabela 1. O distúrbio de  $\zeta=-1$  ocorre em  $t=0,5$  s.

#### 4.2 Variação da Taxa de Convergência

Nesta subseção, realiza-se uma análise comparativa entre dois controladores projetados para taxas de decaimento distintas. A princípio, considera-se o sistema 1 com  $\tau=0,01$  e  $\delta=10,87$  com ganhos do controlador apresentados na Tabela 1. Um segundo controlador é projetado para  $\delta=5,12$  com parâmetro de ajuste  $\alpha=0,15$ . Utilizando o Teorema 1, obtêm-se  $k_P=36,29$ ,  $k_I=118,17$  e  $k_D=3,63$ . A Figura 7 mostra os resultados obtidos para ambos os controladores.

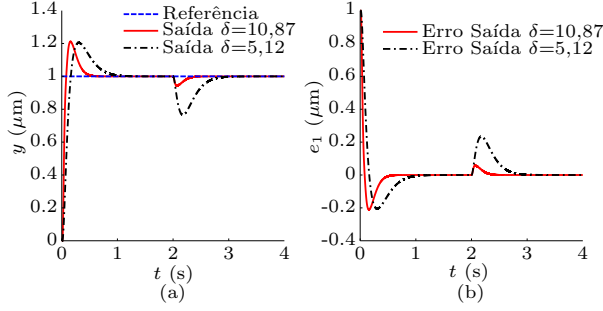


Figura 7: (a) Resposta temporal  $y$  e (b) erro de rastreamento  $e_1$  do sistema 1 para referência em degrau unitário. Para  $\tau = 0,01$  e,  $\delta = 10,87$  e  $\delta = 5,12$ . Em  $t = 2$  s ocorre um distúrbio com  $\zeta = -100$ .

Como esperado, a resposta para o controlador projetado com  $\delta = 10,87$  possui a capacidade de rastrear referências constantes em menor tempo e uma maior robustez a distúrbios. Além do mais, como discutido na Subseção 4.1, o valor de  $\delta$  está diretamente relacionado com a energia demanda pelo controlador, i.e. maiores valores de  $\delta$  requerem um maior esforço de controle.

Por fim, considera-se o rastreamento de uma sequência de degraus. Para o sistema 1, são mantidos o  $\tau$  e os valores de  $\delta$  mencionados ao início desta subseção, e consequentemente os controladores projetados. A Figura 8 mostra a resposta dinâmica e a evolução temporal do erro de rastreamento. Esses resultados indicam as vantagens ao se projetar controladores que possam atender determinadas taxas de decaimento, as quais devem ser especificadas pelo usuário.

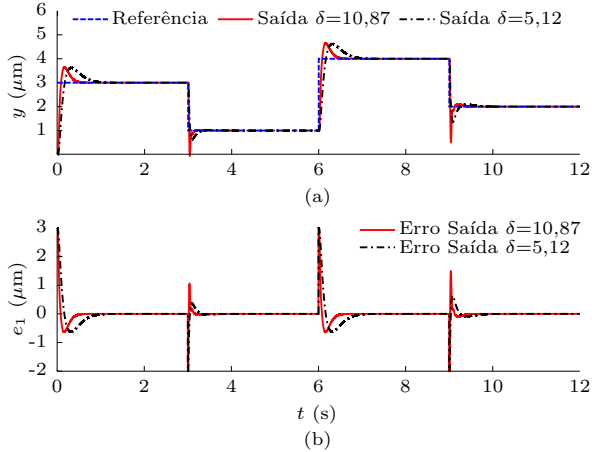


Figura 8: (a) Resposta temporal  $y$  e (b) erro de rastreamento  $e_1$  do sistema 1. Para  $\tau = 0,01$  e,  $\delta = 10,87$  e  $\delta = 5,12$ .

Para o sistema 2, fixa-se o valor de  $\tau=0,0015$  e considera-se o controlador obtido para  $\delta=9,26$ , conforme apresentado na Tabela 1. Para comparação, o segundo controlador para esse  $\tau$  é projetado para uma taxa de decaimento mais lenta,  $\delta=4,37$  com  $\alpha=0,2$ , tal que os ganhos do novo controlador são  $k_P=0,003$ ,  $k_I=1,981$  e  $k_D=6 \times 10^{-7}$ . A Figura

9 mostra que para sistemas que possuem dinâmica rápida e sem oscilações, a escolha de um  $\delta$  maior fornece melhores respostas.

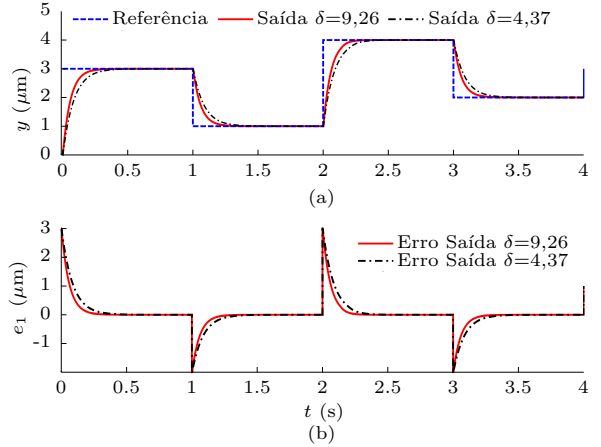


Figura 9: (a) Resposta temporal  $y$  e (b) erro de rastreamento  $e_1$  do sistema 2. Para  $\tau = 0,001$  e,  $\delta = 7,48$  e  $\delta = 4,21$ .

Note que, a escolha de taxas de decaimento maiores proporcionar controladores com uma maior robustez a distúrbios e capaz de rastrear referências em menor tempo. Entretanto, deve ser observado que a taxa de decaimento tem relação direta com a energia requerida pelo controlador.

## 5 Conclusões

Neste trabalho, foi proposta uma nova metodologia para o projeto de controladores PID via condições LMIs para sistemas com não linearidades histeréticas e com retardo de tempo. Quando comparada a outras técnicas da literatura, a presente proposta tem por vantagem o fato de fazer uso de controladores lineares, que estão bem consolidados tanto na área acadêmica quanto na industrial. Resultados numéricos sugerem que tanto a redução desses efeitos de complexidade, quanto a rastreamento de referências constantes e sequência de degraus, para taxas de decaimento pré-estabelecidas no projeto, foram alcançados, bem como a rejeição de perturbação constantes.

Como propostas futuras, sugere-se: (i) investigar formas de atribuir restrições ao sinal de controle na metodologia apresentada, (ii) considerar o caso em que o retardo é variante no tempo e (iii) empregar métodos de identificação para estimar o retardo de tempo do sistema, e assim propor novas metodologias de controle robusto via LMIs.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio financeiro do CNPq e CAPES.

## Referências

- Croft, D., Shed, G. e Devasia, S. (1999). Creep, Hysteresis, and Vibration Compensation for Piezoactuators: Atomic Force Microscopy Application, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **123**(1): 35–43.
- Edardar, M., Tan, X. e Khalil, H. K. (2014). Tracking Error Analysis for Feedback Systems with Hysteresis Inversion and Fast Linear Dynamics, *Journal of Dynamic System, Measurement and Control* **136**(4): 1–12.
- Esbroom, A., Tan, X. e Khalil, H. K. (2014). Inversion-free Stabilization and Regulation of Systems with Hysteresis via Integral Action, *Automatica* **50**(4): 1017–1025.
- Fenili, E. P., Souza, F. O. e Mozelli, L. A. (2014). Sintonia de PID via LMIs: Imposição de Tempo de Acomodação em Sistemas com Retardo no Tempo Incerto, *XX Congresso Brasileiro de Automática*, Belo Horizonte, Brasil, 1127–1134.
- Ge, P. e Jouaneh, M. (1997). Generalized Preisach Model for Hysteresis Nonlinearity of Piezoceramic Actuators, *Precision Engineering* **20**(2): 99–111.
- Hua, C. e Li, Y. (2015). Output feedback prescribed performance control for interconnected time-delay systems with unknown Prandtl-Ishlinskii hysteresis, *Journal of the Franklin Institute* **352**(7): 2750–2764.
- Janeideh, M. Al, Rakheja, S. e Su, C. -Y. (2009). A generalized Prandtl-Ishlinskii model for characterizing the hysteresis and saturation nonlinearities of smart actuators, *Smart Materials and Structures* **18**(4): 1–9.
- Janaideh, M. Al, Rakheja, S. e Su, C. -Y. (2011). An Analytical Generalized Prandtl-Ishlinskii Model Inversion for Hysteresis Compensation in Micropositioning Control, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **16**(4): 734–744.
- Jayawardhana, B., Logemann, H. e Ryan, E. P. (2008). PID control of second-order systems with hysteresis, *International Journal of Control* **81**(8): 1331–1342.
- Kuhnen, K. (2003). Modeling, Identification and Compensation of Complex Hysteretic Nonlinearities: A Modified Prandtl-Ishlinskii Approach, *European Journal of Control* **9**(1): 407–418.
- Li, Y., Tong, S. e Li, T. (2012). Adaptive fuzzy output feedback control of MIMO nonlinear uncertain systems with time-varying delays and unknown backlash-like hysteresis, *Neurocomputing* **93**: 56–66.
- Liu, P. -L. e Su, T. -J. (1998). Robust stability of interval time-delay systems with delay-dependence, *Systems & Control Letters* **33**(4): 231–239.
- Liu, S., Su, C. -Y. e Li, Z. (2014). Robust adaptive inverse control of a class of nonlinear systems with Prandtl-Ishlinskii hysteresis model, *IEEE Transactions on Automatic Control* **59**(8): 2170–2175.
- Martins, S. A. M. e Aguirre, L. A. (2016). Sufficient Conditions for Rate-Independent Hysteresis in Autoregressive Identified Models, *Mechanical Systems and Signals Processing* **75**: 607–617.
- Mozelli, L. A. e Souza, F. O. (2013). PID tuning under uncertain conditions: robust LMI design for second-order plus time-delay transfer functions, *11th IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, Grenoble, France, 120–125.
- Pan, J., Su, C. -Y. e Stepanenko, Y. (2001). Modeling and robust adaptive control of metal cutting mechanical systems, *American Control Conference (Cat. No. 01CH37148)*, Arlington, Va, USA, **2**: 1268–1273.
- Peng, J. e Chen, X. (2013). A survey of modeling and control of piezoelectric actuators, *Modern Mechanical Engineering* **3**(1): 1–20.
- Ren, B., Ge, S. S., Lee, T. H. e Su, C. Y. (2009). Adaptive neural control for a class of nonlinear systems with uncertain hysteresis inputs and time-varying state delays, *IEEE Transactions on Neural Networks* **20**(7): 1148–1164.
- Riccardi, L., Naso, D., Turchiano, B., Janocha, H. e Palagachev, D. K. (2012). On PID control of dynamics systems with hysteresis using a Prandtl-Ishlinskii models, *American Control Conference*, Montreal, QC, Canada: 1670–1675.
- Riccardi, L., Naso, D., Turchiano, B. e Janocha, H. (2013). LMI-based design of linear controllers for a magnetic shape memory push-push actuator, *52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Florence, Italy, 6634–6639.
- Wen, Y. -K. (1976). Method for Random Vibration of Hysteretic Systems, *Journal of the Engineering Mechanics Division* **102**(2): 249–263.
- Yi, Y., Guo, L. e Wang, H. (2009). Adaptive statistic tracking control based on two-step neural networks with time delays, *IEEE Transactions on Neural Networks* **20**(3): 420–429.
- Zhou, J., Wen, C. e Zhang, Y. (2004). Adaptive backstepping control of a class of uncertain nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(10): 1751–1759.