

PROJETO DE FILTROS COM COMUTAÇÃO \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞ PARA SISTEMAS AFINS A TEMPO CONTÍNUO

GUILHERME K. KOLOTELO*, LUCAS N. EGIDIO*, GRACE S. DEAECTO*

**Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP
13083-860, Campinas, São Paulo, Brasil*

Emails: {gkk, egidio, grace}@fem.unicamp.br

Abstract— In this paper, a methodology for designing full-order switched affine filters for continuous-time switched affine systems is introduced. More specifically, the filter is designed along with an output-dependent stabilizing switching function, assuring a minimum \mathcal{H}_2 or \mathcal{H}_∞ guaranteed cost for the estimation error. Furthermore, it is demonstrated that the optimal guaranteed cost filter presents an observer-based structure, capable of being designed independently of the switching function, making valid the well known Separation Principle. The design conditions are expressed in terms of linear matrix inequalities, which can be solved without difficulty by means of readily available tools. One academic example and a practical application consisting in a flyback DC-DC power converter illustrate the theory.

Keywords— Switched Affine Systems, Switched Filter, \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Filtering, Linear Matrix Inequalities.

Resumo— Neste artigo é proposta uma metodologia para o projeto de filtros afins com comutação de ordem completa para sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Mais especificamente, o filtro é projetado em conjunto com uma regra de comutação estabilizante dependente da saída medida, assegurando um custo garantido mínimo \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para o erro de estimação. Além disso, é demonstrado que o filtro que garante o custo ótimo apresenta estrutura de observador e pode ser projetado de maneira independente da regra de comutação, indicando a validade do Princípio da Separação. As condições de projeto são expressas por desigualdades matriciais lineares, cuja solução pode ser encontrada utilizando-se ferramentas já disponíveis. Um exemplo acadêmico e uma aplicação prática consistindo em um conversor de potência *flyback* CC-CC ilustram a teoria.

Palavras-chave— Sistemas Afins com Comutação, Filtro com Comutação, Filtragem \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , Desigualdades Matriciais Lineares.

1 Introdução

Nas últimas décadas, sistemas com comutação vêm atraindo a atenção de pesquisadores em todo o mundo. Formando uma subclasse dos sistemas híbridos, eles são compostos por um conjunto de subsistemas e uma regra de comutação que ativa um deles a cada instante de tempo. Esta regra, também chamada de função de comutação, pode ser uma função arbitrária dependente do tempo ou uma variável de controle a ser projetada dependente do estado ou da saída. É interessante observar que uma regra adequada pode garantir estabilidade do sistema, mesmo no caso em que todos seus subsistemas são instáveis. Além disso, quando estritamente consistente, ela melhora o desempenho \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ do sistema com comutação comparado ao de cada subsistema isolado, veja (Geromel et al., 2013). Essas propriedades chamam a atenção para esta classe de sistemas, não somente do ponto de vista teórico, mas também prático. De fato, sistemas com comutação podem ser usados para modelar sistemas não-lineares, veja (Zheng and Zhang, 2017), ou situações em que a comutação é intrínseca, como no caso dos sistemas em eletrônica de potência, veja (Deaecto et al., 2010) e (Cardim et al., 2009). Além disso, os livros (Liberzon, 2003) e (Sun, 2006), bem como o artigo (Shorten et al., 2007) são referências importantes neste campo.

Até o presente momento, a literatura apresenta

vários resultados que tratam do projeto de uma função de comutação estabilizante por realimentação de estado e de saída, veja (Deaecto, 2016), (Geromel et al., 2013) e (Geromel et al., 2008). No entanto, pouca atenção foi dada a problemas de filtragem para sistemas com comutação, levando-se em conta a minimização de custos garantidos \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . Esta classe de problemas é de grande importância em aplicações práticas, devido à comum ocorrência de distúrbios na medida e à dificuldade em se medir o estado completo. As referências (Xiao et al., 2017), (Wang et al., 2016) e (Zhang and Shi, 2011) consideram o projeto de filtros com comutação para sistemas lineares em tempo contínuo, limitados ao escopo de funções de comutação dependentes do tempo e considerando custos garantidos \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . No entanto, poucas referências tratam do projeto conjunto da função de comutação e de um filtro dinâmico de ordem completa de forma a assegurar um custo garantido para o erro de estimação, veja (Duan and Wu, 2013). Nas referências mencionadas, apenas sistemas lineares foram considerados. O caso mais geral de sistemas afins com comutação é ainda menos explorado, veja (Pinto and Trofino, 2014) e (Menini et al., 2014). Esta classe de sistemas apresenta termos afins, responsáveis pela existência de vários pontos de equilíbrio, o que impõe maior dificuldade no projeto de controladores e filtros quando comparada aos sistemas lineares. As referências (Kader et al., 2018), (Deaecto, 2016), (Deaecto

and Santos, 2015) e (Scharlau et al., 2014) tratam de sistemas afins com comutação, mas apenas no que diz respeito ao projeto de controladores por realimentação de estado e de saída.

Este trabalho aborda o problema de filtragem para sistemas afins com comutação em tempo contínuo, considerando o projeto de um filtro de ordem completa em conjunto com uma regra de comutação dependente da saída medida, assegurando um custo garantido \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ para o erro de estimação. Segundo o conhecimento dos autores, o problema clássico de filtragem no contexto de sistemas afins com comutação ainda não foi abordado na literatura. Além disso, a partir das condições obtidas é provado que o filtro de custo garantido ótimo apresenta estrutura de observador e pode ser projetado independentemente da função de comutação, indicando a validade do princípio da separação, comum em teoria de controle. As condições obtidas são expressas em termos de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs), as quais podem ser resolvidas sem grande dificuldade com o uso de ferramentas já disponíveis. Um exemplo acadêmico e uma aplicação prática consistindo da mudança de pontos de operação em um conversor de potência *flyback* CC-CC ilustram a teoria e mostram a eficácia da metodologia proposta.

A notação utilizada ao longo deste texto é usual. Para matrizes quadradas, $\text{tr}(\cdot)$ indica a função traço. Para vetores ou matrizes reais, $(^T)$ refere-se à sua transposta. Para matrizes simétricas, (\bullet) indica seus blocos simétricos. Para uma matriz real X , $\text{He}\{X\}$ define o operador hermitiano $\text{He}\{X\} := X + X^T$. O símbolo \mathbb{R} representa o conjunto de números reais. O conjunto $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$ é composto pelos primeiros N números naturais positivos. Para qualquer matriz simétrica, $X \succ 0$ ($X \succeq 0$) denota uma matriz (semi)definida positiva. O simplex unitário composto de todos os vetores não negativos $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tal que $\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i = 1$ é indicado por Λ_N . A combinação convexa de matrizes $\{X_1, \dots, X_N\}$ é indicada por $X_\lambda = \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i X_i$, para algum $\lambda \in \Lambda_N$. Uma matriz quadrada é dita ser Hurwitz se seus autovalores se situarem na região aberta $\text{Re}\{s\} < 0$ do plano complexo. Finalmente, \mathcal{L}_2 define o conjunto de trajetórias quadraticamente integráveis.

2 Formulação do Problema

Considere o sistema afim com comutação com a seguinte realização em espaço de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\sigma x(t) + H_\sigma w(t) + b_\sigma, \quad x(0) = x_e \\ y(t) &= C_\sigma x(t) + D_\sigma w(t) \\ z(t) &= E_\sigma x(t) + G_\sigma w(t) \end{aligned} \quad (1)$$

no qual $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados, não disponível para realimentação, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a

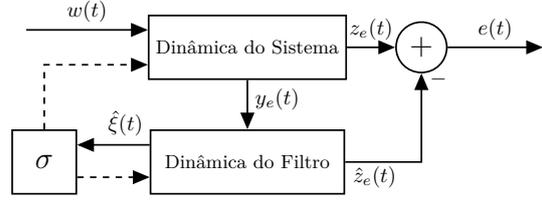


Figura 1: Interconexão do sistema.

perturbação externa, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é a saída medida, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ é a saída de desempenho e $\sigma(y(t)) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$ é a função de comutação a ser projetada, que ativa um dos N subsistemas, a cada instante de tempo.

Sempre que $b_i \neq 0$, para algum $i \in \mathbb{K}$, o sistema com comutação possui vários pontos de equilíbrio. O conjunto de pontos de equilíbrio alcançáveis é definido como

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = -A_\lambda^{-1} b_\lambda, \lambda \in \mathcal{H}\} \quad (2)$$

em que \mathcal{H} indica um subconjunto de Λ_N tal que A_λ é Hurwitz. Sem perda de generalidade, pode ser feita a mudança de variável $\xi(t) = x(t) - x_e$ de forma a mover o ponto de equilíbrio x_e de (1) para a origem, o que resulta no seguinte sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_\sigma \xi(t) + H_\sigma w(t) + \ell_\sigma, \quad \xi(0) = 0 \\ y_e(t) &= C_\sigma \xi(t) + D_\sigma w(t) \\ z_e(t) &= E_\sigma \xi(t) + G_\sigma w(t) \end{aligned} \quad (3)$$

com $\ell_i = A_i x_e + b_i, \forall i \in \mathbb{K}$, sendo o novo termo afim, $y_e(t) = y(t) - C_\sigma x_e$ e $z_e(t) = z(t) - E_\sigma x_e$ as saídas transladadas. Note que quando $x_e \in X_e$, temos $\ell_\lambda = 0$ para o seu vetor $\lambda \in \Lambda_N$ associado.

Considere um filtro afim com comutação de ordem completa \mathcal{F}_σ com representação em espaço de estado dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= \hat{A}_\sigma \hat{\xi}(t) + \hat{B}_\sigma y_e(t) + \hat{\ell}_\sigma, \quad \hat{\xi}(0) = 0 \\ \hat{z}_e(t) &= \hat{E}_\sigma \hat{\xi}(t) + \hat{F}_\sigma y_e(t) \end{aligned} \quad (4)$$

com $\hat{\xi}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ sendo o vetor de estados do filtro e $\hat{z}_e(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$, a saída estimada. Conectando o filtro ao sistema (3) como na Figura 1 e definindo o erro de estimação como $e(t) = z_e(t) - \hat{z}_e(t)$, o seguinte sistema aumentado é obtido

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}(t) &= \tilde{A}_\sigma \tilde{\xi}(t) + \tilde{H}_\sigma w(t) + \tilde{\ell}_\sigma, \quad \tilde{\xi}(0) = 0 \\ e(t) &= \tilde{E}_\sigma \tilde{\xi}(t) + \tilde{G}_\sigma w(t) \end{aligned} \quad (5)$$

em que $\tilde{\xi}(t) = [\xi(t)^T \quad \hat{\xi}(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n_x}$ é seu vetor de estados e

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\ell}_i = \begin{bmatrix} \ell_i \\ \hat{\ell}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \hat{B}_i D_i \end{bmatrix} \\ \tilde{E}_i &= [E_i - \hat{F}_i C_i \quad -\hat{E}_i], \quad \tilde{G}_i = G_i - \hat{F}_i D_i \end{aligned} \quad (6)$$

suas matrizes, para todo $i \in \mathbb{K}$.

O principal objetivo deste trabalho consiste em determinar as matrizes do filtro $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{E}_i, \hat{F}_i$ e $\hat{\ell}_i$, de dimensões apropriadas, em conjunto com uma função de comutação $\sigma(y(t))$ de maneira a garantir estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\tilde{\xi} = 0$, o que implica em $x(t) \rightarrow x_e$ quando $t \rightarrow \infty$, para um certo $x_e \in X_e$ de interesse, anteriormente escolhido. Além disso, limitantes superiores para os índices de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ devem ser assegurados para o erro de estimação. Estes índices de desempenho foram definidos em (Geromel et al., 2013) da seguinte maneira:

- **Índice de desempenho \mathcal{H}_2 :** Para subsistemas estritamente próprios ($\tilde{G}_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$), o erro de estimação $e_k(t)$ associado à perturbação do tipo impulsiva $w(t) = \delta(t)\psi_k$, com vetores $\psi_k, k \in \{1, \dots, n_w\}$, formando a base padrão, permite definir o índice \mathcal{H}_2 como

$$J_2(\sigma, \mathcal{F}_\sigma) = \sum_{k=1}^{n_w} \|e_k(t)\|_2^2 \quad (7)$$

- **Índice de desempenho \mathcal{H}_∞ :** Para o erro de estimação $e(t)$ associado às perturbações $w(t) \in \mathcal{L}_2, w(t) \neq 0$, o índice \mathcal{H}_∞ é definido, para um $\rho > 0$, como

$$J_\infty(\sigma, \mathcal{F}_\sigma) = \sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|e(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2} < \rho \quad (8)$$

Antes de apresentarmos os resultados principais, alguns lemas importantes referentes ao custo garantido \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas afins com comutação são retomados da literatura. O seguinte lema apresenta o resultado para o caso \mathcal{H}_2 .

Lema 1 *Considere o sistema afim com comutação (3) onde $G_i = 0, \forall i \in \mathbb{K}$, e um certo $x_e \in X_e$ escolhido, com seu vetor $\lambda_0 \in \mathcal{H}$ associado. Se existirem matrizes $P = P^T \succ 0$ e $Q_i = Q_i^T, i \in \mathbb{K}$, tais que*

$$A_i^T P + P A_i + E_i^T E_i + Q_i \prec 0, \quad i \in \mathbb{K} \quad (9)$$

$$Q_{\lambda_0} \succeq 0$$

então, a seguinte regra de comutação

$$\sigma(\xi) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\xi^T Q_i \xi + 2\xi^T P \ell_i \quad (10)$$

torna o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido

$$J_2(\cdot) < \text{tr} \left(H_{\sigma(0)}^T P H_{\sigma(0)} \right) \quad (11)$$

Prova: A prova segue da definição do custo garantido disponível em (Deaecto et al., 2010)

$$\|z_e(t)\|_2^2 < \xi_0^T P \xi_0 \quad (12)$$

que foi obtido para o sistema (3) com $w(t) = 0$ e $\xi(0) = \xi_0$. Note que este sistema com $\xi(0) =$

$H_{\sigma(0)}\psi_k$ é equivalente à (3) sempre que a perturbação impulsiva $w(t) = \delta(t)\psi_k$ for considerada. Dessa forma, através de um procedimento similar ao realizado em (Geromel et al., 2008), tem-se

$$\begin{aligned} J_2(\cdot) &= \sum_{k=1}^{n_w} \|z_{e,k}(t)\|_2^2 < \sum_{k=1}^{n_w} \xi^T(0) P \xi(0) \\ &= \sum_{k=1}^{n_w} \psi_k^T H_{\sigma(0)}^T P H_{\sigma(0)} \psi_k \\ &= \text{tr} \left(H_{\sigma(0)}^T P H_{\sigma(0)} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

Onde $z_{e,k}(t)$ é associado a $w(t) = \delta(t)\psi_k$. A prova está concluída. \square

De forma similar, o seguinte lema, introduzido em (Deaecto and Santos, 2015), assegura um limitante superior para o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ .

Lema 2 *Considere o sistema afim com comutação (3) e um certo $x_e \in X_e$ escolhido, com seu vetor $\lambda_0 \in \mathcal{H}$ associado. Se existirem matrizes $P = P^T \succ 0, Q_i = Q_i^T, i \in \mathbb{K}$ e $\rho > 0$, tais que*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + Q_i & \bullet & \bullet \\ H_i^T P & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (14)$$

$$Q_{\lambda_0} \succeq 0$$

então, a regra de comutação (10) torna o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido

$$J_\infty(\cdot) < \rho \quad (15)$$

Prova: A prova pode ser encontrada em (Deaecto and Santos, 2015). \square

Na próxima seção, estes resultados são generalizados para possibilitar tratarmos do projeto de filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas afins com comutação.

3 Resultados Principais

Primeiramente, as estruturas das variáveis matriciais \tilde{P}, \tilde{Q}_i e $\hat{\ell}_i$ são introduzidas

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_i \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\hat{\ell}_i = -V^{-1} Y \ell_i$$

para todo $i \in \mathbb{K}$. Estas escolhas específicas são de grande importância para a função de comutação já que elas eliminam a dependência do estado do sistema que é desconhecido. Assim a regra de comutação (10) é redefinida para o sistema aumentado, da seguinte maneira

$$\sigma(\hat{\xi}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\hat{\xi}^T Q_i \hat{\xi} + 2\hat{\xi}^T (V^T \ell_i + \hat{Y} \hat{\ell}_i) \quad (17)$$

Note que a escolha de $\hat{\ell}_i$ em (16) é importante para se assegurar que as primeiras n_x linhas do termo $\tilde{P} \tilde{\ell}_i$, que multiplica o estado do sistema, sejam nulas, dessa forma $\sigma(\tilde{\xi}) = \sigma(\hat{\xi})$.

3.1 Projeto de Filtro \mathcal{H}_2

O seguinte teorema trata da generalização do Lema 1 para o sistema aumentado (5), levando em conta a minimização de um limitante superior do índice J_2 definido em (7). Considere $G_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, de forma a tratar somente subsistemas estritamente próprios.

Teorema 1 *Considere o sistema afim com comutação (5) e um certo $x_e \in X_e$ escolhido, com seu vetor $\lambda_0 \in \mathcal{H}$ associado. Se existirem matrizes simétricas Z, Y, W, Q_i e matrizes L_i , $i \in \mathbb{K}$, tais que*

$$Q_{\lambda_0} \succeq 0 \quad (18)$$

$$A_i^T Z + Z A_i + Q_i \prec 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (19)$$

$$\text{He} \{Y A_i + L_i C_i\} + E_i^T E_i \prec 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} W & \bullet & \bullet \\ Z H_j & Z & \bullet \\ Y H_j + L_j D_j & Z & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (21)$$

com $j = \sigma(0)$, então a seguinte regra de comutação

$$\sigma(\hat{\xi}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\hat{\xi}^T Q_i \hat{\xi} + 2\hat{\xi}^T Z l_i \quad (22)$$

em conjunto com o filtro (4), cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= (Y - Z)^{-1} (A_i^T Z + Y A_i + L_i C_i) \\ \hat{B}_i &= (Z - Y)^{-1} L_i \\ \hat{E}_i &= E_i, \quad \hat{F}_i = 0, \quad \hat{l}_i = (Y - Z)^{-1} Y l_i \end{aligned} \quad (23)$$

asseguram o custo garantido \mathcal{H}_2

$$J_2(\sigma) < \text{tr}(W) \quad (24)$$

para o erro de estimação.

Prova: A prova consiste em demonstrar a validade do Lema 1 sempre que as condições do Teorema 1 são satisfeitas. Seja a matriz \tilde{P} dada em (16), assim como a matriz de transformação $\tilde{\Gamma}$ e matriz a \tilde{P}^{-1} dadas por

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} I & I \\ U^T X^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{P}^{-1} = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix} \quad (25)$$

As seguintes relações asseguram que $\tilde{P}^{-1} \tilde{P} = I$:

$$\begin{aligned} XY + UV^T &= I, & XV + U\hat{Y} &= 0 \\ U^T Y + \hat{X} V^T &= 0, & U^T V + \hat{X} \hat{Y} &= I \end{aligned} \quad (26)$$

Considere a primeira desigualdade em (9), para o sistema (5), multiplicada pela matriz de transformação $\tilde{\Gamma}$ da seguinte forma

$$\text{He} \{ \tilde{\Gamma}^T \tilde{A}_i^T \tilde{P} \tilde{\Gamma} \} + \tilde{\Gamma}^T \tilde{E}_i^T \tilde{E}_i \tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^T \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma} \prec 0 \quad (27)$$

Definindo $Z = X^{-1}$ e $L_i = V \hat{B}_i$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^T \tilde{A}_i^T \tilde{P} \tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} A_i^T Z & A_i^T Y + C_i^T L_i^T + Z U \hat{A}_i^T V^T \\ A_i^T Z & A_i^T Y + C_i^T L_i^T \end{bmatrix} \\ \tilde{E}_i \tilde{\Gamma} &= [E_i - \hat{F}_i C_i - \hat{E}_i U^T Z \quad E_i - \hat{F}_i C_i] \\ \tilde{\Gamma}^T \tilde{Q}_i \tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} Z U Q_i U^T Z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

Adotando $U = X = Z^{-1}$, sem perda de generalidade, note que de (26) obtemos as matrizes $V = V^T = Z - Y$ e $\hat{Y} = -V$. Além disso, a partir das identidades em (23), pode-se observar que as desigualdades (19) e (20) asseguram a validade de (27) considerando-se (28) e, conseqüentemente, a primeira desigualdade em (9) é verificada. Note que a escolha de \hat{F}_i é feita de forma a garantir que $\tilde{G}_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, já que $G_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$. Além disso, a desigualdade (18) é satisfeita se e somente se $\tilde{Q}_{\lambda_0} \succeq 0$ e, dessa forma, a segunda desigualdade em (9) é verificada. Como foi comentado anteriormente, a escolha de \hat{l}_i em (23), que respeita a estrutura definida em (16), assegura que (10) fornece (17). Portanto, devido a $\hat{Y} = -V$ e $Z = V + Y$, a regra de comutação (22) é obtida.

Finalmente, (21) pode ser expressa como

$$\begin{bmatrix} W & \bullet \\ \tilde{\Gamma}^T \tilde{P} \tilde{H}_j & \tilde{\Gamma}^T \tilde{P} \tilde{\Gamma} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (29)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^T \tilde{P} \tilde{H}_j = \begin{bmatrix} Z H_j \\ Y H_j + L_j D_j \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Gamma}^T \tilde{P} \tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} Z & \bullet \\ Z & Y \end{bmatrix} \quad (30)$$

Multiplicando-se à esquerda desta desigualdade por $\text{diag}(I, (\tilde{\Gamma}^T)^{-1})$, à direita por sua transposta, e aplicando o complemento de Schur com respeito à \tilde{P} obtemos $W \succ \tilde{H}_j^T \tilde{P} \tilde{H}_j$. Dessa maneira, $J_2(\sigma) < \text{tr}(W)$ é garantido assim como no Lema 1. A prova está concluída. \square

Comentário 1 *Perceba que a escolha de $\sigma(0)$ é particularmente importante para o índice de desempenho. Duas propostas podem ser de interesse ao projetista, primeiramente, a escolha de j de maneira que J_2 seja minimizado. De forma alternativa, pode-se escolher j de pior caso, que torna o projeto do filtro robusto quanto à condição inicial $\sigma(0)$, veja (Geromel et al., 2008). É também importante ressaltar que não há imposição sobre as matrizes A_i serem Hurwitz, já que Q_i , $\forall i \in \mathbb{K}$, são indefinidas. Ao invés disso, é necessário que A_{λ_0} seja Hurwitz, o que é uma condição menos conservadora. Observe também que a desigualdade (20) requer a existência de matrizes $K_i = Y^{-1} L_i$ tais que $A_i + K_i C_i$ sejam quadraticamente estáveis para todo $i \in \mathbb{K}$. Esta imposição, porém, não é muito severa, já que os ganhos K_i são dependentes de índice.*

Um ponto importante do teorema é que o filtro de custo garantido ótimo possui estrutura de observador, como é demonstrado no seguinte corolário.

Corolário 1 Considere o sistema afim com comutação (6) e um certo $x_e \in X_e$ escolhido, com seu vetor $\lambda_0 \in \mathcal{H}$ associado. Se existirem uma matriz $Z \succ 0$, matrizes simétricas Y, W, Q_i , e matrizes $L_i, i \in \mathbb{K}$, tais que as desigualdades (20),

$$A_{\lambda_0}^T Z + Z A_{\lambda_0} \prec 0 \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} W & \bullet \\ YH_j + L_j D_j & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (32)$$

sejam satisfeitas, então a regra de comutação (22) com

$$Q_i = (A_{\lambda_0} - A_i)^T Z + Z(A_{\lambda_0} - A_i) \quad (33)$$

em conjunto com o filtro (4), cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= A_i - \hat{B}_i C_i, & \hat{B}_i &= -Y^{-1} L_i \\ \hat{E}_i &= E_i, & \hat{F}_i &= 0, & \hat{\ell}_i &= \ell_i \end{aligned} \quad (34)$$

asseguram o custo garantido \mathcal{H}_2 em (24) para o erro de estimação.

Prova: Primeiramente, note que (31) é equivalente à (18) junto com (19) e que as matrizes Q_i , importantes para implementação da regra de comutação (22), podem ser obtidas como em (33), veja o Teorema 2 de (Geromel and Deaecto, 2014). Além disso, das condições do Teorema 1, a escolha $(\epsilon Z, \epsilon Q_i) \rightarrow (Z, Q_i)$, com $\epsilon \rightarrow 0^+$ pode ser feita sem impor conservadorismo. Dessa forma, (32) é obtido de (21) e as identidades em (34) seguem de (23). Finalmente, a regra (22) não é afetada já que $\epsilon > 0$ é escalar. A prova está concluída. \square

Comentário 2 O Corolário 1 torna evidente que o filtro de custo garantido \mathcal{H}_2 mínimo do Teorema 1 apresenta estrutura de observador e, conseqüentemente, é mais simples para implementação. Além disso, um ponto importante é que a regra de comutação e o filtro podem ser projetados de maneira independente, já que Z , a única variável presente na função de comutação, não exerce influência sobre as LMIs (20) e (32) utilizadas no problema de otimização. Isso mostra que neste caso o princípio da separação, muito conhecido no âmbito de teoria de controle, é assegurado. Também temos que o Corolário 1 engloba resultados existentes na literatura, onde os índices de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ não são considerados. Ademais, ele não requer que os subsistemas sejam quadraticamente estáveis, como é necessário em (Yoshimura et al., 2013).

3.2 Projeto de Filtro \mathcal{H}_∞

Esta subseção generaliza o Lema 2 para filtragem \mathcal{H}_∞ em sistemas afins com comutação.

Teorema 2 Considere o sistema afim com comutação (5) e um certo $x_e \in X_e$ escolhido, com seu

vetor $\lambda_0 \in \mathcal{H}$ associado. Se existirem matrizes simétricas Z, Y e Q_i , matrizes N_i e $L_i, i \in \mathbb{K}$ e $\rho > 0$, de forma que

$$Y \succ Z \succ 0 \quad (35)$$

$$Q_{\lambda_0} \succeq 0 \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{ZA_i\} + Q_i & \bullet \\ H_i^T Z & -\rho I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{YA_i + L_i C_i\} & \bullet & \bullet \\ H_i^T Y + D_i^T L_i^T & -\rho I & \bullet \\ E_i - N_i C_i & G_i - N_i D_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (38)$$

então a seguinte regra de comutação

$$\sigma(\hat{\xi}) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} -\hat{\xi}^T Q_i \hat{\xi} + 2\hat{\xi}^T Z \ell_i \quad (39)$$

em conjunto com o filtro (4), cujas matrizes são dadas por

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= (Y - Z)^{-1} (A_i^T Z + Y A_i + L_i C_i + \\ &\quad + \rho^{-1} (Y H_i - L_i D_i) H_i^T Z) \\ \hat{B}_i &= (Z - Y)^{-1} L_i, & \hat{F}_i &= N_i, \\ \hat{\ell}_i &= (Y - Z)^{-1} Y \ell_i \\ \hat{E}_i &= E_i - N_i C_i + \rho^{-1} (G_i - N_i D_i) H_i^T Z \end{aligned} \quad (40)$$

asseguram o custo garantido \mathcal{H}_∞

$$J_\infty(\cdot) < \rho \quad (41)$$

para o erro de estimação.

Prova: A prova consiste em demonstrar a validade do Lema 2 para o sistema aumentado (5) quando as condições do Teorema 2 são válidas. Novamente, consideramos as matrizes (16) e (25) assim como as relações em (26). Multiplicando à esquerda da primeira desigualdade em (14) por $\text{diag}(\bar{\Gamma}, I, I)$, à direita pela sua transposta e realizando procedimento similar ao do Teorema 1, com termos intermediários dados em (28) e (30) e adotando $U = X = Z^{-1}$, obtemos

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{ZA_i\} + Q_i & \bullet \\ \mathcal{V}_i & \text{He}\{YA_i + L_i C_i\} \\ H_i^T Z & H_i^T Y + D_i^T L_i^T \\ E_i - N_i C_i - \hat{E}_i & E_i - N_i C_i \\ & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet \\ & -\rho I & \bullet \\ & G_i - N_i D_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (42)$$

onde $\mathcal{V}_i = A_i^T Z + Y A_i + L_i C_i + V \hat{A}_i$. Aplicando o complemento de Schur sucessivamente com respeito a $-I$ e $-\rho I$ em (42), pode ser verificado que o bloco (2, 1) da desigualdade resultante, após aplicadas as identidades \hat{A}_i e \hat{E}_i dadas em (40), é

nulo. Também, note que o bloco (2, 2) é equivalente a (38). De maneira similar, o bloco (1, 1) é equivalente à

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{ZA_i\} + Q_i & \bullet & \bullet \\ H_i^T Z & -\rho I & \bullet \\ E_i - N_i C_i - \hat{E}_i & G_i - N_i D_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (43)$$

Estas equivalências são simples de se verificar aplicando o complemento de Schur de maneira apropriada. Consequentemente, a desigualdade (42) é satisfeita, já que ambos os blocos (1, 1) e (2, 2) são definidos negativos. Além disso, trocando-se a segunda e terceira linhas e colunas de (43) e aplicando o complemento de Schur com respeito à última linha e coluna, pode-se verificar que \hat{E}_i , definido em (40), faz com que o bloco (2, 1) da desigualdade resultante seja nulo. Adicionalmente, os seus blocos (1, 1) e (2, 2) são definidos negativos pois a LMI (37), em conjunto com

$$\begin{bmatrix} -\rho I & \bullet \\ G_i - N_i D_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (44)$$

que está presente em (38), são verificadas. Finalmente, temos que $Q_{\lambda_0} \succeq 0$ é satisfeita se e somente se $\tilde{Q}_{\lambda_0} \succeq 0$, as desigualdades (35) asseguram $\tilde{P} \succ 0$, e a regra de comutação (39) é obtida de (10), como comentado anteriormente no Teorema 1. Assim como no Lema 2, o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ para o erro de estimação é limitado por $J_\infty(\cdot) < \rho$. A prova está concluída. \square

Comentário 3 Como mencionado em (Gahinet and Apkarian, 1994), deve-se salientar que a otimização de desempenho \mathcal{H}_∞ em problemas descritos em termos de LMIs pode levar a soluções com matrizes mal-condicionadas. Para tratar deste caso, propomos que um $\rho > 0$ fixo e subótimo seja fornecido, e que $\text{tr}((Y - Z)^{-1})$ seja minimizado, sujeito às mesmas restrições LMI do Teorema 2, fornecendo assim maior estabilidade numérica para as matrizes do filtro. Para obter uma função objetivo com este propósito, considere uma matriz R , tal que

$$\begin{bmatrix} R & \bullet \\ I & Y - Z \end{bmatrix} \succ 0 \quad (45)$$

onde $\text{tr}(R)$ é minimizado.

De forma similar ao Corolário 1, o filtro ótimo do Teorema 2 também possui estrutura de observador como apresentado a seguir.

Corolário 2 Considere o sistema afim com comutação (5) e um certo $x_e \in X_e$ escolhido, com seu vetor $\lambda_0 \in \mathcal{H}$ associado. Se existirem matrizes simétricas $Z \succ 0$, Y e Q_i , matrizes N_i e L_i , $i \in \mathbb{K}$ e $\rho > 0$, de forma que (31) e (38) sejam satisfeitas, então a regra de comutação (39) com (33) em conjunto com o filtro (4), cujas matrizes são dadas por $\hat{A}_i = A_i - \hat{B}_i C_i$, $\hat{B}_i = -Y^{-1} L_i$, $\hat{E}_i = E_i - N_i C_i$,

$\hat{F}_i = N_i$ e $\hat{\ell}_i = \ell_i$, asseguram o custo garantido \mathcal{H}_∞ (41) para o erro de estimação.

Prova: A prova segue da substituição de $(\epsilon Z, \epsilon Q_i) \rightarrow (Z, Q_i)$ no Teorema 2, com $\epsilon \rightarrow 0^+$. Com isto, a desigualdade (38) se torna explicitamente desacoplada de (37), já que esta é equivalente à $\text{He}\{ZA_i\} + Q_i + \epsilon \rho^{-1} Z H H^T Z \prec 0$ na qual a dependência em ρ é eliminada quando $\epsilon \rightarrow 0^+$. A prova está concluída. \square

Note que, de maneira similar ao projeto de filtro \mathcal{H}_2 , o princípio da separação pode ser constatado.

4 Exemplos

Nesta seção, um exemplo acadêmico composto de três subsistemas instáveis de terceira ordem é considerado, seguido de uma aplicação prática baseada em um conversor de potência *flyback* de corrente contínua.

4.1 Filtragem para Subsistemas Instáveis

Considere o sistema afim com comutação (1), composto de três subsistemas instáveis com matrizes

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

$H_i = I$, $C_i = [1 \ 1 \ 1]$, $D_i = [1 \ 1 \ 1]$, $E_i = I$, $\forall i \in \mathbb{K}$ e $\lambda_0 = [0.1822 \ 0.1022 \ 0.7156]^T$. Note que o subsistema 1 possui ponto de equilíbrio do tipo foco-nó, o subsistema 2 se comporta como sela, enquanto o subsistema 3 exibe ponto de equilíbrio do tipo sela-foco. Para este exemplo, foi considerada uma perturbação $w(t) = [0 \ 3 \ 0]^T$ no intervalo de tempo $5 < t < 10$ segundos e $w(t) = [0 \ 0 \ 0]^T$ caso contrário. Resolvendo as condições do Corolário 2, o custo garantido \mathcal{H}_∞ , dado por $J_\infty(\cdot) < 12.9952$ foi obtido, com as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} 7.2934 & 18.462 & 11.161 \\ 18.462 & 59.968 & 37.788 \\ 11.161 & 37.788 & 24.616 \end{bmatrix}, \\ Y &= \begin{bmatrix} 6.4159 & 2.9275 & 0.1251 \\ 2.9275 & 5.2256 & 0.0728 \\ 0.1251 & 0.0728 & 0.1044 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} L_1 &= \begin{bmatrix} -7.424 \\ -7.035 \\ -4.403 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -7.498 \\ -7.083 \\ -4.445 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} -7.581 \\ -7.102 \\ -4.481 \end{bmatrix}, \\ N_1 &= \begin{bmatrix} 0.338 \\ 0.337 \\ 0.325 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} 0.334 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} 0.324 \\ 0.338 \\ 0.338 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

usadas para implementar o observador e a função de comutação. A Figura 2 apresenta os estados do sistema e do filtro em função do tempo.

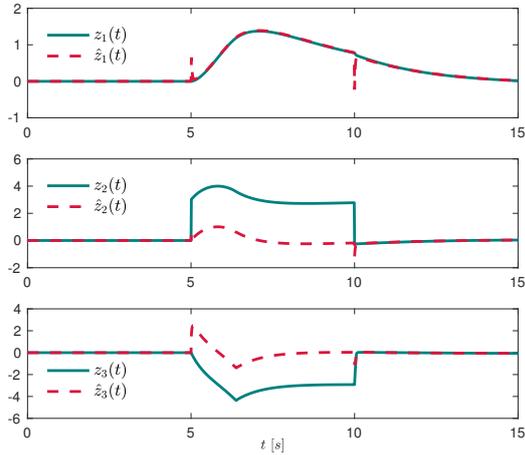


Figura 2: Trajetórias das saídas do sistema e do filtro.

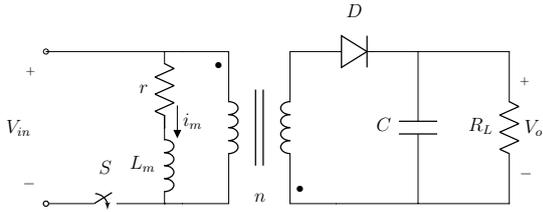


Figura 3: Conversor *flyback*

Este exemplo demonstra com sucesso a efetividade do projeto conjunto da regra e do filtro propostos quanto à rejeição de perturbações e estimação da saída do sistema.

4.2 *Flyback com Mudança de Ponto de Operação*

Neste exemplo é realizada a mudança do ponto de operação em tempo de execução de um conversor de potência *flyback* CC-CC, cujo diagrama elétrico é ilustrado na Figura 3, veja (Mohan et al., 2003) para mais detalhes. Os seguintes valores numéricos são adotados: $V_{in} = 12\text{V}$; $L_m = 0.848\text{mH}$; $r = 1.129\Omega$; $C = 2.2\text{mF}$; $R_L = 120\Omega$ e $n = 2$, a razão de enrolamentos. Para este caso, a tensão de saída é a única medida disponível, o que é uma situação muito frequente em aplicações reais. Definindo o vetor de estados como $x = [i_m \ V_o]^T$, este sistema pode ser modelado como um sistema afim com comutação (1) com as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -r/L_m & 0 \\ 0 & -1/R_L C \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -r/L_m & -n/L_m \\ n/C & -1/R_L C \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} V_{in} \\ L_m \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_1 = C_2 = [0 \ 1]$, $D_1 = D_2 = [0 \ 1]$, $E_1 = E_2 = I$, $G_1 = G_2 = 0$. Consideramos que em $t = 0.25$ segundos ocorre uma alteração do ponto de operação de $x_{e,1} = [1.12 \ 35.03]^T$ associado a $\lambda_1 = [0.9187 \ 0.0813]^T$ para $x_{e,2} = [2.56 \ 50.01]^T$ correspondente a $\lambda_2 = [0.8691 \ 0.1309]^T$. Resolvendo as condições do Teorema 1 com as restrições $Q_{\lambda_1} \succeq 0$ e $Q_{\lambda_2} \succeq 0$ no lugar de (18) de forma a levar em conta a mudança de ponto de operação, obtivemos

as seguintes matrizes necessárias para implementar o filtro e a regra de comutação, associadas ao custo garantido $J_2(\cdot) < 0.0026$

$$Z = \begin{bmatrix} 0.3876 & 0.1425 \\ 0.1425 & 1.1628 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5185 & 0.2094 \\ 0.2094 & 1.6526 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad (50)$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.08492 \\ -268.33 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -1.2242 \\ -57.552 \end{bmatrix} \times 10^{-8},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.141 \\ 0.141 & -0.011 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} -1.535 & -0.356 \\ -0.356 & 0.502 \end{bmatrix}$$

Partindo de condições iniciais nulas, a Figura 4 apresenta as trajetórias do estado do sistema e do filtro, assim como a regra de comutação na Figura 5. Como esperado, a regra foi eficaz na mudança do ponto de operação e o filtro foi eficiente na convergência do erro de estimação para zero.

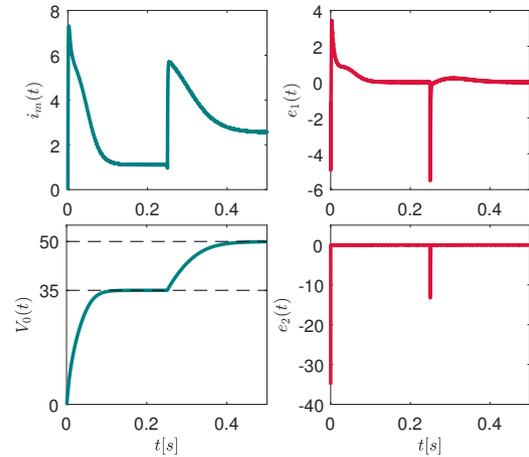


Figura 4: Trajetórias do estado do sistema e erros de estimação.

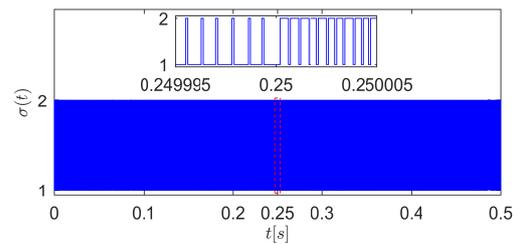


Figura 5: Regra de comutação.

5 Conclusão

Duas abordagens sobre projeto de filtro de ordem completa para sistemas afins com comutação foram consideradas, levando-se em conta a otimização dos índices de desempenho \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , assim como uma função de comutação estabilizante dependente da saída medida. Foi provado que o filtro de custo garantido ótimo apresenta estrutura de observador e que os projetos da regra de comutação e do filtro podem ser feitos de maneira independente,

o que mostra que o princípio da separação, bem conhecido em teoria de controle, é válido. Um exemplo acadêmico e uma aplicação prática foram apresentados, de forma a demonstrar a validade e efetividade da metodologia proposta no que se refere ao projeto de filtro para sistemas afins com comutação.

Agradecimentos

Este projeto de pesquisa é apoiado pelo “Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)”, processo nº 306911/2015-9” e pela “Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)”, processos nº 2016/18673-0 e 2017/20343-0.

Referências

- Cardim, R., Teixeira, M., Assunção, E. and Covacic, M. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Trans. on Industrial Electronics* **56**(9): 3505–3513.
- Deaecto, G. S. (2016). Dynamic output feedback \mathcal{H}_∞ control of continuous-time switched affine systems, *Automatica* **71**: 44–49.
- Deaecto, G. S., Geromel, J., Garcia, F. and Pomilio, J. (2010). Switched affine systems control design with application to DC-DC converters, *IET Con. The. & App.* **4**(7): 1201–1210.
- Deaecto, G. S. and Santos, G. C. (2015). State feedback \mathcal{H}_∞ control design of continuous-time switched affine systems, *IET Con. The. & App.* **9**: 1511–1516.
- Duan, C. and Wu, F. (2013). Robust switched filtering for time-varying polytopic uncertain systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **135**(6).
- Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **4**(4): 421–448.
- Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**: 720–733.
- Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2014). Stability analysis of Lur’e-type switched systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **59**(11): 3046–3050.
- Geromel, J. C., Deaecto, G. S. and Daafouz, J. (2013). Suboptimal Switching Control Consistency Analysis for Switched Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(7): 1857–1861.
- Kader, Z., Fiter, C., Hetel, L. and Belkoura, L. (2018). Stabilization of switched affine systems with disturbed state-dependent switching laws., *International Journal of Robust Nonlinear Control* **28**(2): 582–595.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Springer-Verlag, New York.
- Menini, L., Possieri, C. and Tornambè, A. (2014). On observer design for a class of continuous-time affine switched or switching systems, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control* pp. 6234–6239.
- Mohan, N., Undeland, T. M. and Robbins, W. P. (2003). *Power electronics: Converters, applications, and design*, 3rd edn, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- Pinto, L. P. G. and Trofino, A. (2014). Switched observers for state and parameter estimation with guaranteed cost, *Proceedings of the IFAC World Congress* **47**: 563–568.
- Scharlau, C. C., de Oliveira, M. C., Trofino, A. and Dezuó, T. J. (2014). Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule, *System & Control Letters* **68**: 1–8.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM review* **49**(4): 545–592.
- Sun, Z. (2006). *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer London.
- Wang, B., Zhang, H., Wang, G. and Dang, C. (2016). Asynchronous \mathcal{H}_∞ filtering for linear switched systems with average dwell time, *International Journal of Systems Science* **47**(12): 2783–2791.
- Xiao, X., Zhou, L. and Lu, G. (2017). Event-triggered \mathcal{H}_∞ filtering of continuous-time switched linear systems, *Signal Processing* **141**: 343–349.
- Yoshimura, V. L., Assunção, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Júnior, E. I. (2013). Observer-based control design for switched affine systems and applications to DC-DC converters, *Journal of Control, Automation and Electrical Sys.* **24**(4): 535–543.
- Zhang, L. and Shi, P. (2011). \mathcal{H}_∞ filtering for a class of switched linear parameter varying systems, *International Journal of Systems Science* **42**(5): 781–788.
- Zheng, Q. and Zhang, H. (2017). \mathcal{H}_∞ Filtering for a class of nonlinear switched systems with stable and unstable subsystems, *Signal Processing* **141**: 240–248.