PROJETO DE CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Wallysonn Alves de Souza*, Diogo Ramalho de Oliveira†, Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira‡, Edson Luiz Kraemer*

*IFTO - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantis
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais - Campus Palmas
Quadra 310 Sul, Lo 5, Plano Diretor Sul, 77021-090, Palmas, Tocantins, Brasil.

†IFMS - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul
Campus Três Lagoas
Rua Ângelo Melão, 790, 79641-162, Três Lagoas, Mato Grosso do Sul, Brasil.

‡UNESP - Univ Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira
Departamento de Engenharia Elétrica, Lab. de Pesquisa em Controle
Av. José Carlos Rossi, 1370, 15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

Emails: wallysonn@yahoo.com.br, diogo.ramalho@ifms.edu.br, marcelo@dee.feis.unesp.br, edson@ifto.edu.br

Abstract— This paper proposes the stability analysis and an $\mathcal{H}_\infty$ state-feedback switched control design method for uncertain nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models. The stability conditions with $\mathcal{H}_\infty$ performance index are based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and the controller gain is chosen by a switching law that using a minimum-type piecewise Lyapunov function and the minimization of the time derivative of this function. For the implementation of the control law, this method eliminates the need to obtain the explicit expressions of the membership functions of the Takagi-Sugeno fuzzy controllers, which can often have long and/or complex expressions, or may not be known, for instance due to the plant uncertainties. The efficiency of the proposed approach is checked by means of a numerical example, considered a benchmark to compare the relaxation of stabilization criterion, with $\mathcal{H}_\infty$ performance index , of nonlinear systems described by Takagi-Sugeno fuzzy models.

Keywords— Switched $\mathcal{H}_\infty$ control, Control of uncertain nonlinear systems, Takagi-Sugeno fuzzy models, Linear Matrix Inequalities - LMIs

Resumo— Este trabalho propõe a análise de estabilidade e o projeto de controladores robustos $\mathcal{H}_\infty$ chaveados, por realimentação dos estados, para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. As condições de estabilidade com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ são baseadas em desigualdades matriciais lineares (LMIs) e o controlador é composto por um único ganho que é escolhido por meio de uma lei de chaveamento que utiliza a função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo e a minimização da derivada temporal desta função. Para a implementação da lei de controle, este método elimina a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência, do controlador fuzzy Takagi-Sugeno, que muitas vezes podem ter expressões longas e/ou complexas, ou serem desconhecidas devido às incertezas da planta. A eficiência da metodologia proposta é aferida por meio de um exemplo numérico, considerado uma referência para comparar o relaxamento de critério de estabilização, com índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$, de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno.

Palavras-chave— Controle chaveado $\mathcal{H}_\infty$, Controle de sistemas não lineares incertos, Modelo fuzzy Takagi-Sugeno, Desigualdade matriciais lineares (LMIs).

1 Introdução

No estudo do sistema de controle, além de garantir a estabilidade do sistema, é importante projetar controladores que satisfaçam outros índices de desempenho como, velocidade de resposta, restrições na entrada e saída do sinal de controle e atenuação dos efeitos de distúrbios externos (sinais exógenos). No sentido de tornar o sistema mais robusto frente a sinais exógenos de características determinísticas e/ou desconhecidas e com energia limitada, em geral, o controlador $\mathcal{H}_\infty$ é o mais conveniente e popular, como pode ser visto, por exemplo, em (Peres et al., 1993; Iwasaki and Skelton, 1994; Gahinet and Apkarian, 1994; Chilali and Gahinet, 1996; Kim and Park, 1999; Ji et al., 2006; Deaecto and Geromel, 2010; Silva et al., 2012; de Oliveira et al., 2014) para o caso de sistemas lineares e em (Cao et al., 2000; Tuan et al., 2001; Liu and Zhang, 2003; Feng, 2004; Xu and Lam, 2005; Delmotte et al., 2007; Montagner et al., 2009), para sistemas não lineares.

Até o final dos anos 80 era utilizado apenas o domínio da frequência, para resolver o problema do controlador $\mathcal{H}_\infty$ mas, com o trabalho de (Glover and Doyle, 1988) e de (Doyle et al., 1989), foi possível encontrar soluções no domínio tempo, por meio de descrições em espaço de estado. Estas soluções, no domínio do tempo, contribuíram para a popularização deste tipo de controle, que é bem próprio dos sistemas lineares, e possibilitou a formulação do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para modelos não lineares e variantes no tempo.

A generalização do controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares invariantes no tempo, estabelecida por (van der Schaft, 1991), consiste em garantir que o ganho $\mathcal{L}_2$, entre o distúrbio e a saída do sistema, seja limitado por um nível de atenuação γ.

Baseado na possibilidade do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ ser caracterizado como um problema convexo, como proposto em (Packard and Doyle, 1993) e depois estabelecido, por exemplo, por (Peres et al., 1993), os autores de (Lu and Doyle, 1993; Lu and Doyle, 1995) estabeleceram um procedimento, baseado em desigualdades matriciais lineares (do inglês "Linear Matrix Inequalities - LMIs"), para o problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas não lineares. Tal metodologia foi aprimorada e aplicada em projetos de controle de sistemas não lineares, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, como pode ser visto, por exemplo, em (Tuan et al., 2001; Liu and Zhang, 2003; Delmotte et al., 2007; Montagner et al., 2009). Na mesma época, devido ao surgimento de uma grande quantidade de problemas de caráter prático e acadêmico, também houve muito interesse no estudo de sistemas não lineares chaveados, e este interesse pode ser notado observando o crescente número de trabalhos que foram publicados sobre o tema: (Tanaka et al., 2000b; Tanaka et al., 2000a; Feng, 2004; Yang et al., 2006; Arrifano et al., 2006; Dong and Yang, 2008b; Dong and Yang, 2008a; Yan and Sun, 2010; Yang and Dong, 2010; Jabri et al., 2012; Chen et al., 2012; de Souza, 2013; Souza, Teixeira, Santim, Cardim and Assunção, 2014; Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014). Em geral, esses trabalhos utilizam regras de chaveamento baseadas em regiões que dependem das variáveis premissa e/ou funções de pertinência e/ou variáveis de estado, e dependem das funções de pertinência na implementação da lei de controle. A exceção são, por exemplo, os trabalhos de (de Souza, 2013; Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014), que estabeleceram leis de controle robustas chaveadas que não utilizam as funções de pertinência na implementação, que muitas vezes podem ter expressões longas e/ou complexas, ou serem desconhecidas devido às incertezas da planta.

A metodologia estabelecida em (de Souza, 2013; Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014) pode ser aplicada na atenuação dos efeitos de entradas de distúrbio por meio de um controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ chaveado. Assim, a principal contribuição deste trabalho é uma extensão de (de Souza, 2013; Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014), no sentido de garantir o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$. Desta forma, controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ chaveado proposto, que é baseado em (Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014; de Souza, 2013), é definido por uma lei de chaveamento que consiste de dois estágios. O primeiro estágio é baseado em (Geromel and Colaneri, 2006; Chen et al., 2012) e seleciona uma matriz simétrica positiva definida que minimiza uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo; o segundo estágio escolhe uma matriz simétrica auxiliar que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov, o que permite a determinação de um único ganho para o controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ chaveado.

Diferente de (de Souza, 2013; Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014), que estabelece algumas condições baseadas em BMIs este trabalho propõe condições baseadas apenas em LMIs, para garantir a estabilidade e o critério de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ do sistema. A relaxação da metodologia foi comparada com outros métodos de projeto de controle que utilizam o controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistema fuzzy Takagi-Sugeno, que dependem das funções de pertinência, por meio de um exemplo que vem sendo bastante utilizado na literatura. Além disso, vale ressaltar que os trabalhos que foram utilizados para comparação consideram o sistema não linear, enquanto que neste trabalho o sistema não linear pode ser incerto. As simulações computacionais foram realizadas utilizando o *software* Matlab com a linguagem do YALMIP (Lofberg, 2004) e o solver LMILab.

Por conveniência, serão estabelecidas algumas notações que serão utilizadas no trabalho:

$$\begin{gathered}\mathbb{K}_r = \{1, 2, \ldots, r\},\ r \in \mathbb{N}, \quad x(t) = x, \\ V(x(t)) = V(x) = V, \quad \alpha_i(x(t)) = \alpha_i, \\ (A, B, C, D, G, H, K)(\alpha) \\ = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i, K_i) \\ \text{com} \quad \alpha_i \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1.\end{gathered} \tag{1}$$

2 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno e Resultados Preliminares

Nesta seção são apresentados resultados preliminares que serão utilizados no trabalho.

Definição 1 *Sejam* $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$. *O espaço normado* $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2[0, \infty)$ *é definido por*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \{w : \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt < \infty\} \\ &= \{w : \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt < \infty\}\end{aligned} \tag{2}$$

sendo $\|\cdot\|$ *a norma euclidiana.*

Assim, a norma induzida (ganho induzido) $\mathcal{L}_2$ é denotada e dada por

$$\|w(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}.$$

Considere o modelo fuzzy Takagi-Sugeno como descrito em (Takagi and Sugeno, 1985; Tuan et al., 2001):

$$\begin{array}{l}\underline{\textit{Regra i:}}\ \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_l^i,\\ \text{ENTÃO}\begin{cases}\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + H_i w(t),\\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t),\end{cases}\end{array} \quad (3)$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$, M_j^i, $j \in \mathbb{K}_l$ é o conjunto fuzzy j da regra i, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada, $w(t) \in \mathbb{R}^p$ a entrada exógena tal que $w(t) \in \mathcal{L}_2[0,\infty)$, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor de saída, $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $H_i \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $D_i \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $G_i \in \mathbb{R}^{q\times p}$ e $z_1(t), \dots, z_l(t)$ são as variáveis premissas, que neste artigo serão as variáveis de estado e podem depender de parâmetros incertos.

De (Tanaka et al., 1998), $\dot{x}(t)$ e $y(t)$ dados em (3) podem ser escritos da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t), \quad (4)$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t) + G(\alpha)w(t), \quad (5)$$

sendo $\alpha_i(x(t))$ o peso normalizado de cada modelo local do sistema e $(A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i)$ definidos em (3), para $i \in \mathbb{K}_r$.

Considerando que o vetor de estado $x(t)$ esteja disponível, do modelo fuzzy (3), os reguladores fuzzy via compensação distribuída paralela possuem a seguinte estrutura (Tanaka et al., 1998):

$$\begin{array}{l}\underline{\textit{Regra j:}}\ \text{SE } z_1(t) \text{ é } M_1^j \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_l^j,\\ \qquad\quad \text{ENTÃO } u(t) = -K_j x(t).\end{array} \quad (6)$$

De forma análoga à obtenção de (4) e (5), e de (6) pode-se considerar a lei de controle (Tanaka et al., 1998)

$$u(t) = u_\alpha = -\sum_{j=1}^{r} \alpha_j K_j x(t) = -K(\alpha)x(t). \quad (7)$$

3 Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$

Para sistemas lineares, a norma $\mathcal{H}_\infty$, que é igual ao ganho induzido $\mathcal{L}_2$, estabelece um limitante para a influência da entrada exógena $w(t)$ na saída controlada $y(t)$, e é calculada como

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\|w\|\neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|w\|_2}, \quad w \in \mathcal{L}_2, \quad (8)$$

sendo $H(s)$ a função de transferência.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema é definida como sendo o valor mínimo de γ, $\gamma > 0$ finito, tal que

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma \Rightarrow \|y\|_2 < \gamma\|w\|_2 \Rightarrow y^T y < \gamma^2 w^T w. \quad (9)$$

A estabilidade de um sistema linear realimentado com norma $\mathcal{H}_\infty$ é assegurada se, dada uma função de Lyapunov V, a desigualdade (10) e verdadeira

$$\dot{V}(x) + y^T y - \gamma^2 w^T w < 0 \quad (10)$$

Vale lembrar que, para sistemas não lineares, o ganho induzido $\mathcal{L}_2$ existe, mas não é igual à norma $\mathcal{H}_\infty$, visto que não existe norma $\mathcal{H}_\infty$ para operadores não lineares. Mas, no domínio do tempo, a interpretação é a mesma que a dos sistemas lineares e, desta forma, a extensão do problema de controle $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas não lineares, isto é, o problema de minimização do ganho induzido $\mathcal{L}_2$ costuma ser referido na literatura como controle $\mathcal{H}_\infty$ não linear, certamente para manter a padronização da literatura.

Definição 2 (de Souza, 2013) *Considere o conjunto de índices $\Omega_H(t)$ definido abaixo:*

$$\begin{aligned}\Omega_H(t) &= \arg\min_{i\in\mathbb{K}_N} x^T(t)H_i x(t)\\ &= \{j \in \mathbb{K}_N : x^T(t)H_j x(t) = \min_{i\in\mathbb{K}_N} x^T(t)H_i x(t)\},\end{aligned}$$

sendo $H_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $i \in \mathbb{K}_N$, e $x(t) \in \mathbb{R}^n$. O menor índice $j \in \Omega_H(t)$ será denotado por

$$\arg\min_{i\in\mathbb{K}_N}{}^{*}\{x(t)^T H_i x(t)\} = \min_{j\in\Omega_H(t)} j.$$

Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo da seguinte forma:

$$V(x) = \min_{k\in\mathbb{K}_N}\{x^T(t)P_k x(t)\}, \quad (11)$$

sendo P_k, $k \in \mathbb{K}_N$, matrizes simétricas positivas definidas.

Assim, considerando uma função de Lyapunov quadrática por partes (11) e da Definição 2, o controlador chaveado proposto em (de Souza, 2013; Souza, Teixeira, Cardim and Assunção, 2014), pode ser escrito como segue:

$$\begin{array}{rcl} u(t) &=& u_{\nu\sigma} = -K_{\nu\sigma}x(t),\\ \sigma &=& \arg\min_{k\in\mathbb{K}_N}{}^{*}\{x^T P_k x\},\\ \nu &=& \arg\min_{j\in\mathbb{K}_r}{}^{*}\{x^T Q_{j\sigma} x\}.\end{array} \quad (12)$$

Neste contexto, considerando a função de Lyapunov quadrática por partes (11) e o controlador chaveado (12), é proposto o seguinte teorema.

Teorema 1 *Suponha que existam matrizes simétrica positivas definidas $X_k, R_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes simétricas $Z_{ik} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrizes $M_{jk} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e um escalar $\beta < 0$, tais que, as seguintes condições sejam verdadeiras para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_N$:*

$$\min \mu$$

$$\textit{sujeito a}$$

$$-B_i M_{jk} - M_{jk}^T B_i^T - Z_{ik} - R_{jk} \preceq 0; \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} A_i X_k + X_k A_i^T + Z_{ik} + R_{ik} - \beta X_k & * & * \\ H_i^T & -\mu I & * \\ C_i X_k - D_i M_{jk} & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0. \quad (14)$$

Então a lei de controle chaveada (12), com $Q_{jk} = X_k^{-1} R_{jk} X_k^{-1}$, $P_k = X_k^{-1}$ e os ganhos do controlador dados por $K_{jk} = M_{jk} X_k^{-1}$, $j \in \mathbb{K}_r$, $k \in \mathbb{K}_N$, *torna o ponto de equilíbrio $x = 0$, do sistema* (4)-(5)*, globalmente assintoticamente estável, com norma $\mathcal{H}_\infty$, $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$.*

Prova: Considere uma candidata a função de Lyapunov quadrática por partes dada em (11). Da análise apresentada em (Chen et al., 2012; de Souza, 2013), se $V(x(t^+)) \leq V_\sigma(x(t^+))$ então $\dot{V}(x(t)) \leq \dot{V}_\sigma(x(t))$. Assim, de (4), (5), (12) e (10), e lembrando que $\beta < 0$, seque que:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(x) - \beta V(x) + y^T y - \gamma^2 w^T w \\
&\leq \dot{V}_\sigma(x) - \beta V_\sigma(x) + y^T y - \gamma^2 w^T w \\
&= x^T P_\sigma \dot{x} + \dot{x}^T P_\sigma x - x^T \beta P_\sigma x + y^T y - \gamma^2 w^T w \\
&= x^T [P_\sigma A(\alpha) + A(\alpha)^T P_\sigma - P_\sigma B(\alpha) K_\sigma \\
&\quad -K_\sigma^T B(\alpha)^T P_\sigma - \beta P_\sigma \\
&\quad +(C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma})^T (C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma})]x \\
&\quad x^T [P_\sigma H(\alpha) + (C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma})^T G(\alpha)]w \\
&\quad +w^T [H(\alpha)^T P_\sigma + G(\alpha)^T (C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma})]x \\
&\quad +w^T [G(\alpha)^T G(\alpha) - \gamma^2 I]w
\end{aligned} \tag{15}$$

Agora, supondo que existam matrizes simétricas $\bar{Z}_{ik}, Q_{jk} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sendo $Q_{jk} \succ 0$, tais que:

$$-P_k B_i K_{jk} - K_{jk}^T B_i^T P_k \preceq \bar{Z}_{ik} + Q_{jk}, \tag{16}$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r, \quad k \in \mathbb{K}_N$.

Assim,

$$x^T [-P_\sigma B_i K_{\nu\sigma} - K_{\nu\sigma}^T B_i^T P]x \preceq x^T [\bar{Z}_{i\sigma} + Q_{j\sigma}]x$$

e de (12) segue que

$$x^T Q_{\nu\sigma} x = \min_{i\in\mathbb{K}_r} (x^T Q_{i\sigma} x) \leq \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^T Q_{i\sigma} x. \tag{17}$$

De (15), (16) e (17) segue que:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) + y^T y - \gamma^2 w^T w &\leq x^T \Delta_{11} x \\
&+ x^T \Delta_{21}^T w + w^T \Delta_{21} x + w^T \Delta_{22} w
\end{aligned} \tag{18}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= P_\sigma A(\alpha) + A(\alpha)^T P_\sigma + \bar{Z}(\alpha)_\sigma + Q(\alpha)_\sigma - \beta P_\sigma \\
&\quad +(C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma})^T (C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma}) && (19)\\
\Delta_{21} &= H(\alpha)^T P_\sigma + G(\alpha)^T (C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma}) && (20)\\
\Delta_{22} &= G(\alpha)^T G(\alpha) - \gamma^2 I && (21)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{V} + y^T y - \gamma^2 w^T w \leq \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21}^T \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \tag{22}$$

Assim, $\dot{V}(x) + y^T y - \gamma^2 w^T w < 0$ (para $x \neq 0$) se

$$\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21}^T \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{23}$$

Note que (23) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & * \\ H(\alpha)^T P_\sigma & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{31}^T \\ G(\alpha)^T \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} \Omega_{31}^T \\ G(\alpha)^T \end{bmatrix}^T, \tag{24}$$

sendo

$$\Omega_{11} = P_\sigma A(\alpha) + A(\alpha)^T P_\sigma + \bar{Z}(\alpha)_\sigma + Q(\alpha)_\sigma - \beta P_\sigma \tag{25}$$

$$\Omega_{31} = C(\alpha) - D(\alpha)K_{\nu\sigma} \tag{26}$$

De (1) e aplicando complemento de Schur em (24) temos que $\dot{V}(x) + y^T y - \gamma^2 w^T w < 0$ (para $x \neq 0$) se:

$$\begin{bmatrix} P_k A_i + A_i^T P_k + \bar{Z}_{ik} + Q_{ik} - \beta P_k & * & * \\ H_i P_k & -\gamma^2 I & * \\ C_i - D_i K_{jk} & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{27}$$

Agora, definindo $\mu = \gamma^2$, $X_k = P_k^{-1}$, $Z_{ik} = X_k \bar{Z}_{ik} X_k$, $R_{ik} = X_k Q_{ik} X_k$, and $M_{jk} = K_{jk} X_k$. Pré e pós multiplicando a equação (16) por X_k, obtém-se (13) e pré e pós multiplicando a equação (27) pela matriz $\mathrm{diag}\{X_k, I, I\}$, obtém-se (14). □

Observação 1 *Note que a lei de controle chaveada* (12) *não utiliza as funções de pertinência α_i, $i \in \mathbb{K}_r$, que podem apresentar expressões complicadas para implementações práticas ou dependerem de incertezas da planta e que seriam necessárias para implementar a lei de controle* (7) *que é amplamente utilizada. Assim, a lei de controle proposta pode oferecer uma alternativa relativamente simples para a implementação do controlador.*

Observação 2 *Observamos que se $k = 1$, temos a estabilidade quadrática e, neste caso, a lei controle* (12) *pode ser simplificada como segue:*

$$u_{\nu\sigma} = -K_{\nu\sigma} x, \ \sigma = 1, \ \nu = \arg \min_{j\in\mathbb{K}_r}{}^* \{x^T Q_{j1} x\}. \tag{28}$$

Observação 3 *Vale observar que a equação* (14) *não é uma LMI, visto que existe o produto do parâmetro β pela variável X_k, mas ela pode ser resolvida facilmente por meio de uma busca unidimensional do parâmetro β.*

4 Exemplo Numérico

O exemplo a seguir tem sido utilizado para comparar as relaxações em LMIs para o controle $\mathcal{H}_\infty$ de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Considere o sistema caótico de Lorenz, como descrito em, (Montagner et al., 2009):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\eta_1 x_1(t) + \eta_1 x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \eta_2 x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - \eta_3 x_3(t). \end{cases} \tag{29}$$

O modelo fuzzy Takagi-Sugeno é dado por (3) e

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\eta_1 & \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & -1 & 20 \\ 0 & -20 & -\eta_3 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -\eta_1 & \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -\eta_3 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_3 \end{bmatrix}, \\ D_1 &= \begin{bmatrix} 0.1\eta_1 & 0.1\eta_1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} -0.1\eta_2 & -0.1\eta_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & G_1 = G_2 = 0_{3\times 3},\ C_1 = \eta_1 I_{3\times 3},\ C_2 = \eta_2 I_{3\times 3}, \\ & H_1 = \eta_1 I_{3\times 3},\ H_2 = -\eta_2 I_{3\times 3}. \end{aligned} \tag{30}$$

Considerando $\eta_1 = 5$, $\eta_2 = 30$ e $\eta_3 = 2$, a metodologia proposta foi comparada com os procedimento propostos em (Tuan et al., 2001; Liu and Zhang, 2003; Delmotte et al., 2007; Montagner et al., 2009). Na Tabela 1 pode ser observado os resultados obtidos em cada projeto e, como pode ser visto, a metodologia proposta apresentou um resultado intermediário. Porém, vale ressaltar que a comparação foi feita com procedimento que necessitam do acesso aos pesos normalizados α_i, $i \in \mathbb{K}_r$, para implementação de suas leis de controle. No entanto, a metodologia proposta não necessita de tais pesos para sua implementação. Assim, se os pesos normalizados forem desconhecidos devido à incertezas na planta (por exemplo), as leis de controle dos outros trabalhos não podem ser implementadas.

Tabela 1: Norma $\mathcal{H}_\infty$.

Metodologia	γ
(Delmotte et al., 2007, Problema $\mathcal{H}_{\infty 2}$)	266.59
(Montagner et al., 2009, QS)	218.01
(Tuan et al., 2001, Thm 5.1)	135.88
Teorema 1 (N=2) e β=-0.0001	**129.33**
(Liu and Zhang, 2003, Thm. 2)	122.36
(Delmotte et al., 2007, Pr. $\mathcal{H}_\infty$)	117.76
(Montagner et al., 2009, Thm. $3_{g=1,d=0}$)	116.10

5 Conclusões

Neste trabalho foi estabelecido um novo método de projeto de controle $\mathcal{H}_\infty$ chaveado, para sistemas não lineares incertos, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. A principal vantagem deste novo procedimento é a sua aplicação prática, pois elimina a necessidade de encontrar as expressões explícitas das funções de pertinência, que muitas vezes podem ser longas e/ou complexas, ou não serem conhecidas por terem incertezas.

É notável que, em termos de relaxamento, a metodologia proposta ainda precisa melhorar, visto que apresentou apenas um resultado intermediário para a norma $\mathcal{H}_\infty$. Assim, os autores já estão trabalhando no propósito desta melhoria.

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES, a FAPESP e ao CNPq (processo 424066/2016-5) pelo apoio financeiro.

Referências

Arrifano, N. S. D., Oliveira, V. A. and Cossi, L. V. (2006). Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: a piecewise Lyapunov approach, *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica* **17**: 213–225.

Cao, S. G., Rees, N. W. and Feng, G. (2000). $\mathcal{H}_\infty$ control of uncertain fuzzy continuous-time systems, *Fuzzy Sets and Systems* **115**(2): 171 – 190.

Chen, Y.-J., Ohtake, H., Tanaka, K., Wang, W.-J. and Wang, H. O. (2012). Relaxed stabilization criterion for T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov-function-based switching fuzzy controller, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **20**(6): 1166–1173.

Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: an LMI approach, *IEEE Trans. on Automatic Control* **41**(3): 358–367.

de Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Moreira, M. R. and Silva, J. H. P. (2014). Projeto de controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa, *Anais XX - Congresso Brasileiro de Automática - CBA*, Belo Horizonte, pp. 2194 – 2201.

de Souza, W. A. (2013). *Projeto de controladores robustos chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno*, Doutorado em engenharia elétrica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Unversidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2010). $\mathcal{H}_\infty$ control for continuous-time switched linear systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **132**(4): 7.

Delmotte, F., Guerra, T. M. and Ksantini, M. (2007). Continuous Takagi-Sugeno's models: Reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **15**(3): 426–438.

Dong, J. and Yang, G.-H. (2008a). Dynamic output feedback control synthesis for continuous-time T-S fuzzy systems via a switched fuzzy control scheme, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **38**(4): 1166–1175.

Dong, J. and Yang, G.-H. (2008b). State feedback control of continuous-time T-S fuzzy systems via switched fuzzy controllers, *Information Sciences* **178**(6): 1680–1695.

Doyle, J. C., Glover, K., Khargonekar, P. P. and Francis, B. A. (1989). State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems, *IEEE Trans. on Automatic Control* **34**(8): 831–847.

Feng, G. (2004). $\mathcal{H}_\infty$ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **34**(1): 283–292.

Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **4**(4): 421–448.

Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems, *SIAM J. Control Optim.* **45**(5): 1915–1930.

Glover, K. and Doyle, J. C. (1988). State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an $\mathcal{H}_\infty$-norm bound and relations to relations to risk sensitivity, *Systems & Control Letters* **11**(3): 167 – 172.

Iwasaki, T. and Skelton, R. (1994). All controllers for the general $\mathcal{H}_\infty$ control problem: LMI existence conditions and state space formulas, *Automatica* **30**(8): 1307 – 1317.

Jabri, D., Guelton, K., Manamanni, N., Jaadari, A. and Duong, C. C. (2012). Robust stabilization of nonlinear systems based on a switched fuzzy control law, *J. Control Engineering and Appl. Informatics* **14**(2): 40–49.

Ji, Z., Guo, X., Wang, L. and Xie, G. (2006). Robust $\mathcal{H}_\infty$ control and stabilization of uncertain switched linear systems: A multiple lyapunov functions approach, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **128**(3): 696 – 700.

Kim, J. H. and Park, H. B. (1999). $\mathcal{H}_\infty$ state feedback control for generalized continuous/discrete time-delay system, *Automatica* **35**(8): 1443 – 1451.

Liu, X. D. and Zhang, Q. (2003). New approaches to $\mathcal{H}_\infty$ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI, *Automatica* **39**(9): 1571 – 1582.

Lofberg, J. (2004). YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *2004 IEEE Int. Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284 –289.

Lu, W.-M. and Doyle, J. C. (1993). $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear systems: a convex characterization.

Lu, W.-M. and Doyle, J. C. (1995). $\mathcal{H}_\infty$ control of nonlinear systems: a convex characterization, *IEEE Trans. on Automatic Control* **40**(9).

Montagner, V. F., Oliveira, R. C. L. F. and Peres, P. L. D. (2009). Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and $\mathcal{H}_\infty$ control of takagi-sugeno fuzzy systems, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **17**(4): 863–873.

Packard, A. and Doyle, J. (1993). The complex structured singular value, *Automatica* **29**(1): 71 – 109.

Peres, P., Geromel, J. and Souza, S. (1993). $\mathcal{H}_\infty$ guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems, *Systems & Control Letters* **20**(6): 413 – 418.

Silva, J. H. P., Júnior, E. M., Souza, W., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., Cardim, R. and Moreira, M. R. (2012). Controle $\mathcal{H}_\infty$ com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos, *Anais - XIX Congresso Brasileiro de Automática -CBA*, Campina Grande, PB.

Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems,* **22**(6): 1720–1727.

Souza, W. A., Teixeira, M. C. M., Santim, M. P. A., Cardim, R. and Assunção, E. (2014). Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models, *Mathematical Problems in Engineering* **2014**: 11.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* **15**(1): 116–132.

Tanaka, K., Ikeda, T. and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based designs, **6**(2): 250–265.

Tanaka, K., Iwasaki, M. and Wang, H. O. (2000a). Stability and smoothness conditions for switching fuzzy systems, *Proc. Amer. Control Conf.*, Vol. 4, pp. 2474–2478.

Tanaka, K., Iwasaki, M. and Wang, H. O. (2000b). Stable switching fuzzy control and its application to a hovercraft type vehicle, *FUZZ IEEE 2000. The Ninth IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems*, Vol. 2, pp. 804–809.

Tuan, H., Apkarian, P., Narikiyo, T. and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **9**(2): 324–332.

van der Schaft, A. (1991). On a state space approach to nonlinear $\mathcal{H}_\infty$ control, *Systems & Control Letters* **16**(1): 1 – 8.

Xu, S. and Lam, J. (2005). Robust h infin; control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **13**(1): 82–93.

Yan, S. and Sun, Z. (2010). Study on separation principles for T-S fuzzy system with switching controller and switching observer, *Neurocomputing* **73**(13-15): 2431–2438.

Yang, B., Yu, D., Feng, G. and Chen, C. (2006). Stabilisation of a class of nonlinear continuous time systems by a fuzzy control approach, *IEE Proc.-Control Theory Appl.* **153**(4): 427–436.

Yang, G.-H. and Dong, J. (2010). Switching fuzzy dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control for nonlinear systems, *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B* **40**(2): 505–516.