

SÍNTESE DE CONTROLADOR PID PARA SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM CONTROLADOS EM REDE

JOÃO V. T. BORGES*, ARTHUR A. F. B. MORENO†, HEITOR J. SAVINO*

*Programa de Pós-Graduação em Informática, Instituto de Computação,
Universidade Federal de Alagoas, Av. Lourival Melo Mota, s/n, Maceió, AL, 57072-900

†Faculdade de Engenharia Mecatrônica, Centro Universitário Tiradentes,
Av. Comendador Gustavo Paiva, 5017, Maceió, AL, 57038-000

Emails: borgesjvt@gmail.com, arthurallex.1993@hotmail.com, savino@ieee.org

Abstract— This paper presents a method for synthesis of PID controllers for second-order systems subject to time-varying delay. The result is obtained by means of a Lyapunov-Krasovskii functional, used to establish delay-dependent conditions based on linear matrices inequalities (LMIs). The time-delays can be considered to be time-varying and non differentiable. Experiments in a networked control system of a coupled tank discuss the application of the proposed approach.

Keywords— PID Controller, Robust control, time-varying delay, LMIs.

Resumo— Este trabalho apresenta um método para sintonia de controladores PID para sistemas de segunda ordem sujeitos a atrasos variantes no tempo. O resultado é obtido através de um funcional de Lyapunov-Krasovskii, usado para estabelecer condições dependentes do atraso baseadas em desigualdades matriciais lineares. O atraso pode ser considerado variante no tempo e não-diferenciável. Experimentos em um sistema de controle em rede de um tanque acoplado discutem a aplicação da abordagem proposta.

Palavras-chave— Controlador PID, Controle robusto, Atraso variante, LMIs.

1 Introdução

Controladores PID (Proporcional Integral e Derivativo) estão entre os mais populares em aplicações industriais, correspondendo a mais de 90% dos processos na indústria (Vilanova and Visoli, 2012). Devido a sua simplicidade e eficácia, vários métodos vêm sendo desenvolvidos para lidar não somente com a sintonia desses controladores mas também configurações práticas de implementação, como saturação, por exemplo, a fim de melhorar o processo como um todo.

Entre os métodos de sintonia, o primeiro a ser proposto foi o de Ziegler and Nichols (1942), baseando-se apenas na informação da resposta transitória do processo. Outro trabalho que ganhou destaque foi o controle IMC (do inglês *Internal Mode Control*), proposto por Rivera et al. (1986). Neste método, os ajustes são obtidos a partir de um modelo do processo e de restrições de projeto, com a finalidade de obter os parâmetros do controlador PID e uma estrutura apropriada.

Quando a realimentação do sistema de controle é fechada por uma malha de controle através de uma rede de comunicação, este tipo de sistema é chamado de sistema de controle em rede (Zhang et al., 2001) (NCS, do inglês *Networked Control System*). A introdução de um sistema de comunicação inclui vários desafios na análise do NCS, como taxa de comunicação, amostragem, atrasos e perda de pacotes (Hespanha et al., 2007). Para o tratamento de atrasos, técnicas de controle robusto podem ser usadas para análise e projeto de controladores, como em Fenili et al. (2014), Souza

et al. (2016), Parada et al. (2017).

A abordagem geralmente utilizada para análise de atrasos variantes é baseada na teoria de Lyapunov-Krasovskii (Gu et al., 2003; Fridman, 2014). Basicamente, define-se $V(\cdot)$, um Funcional de Lyapunov-Krasovskii (LKF, do inglês Lyapunov-Krasovskii Functional), e garante-se que $V(\cdot) > 0$ e $\dot{V}(\cdot) < 0$. Estes critérios de estabilidade podem ser formulados por Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*) e tratados como um problema de otimização convexa (Boyd et al., 1994).

Neste trabalho, é proposta uma modificação no funcional adotado em Souza et al. (2016), e novas condições LMI para síntese de um controlador PID são apresentadas para o sistema de controle em rede de uma planta de segunda ordem. São considerados atrasos variantes no tempo e não diferenciáveis que podem representar o tempo de amostragem, atraso de comunicação e perda de pacotes de forma unificada. Os resultados são comparados com resultados semelhantes na literatura, mostrando que mesmo com a redução de número de variáveis matriciais nas condições LMI, não há perda em relação à taxa de convergência. Por fim, o resultado é aplicado num sistema de controle em rede para o nível de tanques acoplados, para discutir aplicabilidade e limitações do método proposto.

Notação: M^T é a transposta da matriz M . $\text{He}\{M\} = M + M^T$. I e 0 são, respectivamente, matrizes identidade e zero com tamanhos apropriados. $\|v\|$ é a norma euclidiana de um vetor v . $M > 0$ ($M < 0$) representa uma matriz positiva

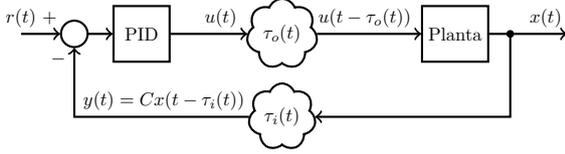


Figura 1: Arquitetura do sistema de controle em rede.

(negativa) definida. * em uma matriz representa um termo simétrico. $\text{diag}\{A, B\}$ é uma matriz diagonal com os elementos A, B em sua diagonal principal $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$.

2 Formulação do Problema

Considere-se o modelo da planta que se deseja controlar dado por uma função de transferência nominal de um sistema de segunda ordem

$$G(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}, \quad (1)$$

sendo b_1, b_0, a_1 e a_0 , os parâmetros do sistema.

Pode-se escrever uma representação em espaço de estados do modelo (1) numa forma aumentada, com $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$, sendo $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t) = b_0 \int x_1(t)dt$ as variáveis de estado (Parada et al., 2011). Além disso, considera-se, neste ponto, a presença de atrasos variantes nas ações de controle e na medição da saída do sistema, devido à troca de informações no sistema de controle em rede. Desta forma, sistema é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau_o(t)), \\ y(t) &= Cx(t - \tau_i(t)), \end{aligned} \quad (2)$$

em que $\tau_i(t)$ e $\tau_o(t)$ são os atrasos para a entrada e saída de informações no controlador em relação à planta, como representado na Figura 1, e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ b_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T.$$

Deseja-se utilizar um controlador PID na forma paralela

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (3)$$

Assim, a entrada $U(s) = -C(s)Y(s)$ pode ser escrita em espaço de estados fazendo-se

$$u(t) = -k_p y(t) - k_i \int_{-\infty}^t y(t)dt - k_d \dot{y}(t).$$

De (2), tem-se que $y(t) = b_0 x_1(t - \tau_i)$ e $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$. Assim,

$$\begin{aligned} u(t) &= -k_p b_0 x_1(t - \tau_i(t)) - k_i x_3(t - \tau_i(t)) \\ &\quad - k_d b_0 x_2(t - \tau_i(t)), \end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma

$$u(t) = KWx(t - \tau_i(t)), \quad (4)$$

com $K = \begin{bmatrix} -k_p & -k_d & -k_i \end{bmatrix}$ e $W = \text{diag}\{b_0, b_0, 1\}$.

Assim, a matriz K contém os ganhos do controlador que se deseja projetar e W é relacionada com os parâmetros do sistema.

Finalmente, a dinâmica do sistema em malha fechada, com controlador PID (4) e atrasos variantes na rede de comunicação, é dada por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKWx(t - \tau(t)), \quad (5)$$

sendo $\tau(t) = \tau_i(t) + \tau_o(t)$ o atraso total envolvido no processo. As margens do atraso $\tau(t)$ podem ser obtidas experimentalmente.

3 Inequações integrais

Os seguintes lemas possuem papel fundamental na obtenção do resultado principal:

Lema 1 (Inequação de Wirtinger) (Seuret and Gouaisbaut, 2013) Para qualquer matriz constante $X = X^T > 0$ e escalares $t > t - \tau \geq 0$ tal que as seguintes integrais sejam bem definidas, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(\xi) X \dot{x}(\xi) d\xi &\geq \\ \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(\xi) d\xi X \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\xi) d\xi &+ \frac{3}{\tau} \Omega^T X \Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

sendo

$$\Omega = x(t - \tau) + x(t) - \frac{2}{\tau} \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Lema 2 (Inequação de Jensen) (Sun et al., 2009) Para qualquer matriz constante $X = X^T > 0$ e escalares $t > t - \tau \geq 0$ tal que as seguintes integrais sejam bem definidas, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t x^T(\xi) X x(\xi) d\xi ds &\geq \\ \frac{2}{\tau^2} \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t x^T(\xi) d\xi ds X \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t x(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (8)$$

4 Condições para Síntese do Controlador

Como parâmetro de desempenho a ser usado na síntese do controlador PID, é definida a taxa de convergência exponencial:

Definição 1 Um sistema converge com taxa exponencial δ à medida que as variáveis de estado $x(t)$ obedecem

$$\|x(t)\| \leq \kappa e^{-\delta t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (9)$$

sendo κ um escalar apropriado dado pelas condições iniciais.

O resultado principal com as condições LMI para o projeto do controlado PID são apresentadas a seguir.

Teorema 1 *Seja dado o sistema de segunda ordem definido em (1). Deseja-se projetar um controlador PID (4) tal que o sistema convirja com taxa exponencial δ de acordo com a Definição 1. O sistema de controle em rede pode ser escrito na forma (5), sujeito a atraso total variante no tempo obedecendo $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$, sendo dados τ e μ tal que $\tau > \mu > 0$. Se existirem matrizes reais $\bar{P}_1 = \bar{P}_1^T$, \bar{P}_2 , $\bar{P}_3 = \bar{P}_3^T$, $\bar{R} = \bar{R}^T > 0$, $\bar{S} = \bar{S}^T > 0$, $\bar{Z} = \bar{Z}^T$ e \bar{F} , de dimensões 3×3 , e uma matriz real X de dimensão 1×3 , tal que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ * & \bar{P}_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \mu \bar{\Xi} \\ * & -\mu \bar{Z} \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

sendo $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_P + \bar{\Phi}_R + \bar{\Phi}_S + \bar{\Phi}_Z + \bar{\Phi}_F$, $e_1 = e^{-2\delta\tau}$, $e_2 = e^{-\delta(\tau+\mu)}$,

$$\bar{\Phi}_P = \begin{bmatrix} 2\delta\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_2^T & \bar{P}_1 & -\bar{P}_2 & 2\delta\bar{P}_2 + \bar{P}_3 \\ * & 0 & 0 & \bar{P}_2 \\ * & * & 0 & -\bar{P}_3 \\ * & * & * & 2\delta\bar{P}_3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_R = \begin{bmatrix} \frac{-4e_1}{\tau}\bar{R} & 0 & \frac{-2e_1}{\tau}\bar{R} & \frac{6e_1}{\tau^2}\bar{R} \\ * & \tau\bar{R} & 0 & 0 \\ * & * & \frac{-4e_1}{\tau}\bar{R} & \frac{6e_1}{\tau^2}\bar{R} \\ * & * & * & \frac{-12e_1}{\tau^3}\bar{R} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_S = \begin{bmatrix} -2e_1\bar{S} & 0 & 0 & \frac{2e_1}{\tau}\bar{S} \\ * & \frac{\tau^2}{2}\bar{S} & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{2e_1}{\tau^2}\bar{S} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_Z = \text{diag}\{0, 2\mu\bar{Z}, 0, 0\},$$

$$\bar{\Phi}_F = He \left\{ \begin{bmatrix} -A\bar{F}e_2 & \bar{F}e_2 & -BXe_2 & 0 \\ -A\bar{F}e_2 & \bar{F}e_2 & -BXe_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\bar{\Xi} = \begin{bmatrix} BX \\ BX \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então o sistema será estável e convergirá exponencialmente com taxa δ para o controlador PID com parâmetros dados por $[k_p \ k_d \ k_i] = -X\bar{F}^{-1}W^{-1}$.

Prova: Para análise de estabilidade, considera-se o seguinte LKF candidato $V(x_t)$, em que x_t corresponde aos valores de $x(\sigma)$ em $\sigma \in [t - \tau - \mu, t]$. Este funcional tem sido aplicado em Savino et al.

(2016), Souza et al. (2016), adotado aqui com redução em número de variáveis.

$$V(x_t) = V_P(x_t) + V_R(x_t) + V_S(x_t) + V_Z(x_t), \quad (12)$$

sendo

$$V_P(x_t) = \chi^T P \chi, \quad (13)$$

$$\text{com } \chi = \begin{bmatrix} e^{\delta t} x(t) \\ e^{\delta t} \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix},$$

$$V_R(x_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) R \dot{x}(\xi) d\xi ds, \quad (14)$$

$$V_S(x_t) = \int_{-\tau}^0 \int_{\theta}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) S \dot{x}(\xi) d\xi ds d\theta, \quad (15)$$

$$V_Z(x_t) = \int_{-\mu}^{\mu} \int_{t+s-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi ds, \quad (16)$$

com matrizes reais $P_1 = P_1^T$, P_2 , $P_3 = P_3^T$, $R = R^T$, $S = S^T$ e $Z = Z^T$.

Primeiramente, a condição $V(x_t) > 0$ é satisfeita. Assim, se as condições

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} > 0, \quad (17)$$

$R > 0$, $S > 0$ e $Z > 0$ são satisfeitas, então $V(x_t) > 0$.

Em seguida, mostram-se as condições para satisfazer $\dot{V}(x_t) < 0$. Para isto, toma-se a derivada de cada termo em (12) para assegurar

$$\dot{V}_P(x_t) + \dot{V}_R(x_t) + \dot{V}_S(x_t) + \dot{V}_Z(x_t) < 0. \quad (18)$$

Para o termo $V_P(x_t)$ em (13), tem-se

$$\dot{V}_P(x_t) = \chi^T P \dot{\chi} + \dot{\chi}^T P \chi. \quad (19)$$

A derivada de χ é dada por $\dot{\chi} = E_1 \Upsilon$, sendo

$$E_1 = \begin{bmatrix} \delta I & I & 0 & 0 \\ I & 0 & -I & \delta I \end{bmatrix} \quad (20)$$

e $\Upsilon^T = [e^{\delta t} x^T(t) \quad e^{\delta t} \dot{x}^T(t) \quad e^{\delta t} x^T(t - \tau) \quad e^{\delta t} \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi]$. Da mesma forma, χ pode ser escrito como $\chi = E_2 \Upsilon$, com

$$E_2 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Assim, (19) pode ser escrito como

$$\dot{V}_P(x_t) = \Upsilon^T He\{E_2^T P E_1\} \Upsilon = \Upsilon^T \Phi_P \Upsilon \quad (22)$$

sendo $\Phi_P = He\{E_2^T P E_1\}$.

Para o termo $V_R(x_t)$ em (14), tem-se

$$\dot{V}_R(x_t) = \tau e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) R \dot{x}(\xi) d\xi.$$

Toma-se o limite inferior da integral limitando a exponencial e aplicando o Lema 1 para obter

$$\begin{aligned} \dot{V}_R(x_t) \leq & \tau e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) R \dot{x}(t) - \\ & \frac{e^{2\delta(t-\tau)}}{\tau} \int_{t-\tau}^t \dot{x}^T(\xi) d\xi R \int_{t-\tau}^t \dot{x}(\xi) d\xi \\ & - \frac{3e^{2\delta(t-\tau)}}{\tau} \Omega^T R \Omega. \end{aligned} \quad (23)$$

O termo $e^{2\delta t} \Omega$, com Ω dado em (7), pode ser escrito na forma $e^{\delta t} \Omega = E_3 \Upsilon$, com

$$E_3 = [I \quad 0 \quad I \quad \frac{-2}{\tau} I]. \quad (24)$$

Resolvendo as integrais em (23), obtém-se

$$\dot{V}_R(x_t) \leq \Upsilon^T \Phi_R \Upsilon, \quad (25)$$

sendo

$$\Phi_R = \begin{bmatrix} \frac{-4e^{-2\delta\tau}}{\tau} R & 0 & \frac{-2e^{-2\delta\tau}}{\tau} R & \frac{6e^{-2\delta\tau}}{\tau^2} R \\ * & \tau R & 0 & 0 \\ * & * & \frac{-4e^{-2\delta\tau}}{\tau} R & \frac{6e^{-2\delta\tau}}{\tau^2} R \\ * & * & * & \frac{-12e^{-2\delta\tau}}{\tau^3} R \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Para o termo $V_S(x_t)$ em (15), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_S(x_t) = & \frac{\tau^2}{2} e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) S \dot{x}(t) \\ & - \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t e^{2\delta\xi} \dot{x}^T(\xi) S \dot{x}(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (27)$$

Toma-se o limite inferior da integral limitando a exponencial e aplicando o Lema 2 para obter

$$\begin{aligned} \dot{V}_S(x_t) \leq & \frac{\tau^2}{2} e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) S \dot{x}(t) - \frac{2}{\tau^2} e^{-2\delta(t-\tau)} \times \\ & \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}^T(\xi) d\xi ds S \int_{-\tau}^0 \int_{t+s}^t \dot{x}(\xi) d\xi ds. \end{aligned} \quad (28)$$

Resolvendo as integrais em (28), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_S(x_t) \leq & \frac{\tau^2}{2} \dot{x}^T(t) S \dot{x}(t) - 2e^{-2\delta\tau} e^{2\delta t} x^T(t) S x(t) \\ & + \text{He} \left\{ \frac{2e^{-2\delta\tau} e^{2\delta t}}{\tau} x^T(t) S \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi \right\} \\ & - \frac{2e^{-2\delta\tau} e^{2\delta t}}{\tau^2} \int_{t-\tau}^t x^T(\xi) d\xi S \int_{t-\tau}^t x(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (29)$$

que pode ser escrito como

$$\dot{V}_S(x_t) \leq \Upsilon^T \Phi_S \Upsilon, \quad (30)$$

sendo

$$\Phi_S = \begin{bmatrix} -2e^{-2\delta\tau} S & 0 & 0 & \frac{2e^{-2\delta\tau}}{\tau} S \\ * & \frac{\tau^2}{2} S & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & -\frac{2e^{-2\delta\tau}}{\tau^2} S \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Para o termo $V_Z(x_t)$ em (16), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_Z(x_t) = & 2\mu e^{2\delta t} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \\ & e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (32)$$

Deseja-se limitar o último termo em (32). Para isto, considera-se um termo nulo derivado da dinâmica do sistema (5) como utilizado em Mozelli et al. (2010) e Souza et al. (2008):

$$0 = \dot{x}(t) - Ax(t) - BKWx(t - \tau(t)) \quad (33)$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, tem-se

$$x(t - \tau(t)) = x(t - \tau) - \int_{-\tau(t)}^{-\tau} \dot{x}(t + \xi) d\xi, \quad (34)$$

tal que, substituindo (34) em (33) e pré-multiplicando por um termo auxiliar,

$$\begin{aligned} 0 = & 2\Upsilon^T \Gamma e^{\delta(t-\tau-\mu)} \left(\dot{x}(t) - Ax(t) \right. \\ & \left. - BKW \left(x(t - \tau) - \int_{-\tau(t)}^{-\tau} \dot{x}(t + \xi) d\xi \right) \right), \end{aligned} \quad (35)$$

sendo $\Gamma^T = [F \quad F \quad 0 \quad 0]$, com uma matriz real $F = F^T$.

Distribuindo-se os termos em (35) pode-se obter

$$\begin{aligned} 0 = & \Upsilon^T \Phi_F \Upsilon \\ & + \int_{-\tau(t)}^{-\tau} 2\Upsilon^T \Gamma BKW \dot{x}(t + \xi) e^{\delta(t-\tau-\mu)} d\xi, \end{aligned} \quad (36)$$

sendo

$$\Phi_F = \text{He} \left\{ \begin{bmatrix} -FAe_2 & Fe_2 & -FBKW e_2 & 0 \\ -FAe_2 & Fe_2 & -FBKW e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Aplicando-se a inequação $2a^T b \leq a^T X a + b^T X^{-1} b$ no termo integrando em (36), escolhendo-se a^T e b dados por $\Upsilon^T \Gamma BKW$ e $\dot{x}(t + \xi) e^{\delta(t-\tau-\mu)}$, respectivamente, e X como uma matriz definida positiva dada por Z^{-1} , obtém-se, após resolver a integral e limitar o termo exponencial,

$$\begin{aligned} & \int_{-\tau(t)}^{-\tau} \left(2\Upsilon^T \Gamma BKW \dot{x}(t + \xi) e^{\delta(t-\tau-\mu)} \right) d\xi \leq \\ & \mu (\Upsilon^T \Gamma BKW) Z^{-1} (\Upsilon^T \Gamma BKW)^T \\ & + e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (37)$$

Assim, substituindo (37) em (36), é possível obter

$$\begin{aligned} & - e^{2\delta(t-\tau-\mu)} \int_{t-\tau-\mu}^{t-\tau+\mu} \dot{x}^T(\xi) Z \dot{x}(\xi) d\xi \leq \Upsilon^T \Phi_F \Upsilon \\ & + \mu (\Upsilon^T \Gamma BKW) Z^{-1} (\Upsilon^T \Gamma BKW)^T. \end{aligned} \quad (38)$$

Finalmente, substituindo (38) em (32), obtém-se o limite superior para $\dot{V}_Z(x_t)$:

$$\dot{V}_Z(x_t) \leq \Upsilon^T(\Phi_Z + \Phi_F + (\Gamma BKW)\mu Z^{-1}(\Gamma BKW)^T)\Upsilon, \quad (39)$$

sendo

$$\Phi_Z = \text{diag}\{0, 2\mu Z, 0, 0\}.$$

Substituindo os limites superiores (22), (25), (30) e (39) na condição derivativa (18), tem-se que

$$\Upsilon^T(\Phi + (\Gamma BKW)\mu Z^{-1}(\Gamma BKW)^T)\Upsilon < 0, \quad (40)$$

sendo $\Phi = \Phi_P + \Phi_R + \Phi_S + \Phi_Z + \Phi_F$.

Assim, para garantir que $\dot{V}(z_t) < 0$ para qualquer $\Upsilon \neq 0$, o termo entre parênteses em (40) deve ser definido negativo. Aplicando-se o Complemento de Schur, dado que $Z > 0$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \Phi & \mu\Gamma BKW \\ * & -\mu Z \end{bmatrix} < 0. \quad (41)$$

Se a condição LMI em (41) for satisfeita, então a condição derivativa do LKF $\dot{V}(x_t) < 0$ é satisfeita. Se a condição $V(x_t) > 0$ também for satisfeita, isto indica que há um controlador que garante a estabilidade do sistema.

Os ganhos do controlador PID que estabilizam o sistema estão descritos pela variável K . No entanto, o termo $FBKW$ que consta em ΓBKW em (41), sendo F e K variáveis matriciais, leva a condições descritas por inequações matriciais bilineares (BMI, do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*). Para obter condições LMI, pode-se multiplicar pela esquerda e direita as condições por matrizes diagonais com F^{-1} e $(F^{-1})^T$, respectivamente, realizando uma transformação de congruência, tal que as condições para $V(x_t) > 0$ como em (17) se tornam

$$\begin{bmatrix} F^{-1} & 0 \\ * & F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^{-1} & 0 \\ * & F^{-1} \end{bmatrix}^T > 0,$$

levando à condição LMI (10), sendo $\bar{P}_1 = F^{-1}P_1(F^{-1})^T$, $\bar{P}_2 = F^{-1}P_2(F^{-1})^T$, e $\bar{P}_3 = F^{-1}P_3(F^{-1})^T$. Da mesma forma, $R > 0$, $S > 0$, $Z > 0$ se tornam $F^{-1}R(F^{-1})^T > 0$, $F^{-1}S(F^{-1})^T > 0$, $F^{-1}Z(F^{-1})^T > 0$, tal que $\bar{R} > 0$, $\bar{S} > 0$, $\bar{Z} > 0$, sendo, $\bar{R} = F^{-1}R(F^{-1})^T$, $\bar{S} = F^{-1}S(F^{-1})^T$ e $\bar{Z} = F^{-1}Z(F^{-1})^T$.

Para as condições de $\dot{V}(x_t) < 0$, multiplica-se (41) pela esquerda e direita por $\text{diag}\{F^{-1}, F^{-1}, F^{-1}, F^{-1}, F^{-1}\}$ e $(\text{diag}\{F^{-1}, F^{-1}, F^{-1}, F^{-1}, F^{-1}\})^T$, respectivamente. Com as definições dadas acima para \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , \bar{P}_3 , \bar{R} , \bar{S} e \bar{Z} , e definindo também $\bar{F} = F^{-1}$ e $KW\bar{F} = X$ como uma nova variável matricial real X com dimensão 1×3 , resulta na condição LMI em (11). Os ganhos do controlador PID, k_p , k_i e k_d , podem ser obtidos, dada a definição de K em (4), por $[-k_p \quad -k_d \quad -k_i] = X\bar{F}^{-1}W^{-1}$.

Se as condições LMI forem satisfeitas, mostra-se agora que o sistema converge com taxa exponencial δ de acordo com a Definição 1. Para $\dot{V}(x_t) < 0$ e $V(x_t) > 0$, pode-se escrever o limitante

$$0 \leq V(x_t) \leq \bar{V}(x_t) \leq \bar{V}(x_t)|_{t=0}, \quad (42)$$

sendo $\bar{V}(x_t)$ o limite superior do LKF e $\bar{V}(x_t)|_{t=0}$ seu limitante no tempo inicial. $\bar{V}(x_t)$ é dado por

$$\begin{aligned} \bar{V}(x_t) &= \lambda_{\max}\{P\} \|\chi(t)\|^2 \\ &+ (\tau \lambda_{\max}\{R\} + \tau^2 \lambda_{\max}\{S\}) \int_{t-\tau}^t e^{2\delta\xi} \|\dot{x}(\xi)\|^2 d\xi \\ &+ \lambda_{\max}\{Z\} \int_{t-\tau-\mu}^t e^{2\delta\xi} \|\dot{x}(\xi)\|^2 d\xi, \end{aligned} \quad (43)$$

sendo $\lambda_{\max}\{\cdot\}$ o maior autovalor de uma matriz. De (43), pode-se obter

$$\begin{aligned} \bar{V}(x_t) &\geq \lambda_{\max}\{P\} \|\chi(t)\|^2 \\ &\geq e^{2\delta t} \lambda_{\max}\{P_1\} \|x(t)\|^2. \end{aligned} \quad (44)$$

$\bar{V}(x_t)|_{t=0}$ pode ser relacionado ao supremo da condição inicial $x(\theta)$, para $\theta \in [-\tau - \mu, 0]$, tal que

$$\bar{V}(x_t)|_{t=0} \leq \bar{V}\left(\sup_{\theta \in [-\tau - \mu, 0]} x(\theta)\right) = \rho(\delta). \quad (45)$$

De (42), (44) e (45), tem-se que

$$e^{2\delta t} \lambda_{\max}\{P_1\} \|x(t)\|^2 \leq \rho(\delta),$$

tal que,

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\rho(\delta)}{\lambda_{\max}\{P_1\}}} e^{-\delta t} \triangleq \kappa e^{-\delta t}.$$

Portanto, se as condições LMI são satisfeitas, o controlador PID projetado garante que o sistema converge com taxa exponencial δ de acordo com a Definição 1. Isto completa a prova. \square

5 Resultados Numéricos e Experimentais

Para avaliar o desempenho do resultado proposto, realizaram-se comparações numéricas, com resultados pares propostos na literatura, assim como experimentos em escala de um sistema de controle de nível com tanques acoplados. Neste experimento, o atuador da planta se comunica através de uma rede local sem fio com um outro computador onde são executadas as ações de controle, como proposto na arquitetura de controle em rede na Figura 1.

5.1 Obtenção do modelo de segunda ordem

O sistema com tanques acoplados é fornecido pela Quanser (2017), representado na Figura 2. Consiste em bomba elétrica, reservatório de água e

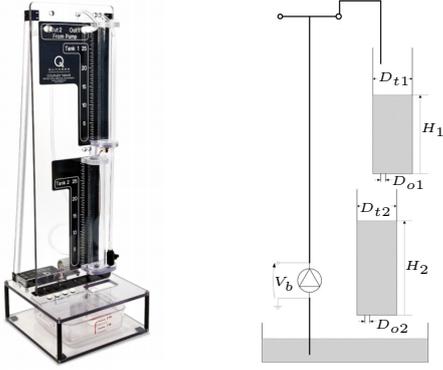


Figura 2: Tanques acoplados (Quanser, 2017)

dois tanques com seções uniformes. A bomba é responsável por bombear água do reservatório ao tanque superior, que flui para o tanque inferior através de orifício na base do tanque superior. A água também flui do tanque inferior ao reservatório através de orifício em sua base. As equações que descrevem a dinâmica do sistema são não-lineares e dadas por

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= (K_b V_b - a_1 \sqrt{2gH_1})/A_1, \\ \dot{H}_2 &= (a_1 \sqrt{2gH_1} - a_2 \sqrt{2gH_2})/A_2, \end{aligned} \quad (46)$$

sendo H_1 a altura do tanque superior, $K_b = 4,05\text{cm}^3/Vs$ a constante da bomba em relação à tensão V_b aplicada no motor, $A_1 = \pi(D_{t1}/2)^2$ a área da seção transversal do tanque superior, com $D_{t1} = 4,45\text{cm}$, $a_1 = \pi(D_{o1}/2)^2$ a área do orifício de saída do tanque superior e $D_{o1} = 0,48\text{cm}$. Analogamente, A_2 , a_2 , $D_{t2} = 4,45\text{cm}$, $D_{o2} = 0,48\text{cm}$ se referem ao tanque inferior, e $g = 980\text{cm}/s^2$ é a constante de aceleração da gravidade.

A Equação (46) é linearizada em torno do ponto de operação $\bar{H}_2 = \bar{H}_1 = 10\text{cm}$ com valor de entrada para tensão $\bar{V}_b = a_1 \sqrt{2g\bar{H}_1}/K_b = 6,16V$, de tal modo que a função de transferência que descreve o sistema de segunda ordem, sem atrasos, é dada por

$$\frac{\Delta H_2(s)}{\Delta V_b(s)} = \frac{0,0209}{s^2 + 0,1604s + 0,0064}. \quad (47)$$

Para identificar as margens de atraso, foram realizados experimentos em que pacotes de dados enviados pelo controlador continham estampas de tempo. Sabe-se que, durante o envio, os pacotes são atrasados por $\tau_o(t)$. Estas estampas de tempo eram retornadas pelo computador remoto ligado à planta para o controlador, acumulando um atraso adicional $\tau_i(t)$. Como não é necessário identificar individualmente $\tau_o(t)$ e $\tau_i(t)$, mas apenas o atraso total $\tau(t) = \tau_o(t) + \tau_i(t)$, $\tau(t) \in [\tau - \mu, \tau + \mu]$, é possível identificar os valores de τ e μ a que o sistema de controle em rede está sujeito. Na Figura 3 pode-se identificar o perfil de atraso variante no tempo. De acordo com os valores máximos

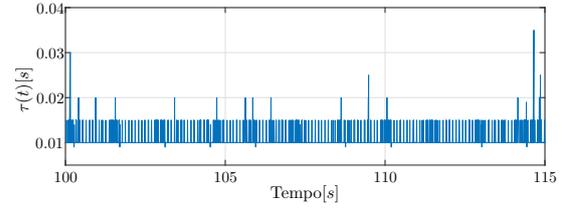


Figura 3: Atraso total de comunicação $\tau(t)$

Tabela 1: Maior δ , para $\tau = 22,5$, $\mu = 17,5$ e (47), e número de variáveis v e linhas l

Método	δ Máximo	v	l
Fenili et al. (2014)	0,994	60	30
Souza et al. (2016)	0,997	57	30
Teorema 1	0,997	51	27

e mínimo e adicionando margem de folga para a variação, foi utilizado $\tau(t) \in [0,005, 0,040]$, isto é, $\tau = 22,5$ e $\mu = 17,5$.

5.2 Comparação com métodos da literatura

A partir das margens de atraso e com o modelo obtido em (47), os resultados são comparados com outros trabalhos apresentados na literatura. Especificamente, comparam-se os resultados com trabalhos que utilizam taxa de convergência exponencial, como Fenili et al. (2014) e Souza et al. (2016). O maior valor de δ de modo que as condições LMI sejam factíveis, e utilizando $\alpha = 1$ em Fenili et al. (2014) e Souza et al. (2016), é mostrado na Tabela 1.

A Tabela 1 mostra que o método proposto apresenta resultado superior ou equivalente aos métodos presentes na literatura. A vantagem do método, no entanto, se apresenta quando se compara a complexidade numérica, dado o LKF reduzido adotado. A complexidade numérica pode ser de interesse quando a síntese do controlador tiver que atender a critérios de tempo de execução, e.g. controle preditivo robusto a atrasos. Sabe-se que a complexidade numérica depende do solucionador utilizado. Para o solucionador utilizado LMI Toolbox para Matlab (Gahinet et al., 1995), o pior caso é dado por $\mathcal{O}(v^3 l \log(\varepsilon^{-1}))$, sendo ε a precisão desejada, v o número de variáveis escalares e l o número de linhas. A Tabela 1 contém os valores de v e l para os diferentes métodos, mostrando sensível redução no método proposto. A redução do número de variáveis relacionado ao termo Q utilizado em Souza et al. (2016) não prejudicou as margens de atraso obtidas pelo método proposto nos exemplos aqui e em Souza et al. (2016). No entanto, é difícil afirmar que o método proposto será melhor em todos os casos.

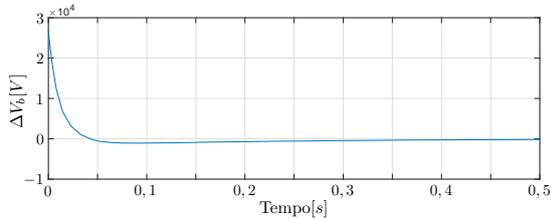


Figura 4: Saída do controlador simulada com $\delta = 0,997$

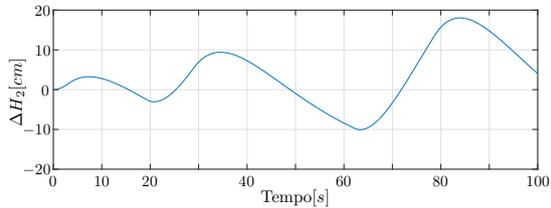


Figura 5: Saída do sistema simulada com $\delta = 0,997$ e saturação

5.3 Implementação prática

Os ganhos retornados pelo Teorema 1 para $\delta = 0,997$ são $k_p = 480.93$, $k_i = 321.02$ e $k_d = 264.41$. A Figura 4 mostra os valores da entrada de tensão da bomba $\Delta V_b(t)$ dados por simulação numérica para uma entrada de referência degrau. A figura mostra que os valores de entrada se aproximam de $30000V$. No entanto, como o regime de operação da bomba foi linearizado em torno de $V_b = 6,16V$, sendo $0V$ a $24V$ a faixa de operação da bomba, as entradas estão sujeitas a uma saturação com limite superior $17,84$ e inferior $-6,16V$. Nota-se que o controlador rapidamente irá saturar as entradas.

De fato, considerando-se a saturação, a resposta esperada do sistema se apresenta instável em simulação. Isto é mostrado na Figura 5 e indica uma limitação para o método em aplicações práticas ao maximizar a taxa de convergência sem considerar restrições nos atuadores.

Devido a isto, escolheu-se um controlador com menor taxa de convergência δ , dada como parâmetro de entrada ao Teorema 1, de modo a atenuar os efeitos da saturação. A redução do critério da taxa de convergência relaxa as condições LMI possibilitando também o projeto de um controlador mais tolerante a atrasos, maior τ ou μ , devido à convexidade do problema. O valor de δ utilizado na síntese do controlado foi $\delta = 0,1$ e os parâmetros do controlado PID projetado foram $k_p = 4,19$, $k_i = 0,35$ e $k_d = 13,45$. Os resultados obtidos com este controlador são mostrados nas figuras 6 e 7. A Figura 6 mostra os resultados de simulação nominal e com saturação, assim como a resposta temporal obtida experimentalmente. As entradas de controle geradas durante o experimento são mostradas na Figura 7. Nota-se, nos primeiros dez segundos, que ainda houve saturação da bomba em seu limite superior $17,84V$. O aspecto

de alta frequência apresentado na figura se relaciona ao ruído do sinal de entrada com atraso não-uniforme. Pode-se sugerir a aplicação de filtros derivativos para diminuir este efeito.

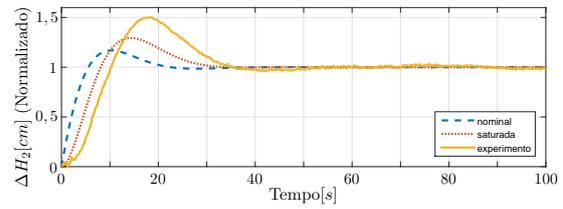


Figura 6: Resposta temporal normalizada com controlador projetado para $\delta = 0,1$. Observa-se as respostas da simulação nominal, a simulação considerando saturações no atuador e o resultado experimental.

Como esperado, a resposta nominal apresenta a melhor solução de compromisso em termos de tempo de assentamento e máxima ultrapassagem, pois descreve a resposta ideal do sistema, para o qual o controlado PID foi projetado. Na sequência, a resposta simulada considerando-se o atuador saturado, mostrou um desempenho inferior ao esperado no caso nominal, mostrando o impacto das saturações. O resultado prático, no entanto, mostrou uma perda de desempenho ainda maior, com maior sobressinal e menor tempo de assentamento que o apresentado na simulação com saturação. Essa diferença pode ser atribuída a incertezas paramétricas e à linearização do modelo do sistema.

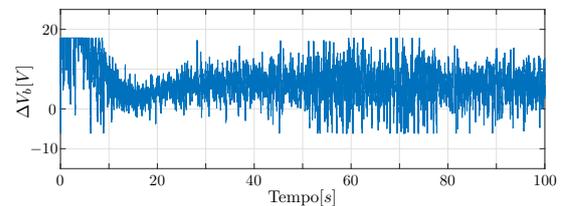


Figura 7: Saída experimental do controlador projetado para $\delta = 0,1$ com saturação.

6 Conclusões

Foi proposta a síntese de um controlador PID para sistemas de segunda ordem controlados em rede, considerando a presença de atrasos variantes de comunicação. Foi utilizado um LKF reduzido e comparações numéricas com resultados pares na literatura mostrou como vantagem o desempenho equivalente quanto à taxa de convergência e menor complexidade numérica.

Além disso, foi possível demonstrar aplicações práticas em que é possível detectar as margens de variação de atrasos e identificaram-se limitações práticas no projeto de controladores tal como a saturação, que deve ser considerada a fim de ga-

rantir a estabilidade do sistema dentro de seus limites operacionais.

Por fim, trabalhos futuros poderão considerar: a modelagem do atraso variante através de uma distribuição de probabilidade, dado que os limites de atraso se mostram apenas em picos, enquanto o atraso em geral varia numa margem inferior (Figura 3); os limites de saturação dos atuadores, dado que a garantia da obtenção de uma maior taxa de convergência se dá com atuação mais agressiva, que na prática se mostrou impraticável.

Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com o apoio financeiro da CAPES. Apoiado por recursos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Realizado com o apoio da FAPEAL.

Referências

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory*, SIAM, Philadelphia, PA.
- Fenili, E. P., Souza, F. O. and Mozelli, L. A. (2014). Sintonia de pid via lmis: imposição de tempo de acomodação em sistemas com retardo no tempo incerto, *Anais do XX Congresso Brasileiro de Automática*, pp. 1127–1134.
- Fridman, E. (2014). *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*, Springer.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI control Toolbox user's guide*, The Math Works Inc.
- Gu, K., Kharitonov, V. and Chen, J. (2003). *Stability of time-delay systems*, Birkhuser, Boston, MA.
- Hespanha, J. P., Naghshtabrizi, P. and Xu, Y. (2007). A survey of recent results in networked control systems, *Proceedings of the IEEE* **95**(1): 138–162.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. and Mendes, E. M. A. M. (2010). Equivalent techniques, extra comparisons, and less conservative control design for TS fuzzy systems, *IET Control Theory & Applications* **4**(12): 2813–2822.
- Parada, M., Borges, R. A., Sbarbaro, D. and Peres, P. L. (2011). Robust pid design for second-order processes with time-delay and structured uncertainties., *IFAC Proceedings Volumes* **44**(1): 4614–4619.
- Parada, M., Sbarbaro, D., Borges, R. A. and Peres, P. L. D. (2017). Robust pi and pid design for first-and second-order processes with zeros, time-delay and structured uncertainties, *International Journal of Systems Science* **48**(1): 95–106.
- Quanser (2017). Quanser coupled tanks system datasheet.
URL: quanser.com/products/coupled-tanks
- Rivera, D. E., Morari, M. and Skogestad, S. (1986). Internal model control: Pid controller design, *Industrial & engineering chemistry process design and development* **25**(1): 252–265.
- Savino, H. J., dos Santos, C, R. P., Souza, F. O., Pimenta, L. C. A., de Oliveira, M. and Palhares, R. M. (2016). Conditions for consensus of multi-agent systems with time-delays and uncertain switching topology, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **63**(2): 1258–1267.
- Seuret, A. and Gouaisbaut, F. (2013). Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems, *Automatica* **49**(9): 2860–2866.
- Souza, F. d. O., Mozelli, L. A., de Oliveira, M. C. and Palhares, R. M. (2016). Lmi design-method for networked-based pid control, *International Journal of Control* **89**(10): 1962–1971.
- Souza, F. O., Palhares, R. M. and Barbosa, K. A. (2008). New improved delay-dependent H_∞ filter design for uncertain neutral systems, *IET Control Theory & Applications* **2**(12): 1033–1043.
- Sun, J., Liu, G. P. and Chen, J. (2009). Delay-dependent stability and stabilization of neutral time-delay systems, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **19**(12): 1364–1375.
- Vilanova, R. and Visioli, A. (2012). *PID control in the third millennium*, Springer.
- Zhang, W., Branicky, M. S. and Phillips, S. M. (2001). Stability of networked control systems, *IEEE Control Systems* **21**(1): 84–99.
- Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1942). Optimum settings for automatic controllers, *trans. ASME* **64**(11).