

# UM MÉTODO ROBUSTO APLICADO NO CONTROLE DE FORMAÇÃO E RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA DE UM CONJUNTO DE ROBÔS MÓVEIS NÃO-HOLONÔMICOS COM DINÂMICA INCERTA

JOSIEL ALVES GOUVÊA<sup>1\*</sup>, ALESSANDRO ROSA LOPES ZACHI<sup>2\*</sup>

<sup>\*</sup> *Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ*

<sup>1</sup> *Estr. de Adrianópolis 1317, Santa Rita, Nova Iguaçu. CEP 26.041-271 - Rio de Janeiro, Brazil.*

<sup>2</sup> *Avenida Maracanã 229, Maracanã. CEP 20.271-110 - Rio de Janeiro, RJ - Brazil.*

Emails: josiel.gouvea@cefet-rj.br, alessandro.zachi@cefet-rj.br

**Abstract**— This paper proposes the implementation of the *Active Disturbance Rejection Control* (ADRC) method with modified plant in a cascaded control strategy. The objective is to perform the formation and the tracking control of a team of nonholonomic mobile robots with uncertain dynamical parameters. Unlike the standard ADRC scheme that requires a known control gain, the modified ADRC controller proposed in this paper uses a new input/output plant description for the structure of each robot dynamic model. Thus, by introducing such modification it is possible to design a robust controller without requiring exact knowledge about the system control gain. Computational simulations results are presented to show the efficiency of the proposed strategy.

**Keywords**— Robust ADRC controller, unknown dynamic, nonholonomic, formation control

**Resumo**— Este artigo propõe a implementação do método de *Controle com Rejeição Ativa de Distúrbios* (ADRC) com planta modificada em uma estratégia de controle em cascata. O objetivo é realizar a formação e o controle de rastreamento de uma equipe de robôs móveis não-holonômicos com parâmetros dinâmicos incertos. Ao contrário do esquema ADRC padrão que requer um ganho de controle conhecido, o controlador ADRC modificado proposto neste artigo usa uma nova descrição entrada/saída da planta para a estrutura de cada modelo dinâmico de robô. Assim, ao introduzir essa modificação, é possível projetar um controlador robusto sem exigir o conhecimento exato sobre o ganho de controle do sistema. Resultados de simulações computacionais são apresentados para mostrar a eficiência da estratégia proposta.

**Palavras-chave**— Controle robusto ADRC, dinâmica incerta, não-holonômico, controle de formação

## 1. Introdução

Controle de formação de sistemas com múltiplos agentes tem recebido significativa atenção devido a sua ampla variedade de aplicações, tais como engenharia naval (Cui et al., 2010), submarina (Li et al., 2016) e aeroespacial (Dong et al., 2016). Entre as diversas estratégias de controle de formação, pode-se citar a baseada em comportamento (behavior-based) (Antonelli et al., 2010), consenso (Ren et al., 2007), líder-seguidor (Tanner et al., 2004), coordenação de grupo usando passividade (Arcak, 2007), estrutura virtuais (van den Broek et al., 2009) e função potencial (Hengster-Movrić et al., 2010).

No caso do controle de formação de robôs móveis, o objetivo principal é controlar cada agente utilizando somente informações dos seus vizinhos em uma estratégia de controle descentralizada. Neste contexto, foram obtidos resultados para robôs holonômicos (Tanner et al., 2007) e não-holonômicos (Mastellone et al., 2007), considerando os mesmos modelos cinemáticos e dinâmicos. Contudo, um problema relevante da área de controle é a incerteza no conhecimento dos valores dos parâmetros dinâmicos, seja por problemas de modelagem ou variação dos mesmos conforme as condições de operação. Este problema foi abordado, entre outros, em (Lima et al., 2014; Peng et al., 2016), onde foram implementados controladores adaptativos para contornar as incertezas

paramétricas.

Seguindo o estudo na área de controle de formação de agentes não-holonômicos incertos, este trabalho propõe a utilização de uma extensão do controlador ADRC (*Active Disturbance Rejection Control*) para plantas com ganho de controle incerto (Correia et al., 2017). A vantagem do ADRC com relação às estratégias de controle adaptativas comumente utilizadas no controle de formação, está relacionada ao seu menor custo computacional, já que a versão linear da técnica é de fácil implementação e apresenta propriedades de robustez com relação à perturbações externas. O controle de formação foi implementado dividindo-se os modelos dinâmicos dos robôs em uma parte dinâmica em série com uma parte cinemática não-holonômica. Utiliza-se então uma estrutura de controle em cascata, constituída de um controlador de rastreamento e formação cinemático em cascata com um controlador ADRC, que faz com que as velocidades de saída da parte dinâmica rastream os sinais de velocidade desejados gerados pelo controlador cinemático. A estratégia de formação por função potencial e líderes virtuais do controlador de rastreamento cinemático permite o rastreamento de uma trajetória de referência gerada pelos líderes virtuais enquanto se evita colisões entre os robôs.

É importante salientar que as leis de controle e formação propostas neste artigo são descentra-

lizadas, isto é, não há uma autoridade central controlando a formação. Portanto, os robôs são autônomos e o controle de cada robô é calculado utilizando-se somente a sua distância com relação aos robôs vizinhos.

Esse artigo é organizado da seguinte forma: Na Seção 2 é definido e descrito o problema de controle de formação. Na Seção 3 é apresentado o controlador ADRC com planta modificada, onde as propriedades de rastreamento de trajetória do controlador é provada matematicamente. A estratégia de controle em cascata é apresentada na Seção 4. Os resultados de simulação são apresentados na Seção 5. Finalmente, na Seção 6 são apresentadas as conclusões finais.

## 2. DEFINIÇÕES E DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere um conjunto de  $N$  robôs móveis não-holonômicos. Para  $i = 1, \dots, N$ , o modelo dinâmico de cada robô é descrito por:

$$M_i(q_i) \ddot{q}_i + C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i = B_i(q_i) \tau_i + J^T(q_i) \lambda_i \quad (1)$$

$$J(q_i) \dot{q}_i = 0 \quad (2)$$

onde  $q_i \in \mathbb{R}^n$  é a configuração do robô,  $J(q_i) \in \mathbb{R}^{k \times n}$  são as restrições cinemáticas,  $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$  são os multiplicadores de Lagrange,  $M_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de inércia,  $C_i(q_i, \dot{q}_i) \dot{q}_i \in \mathbb{R}^n$  são as forças centrípeta e Coriolis,  $\tau_i \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de torques aplicados,  $B_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  é a matriz de entrada e  $p = n - k$ . Considerando  $R_i(q_i) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tal que  $J_i(q_i)R_i(q_i) = 0$ , pode-se trocar as restrições (2) pelo modelo cinemático

$$\dot{q}_i = R_i(q_i) v_i \quad (3)$$

onde  $v_i \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de *pseudo*-velocidades. Considerando  $\ddot{q}_i = R_i(q_i)\dot{v}_i + \dot{R}_i(q_i)v_i$  e substituindo (3) em (1), o modelo dinâmico de cada robô também pode ser expresso por

$$M_{Ri}(q_i) \dot{v}_i + R_i^T(q_i)C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i) v_i = B_{Ri}(q_i) \tau_i \quad (4)$$

onde  $M_{Ri}(q_i) = R_i^T(q_i)M_i(q_i)R_i(q_i)$ ,  $C_{Ri}(q_i, \dot{q}_i) = M_i(q_i)\dot{R}_i(q_i) + C_i(q_i, \dot{q}_i)R_i(q_i)$  e  $B_{Ri}(q_i) = R_i^T(q_i)B_i(q_i)$ .

A topologia de troca de informações entre robôs é descrita por um grafo. Então, os  $N$  robôs móveis são representados como  $N$  vértices em  $\mathcal{V}$  de um grafo  $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ . A comunicação entre robôs pode ser descrita pelo conjunto de aresta  $\mathcal{E}$  do grafo  $\mathcal{G}$ . Uma orientação de um grafo  $\mathcal{G}$  (grafo direcionado) é a associação de uma direção à cada aresta, de modo que a aresta  $(i, j) \in \mathcal{E}$  se existe um arco do vértice  $i$  para o vértice  $j$ . Um grafo é não direcionado se as arestas não tem orientação ( $(i, j) = (j, i) \in \mathcal{E}$ ). Seja  $\mathcal{N}_i$  uma coleção de vizinhos do robô  $i$ , i.e., um conjunto de robôs cujos

estados estão disponíveis para o robô  $i$ . A informação disponível para o controlador do robô  $i$  é composta somente pelos estados do robô  $i$  e robô  $j$  para  $j \in \mathcal{N}_i$ . Um caminho de comprimento  $r$  do robô  $i$  para o robô  $j$ , é uma sequência de  $r + 1$  vértices distintos, iniciando com  $i$  e terminando com  $j$ , tal que vértices consecutivos são vizinhos. Se existir um caminho entre quaisquer dois vértices de um grafo  $\mathcal{G}$ , então  $\mathcal{G}$  é dito ser conectado. Um grafo é uma árvore se for conectado e sem ciclos, de modo que, quaisquer dois vértices são conectados por exatamente um caminho simples.

Para um grafo direcionado (digrafo), a matriz de incidência  $B(\mathcal{G})$  é a matriz cujas linhas e colunas são indexadas pelos vértices e arestas de  $\mathcal{G}$  respectivamente, tal que o elemento  $i, j$  de  $B(\mathcal{G})$  é igual a 1 se a aresta  $j$  está chegando no vértice  $i$ ,  $-1$  se a aresta  $j$  está saindo do vértice  $i$ , e 0 de outro modo. Neste artigo, o fluxo de informação entre dois vizinhos é assumido ser bidirecional. O objetivo do controle é guiar os  $N$  robôs para uma formação enquanto uma trajetória definida por um ou mais líderes virtuais é rastreada. Para isso, os  $N$  agentes devem convergir para uma configuração que minimiza

$$J = \sum_{i=1}^N J_i + \sum_i^m J_{\bar{z}_i}(\bar{z}_i - \bar{z}_{rlvi}), \quad (5)$$

com

$$J_i = \sum_{i,j \in \mathcal{N}_i}^N J_{ij}(\bar{z}_{ij}) \quad (6)$$

onde  $m \leq N$  é o número de líderes,  $\bar{z}_{rlvi} = [x_{rlvi} \ y_{rlvi}]^T$  e  $\bar{z}_i = [x_i \ y_i]^T$  são as posições de cada líder virtual e robô no plano cartesiano,  $\bar{z}_{ij} = \bar{z}_i - \bar{z}_j$  e  $J_{ij}$  e  $J_{zi}$  são definidos a seguir (Leonard and Fiorelli, 2001):

**Definição 1** A função potencial  $J_{ij}$  é uma função diferenciável da distância  $\bar{z}_{ij}$  entre os agentes  $i$  e  $j$  tal que,

1.  $J_{ij}(\bar{z}_{ij}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\bar{z}_{ij}\| \rightarrow \infty$  e  $\|\bar{z}_{ij}\| \rightarrow 0$ .
2.  $J_{ij}$  alcança seu único mínimo quando os agentes  $i$  e  $j$  alcançam uma posição relativa desejada  $d_{ij}$ .

**Definição 2** A função potencial de rastreamento  $J_{\bar{z}_i}$  é uma função não negativa e diferenciável da posição  $\|\bar{z}_i\|$  do agente  $i$  tal que,

1.  $J_{\bar{z}_i}(\bar{z}_i - \bar{z}_{rlvi}) \rightarrow \infty$  quando  $\|\bar{z}_i\| \rightarrow \infty$ .
2.  $J_{\bar{z}_i}$  alcança o seu único mínimo para  $\bar{z}_i = \bar{z}_{rlvi}$ .

Note que  $J_{ij}$  define as distâncias desejadas entre vizinhos, enquanto  $J_{\bar{z}_i}$  define a trajetória desejada. Além disso, considerando os robôs vizinhos

$i$  e  $j$  com líderes virtuais, as trajetórias de referência definida por esses líderes devem ser tais que as distâncias  $d_{ij}$  entre os mesmos, descrita por

$$d_{ij} = \|\bar{z}_{rlvi} - \bar{z}_{rlvj}\|, \quad (7)$$

devem ser compatíveis com as distâncias entre robôs  $\|\bar{z}_{ij}\|$  que minimizam  $J_i$ . Note também que, uma vez que a formação é mantida em uma configuração que minimiza  $J$ , esta se comporta de forma similar à um corpo rígido. Portanto, a orientação do vetor entre líderes virtuais  $\bar{z}_{rlvi} - \bar{z}_{rlvj}$  define a orientação da formação.

Na próxima seção, é apresentado o controlador ADRC com planta modificada, utilizado no controle de formação proposto neste artigo.

### 3. CONTROLADOR ADRC COM PLANTA MODIFICADA

Considere uma classe de sistemas lineares e invariantes no tempo de segunda ordem representada por

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = bu, \quad (8)$$

onde  $y \in \mathbb{R}$  representa a variável de saída da planta e  $u \in \mathbb{R}$  representa a variável de entrada. Os coeficientes  $a_1$  e  $a_0$  são constantes reais e  $b \in \mathbb{R}$  é a constante que será, doravante, denominada *ganho de controle*. Reescrevendo (8) na forma

$$\ddot{y} = f + bu, \quad (9)$$

surge o termo

$$f = -a_1\dot{y} - a_0y. \quad (10)$$

Com esta abordagem, o sistema dinâmico da Eq. (9) pode ser considerado como uma cadeia de dois integradores em série, com sinal de entrada  $u$ , sinal de saída  $y$  e sujeito a um distúrbio de entrada  $f$ . Em (Han, 1998; Gao, Huang and Han, 2001; Han, 2009), este termo  $f(t)$ , que é definido pela combinação do sinais não mensuráveis do sistema, foi denominado de *distúrbio generalizado*. Nesta formulação, uma lei de controle estabilizante poderia ser escolhida como:

$$u(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \left[-f - \lambda_1\dot{y} - \lambda_0(y - y^*)\right], \quad (11)$$

sendo  $y^*$  um sinal de referência e as constantes  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$  os coeficientes de um polinômio (mônico) *Hurwitz* de segunda ordem. Entretanto, como o termo  $f$  não é mensurável, a lei de controle (11) não pode ser implementada diretamente. Contudo, se por metodologia de projeto, o distúrbio  $f$  for considerado como uma variável de estado estendida, isto é,  $X_1 = y$ ,  $X_2 = \dot{y}$  e  $X_3 = f$ , então uma representação de estados para o sistema em (9) poderia ser:

$$\dot{X}_1 = X_2, \quad \dot{X}_2 = X_3 + bu, \quad \dot{X}_3 = \dot{f}, \quad (12)$$

para a qual são definidas as seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0], D = [0]$$

Projetando um estimador (observador) de estados para o sistema, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= A\hat{X} + Bu + Le_y, \\ \hat{y} &= C\hat{X}, \end{aligned} \quad (14)$$

sendo  $e_y = (y - \hat{y})$  o erro de saída do observador e  $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T \in \mathbb{R}^3$  o vetor de ganhos ajustáveis para gerar estimativas dos sinais da lei de controle em (11), ou seja,

$$u(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \left[-\hat{X}_3 - \lambda_1\hat{X}_2 - \lambda_0(\hat{X}_1 - y^*)\right], \quad (15)$$

onde  $\hat{X}_1$ ,  $\hat{X}_2$  e  $\hat{X}_3$  são as respectivas estimativas de  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  (ou  $f$ ).

A lei de controle (15) corresponde à estratégia ADRC proposta em (Gao, Hu and Jiang, 2001). Em (Correia et al., 2017) prova-se que o observador de estados estendido (14) e a lei de controle (15) garantem, considerando  $y^*$  constante e dada uma sintonia apropriada dos ganhos  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  do observador e  $\lambda_1$ ,  $\lambda_0$  da lei de controle, que  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y - y^*) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_x = \mathbf{0}$ , onde

$$e_x = \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{x2} \\ e_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \hat{X}_1 \\ \dot{y} - \hat{X}_2 \\ f - \hat{X}_3 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Contudo, note que o projeto do observador estendido, definido em (14), e a lei de controle (15), são dependentes do valor exato do ganho de controle  $b$  da planta. Na falta do conhecimento exato desta constante, o projeto do observador estendido fica inviabilizado, causando uma restrição de aplicação do método ADRC tradicional em plantas com incerteza no ganho de controle. Além disso, o objetivo aqui é também resolver o problema de rastreamento, ou seja,  $y^*$  varia em função do tempo. Para isso, são feitas inicialmente as seguintes hipóteses fundamentais para implementar o ADRC com planta modificada:

- (H1) *O sinal de saída  $y(t)$  da planta é mensurável;*
- (H2) *O ganho de controle  $b$  é uma constante não-nula que possui sinal conhecido.*

A ideia principal do ADRC com planta modificada é promover uma transformação estrutural no sistema original, do ponto de vista entrada/saída, a fim de se obter um novo sistema dinâmico com ganho de controle conhecido. Em seguida, o método ADRC padrão é aplicado para controlar a saída deste novo sistema e verificar se

os efeitos resultantes na planta original atenderam aos objetivos delineados inicialmente. A metodologia utilizada, para promover a transformação estrutural, consiste na introdução de um filtro linear e estável  $Q_0(s)$  em paralelo com a planta, conforme o diagrama em blocos da Figura 1. No diagrama,  $K_0 > 0 \in \mathbb{R}$  representa uma constante de projeto e  $sign(b)$  é uma constante que representa os valores  $+1$ , para  $b > 0$ , e  $-1$ , para  $b < 0$ . Sendo  $Q_0(s)$  um filtro estável, então tem-se que:

$$\gamma > 0, \quad (s + \gamma)^2 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0.$$

Escrevendo a equação dinâmica do novo sinal de saída  $z(t)$ , considerando  $\beta = K_0 sign(b)$  e com base na configuração da Figura 1, tem-se que:

$$z = \beta y + u_f, \quad (17)$$

$$\ddot{z} = \beta(-a_1 \dot{y} - a_0 y + bu) + \ddot{u}_f, \quad (18)$$

$$\dot{u}_f = \dot{z} - \beta \dot{y}, \quad (19)$$

$$\ddot{u}_f = -\alpha_1 \dot{u}_f - \alpha_0 u_f + \dot{u}. \quad (20)$$

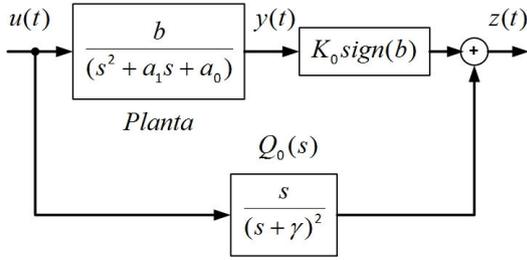


Figura 1: Diagrama em blocos da solução proposta.

Utilizando (19) e (20) em (18), a dinâmica de segunda ordem vai resultar em

$$\ddot{z} = -\alpha_1 \dot{z} - \alpha_0 z + \beta(\alpha_1 - a_1) \dot{y} + \beta(\alpha_0 - a_0) y + b_p u + \dot{u}, \quad (21)$$

sendo  $b_p = K_0 sign(b) b = K_0 |b|$ . Definindo-se a perturbação generalizada  $g$  como sendo:

$$g = \beta(\alpha_1 - a_1) \dot{y} + \beta(\alpha_0 - a_0) y + b_p u, \quad (22)$$

então a Eq. (21) reduz-se à:

$$\ddot{z} + \alpha_1 \dot{z} + \alpha_0 z = g(t) + \dot{u}. \quad (23)$$

Com esta abordagem, o novo sinal de controle passa a ser  $\dot{u}$ , que possui ganho unitário. Como será mostrado nos desenvolvimentos a seguir, agindo-se desta forma, é possível aplicar o método ADRC tradicional no sistema modificado da Eq. (23) sem a exigência do conhecimento exato do parâmetro  $b$  da planta original.

### 3.1 Projeto do observador

Definindo-se as variáveis de estado por  $Z_1 = z$ ,  $Z_2 = \dot{z}$  e  $Z_3 = g(t)$ , a representação de estados

do sistema (23), na forma canônica controlável e considerando o estado estendido  $Z_3$ , possui as seguintes matrizes:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$C_m = [1 \ 0 \ 0], D_m = [0].$$

Uma vez que o par  $(A_m, C_m)$  é observável, então o observador estendido (ADRC) para o sistema (24) assume o seguinte formato:

$$\begin{cases} \dot{\hat{Z}}_1 = \hat{Z}_2 + \bar{L}_1 e_z \\ \dot{\hat{Z}}_2 = -\alpha_0 \hat{Z}_1 - \alpha_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \dot{u} + \bar{L}_2 e_{z1} \\ \dot{\hat{Z}}_3 = \bar{L}_3 e_z, \end{cases} \quad (25)$$

sendo  $\hat{Z}_1$ ,  $\hat{Z}_2$  e  $\hat{Z}_3$  os respectivos estados estimados de  $z$ ,  $\dot{z}$  e  $g$ ,  $e_{z1} = z - \hat{Z}_1$  o erro de saída do estimador e  $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$  os ganhos do estimador. Com esta nova estrutura, a dinâmica dos erros do observador será dada por:

$$\begin{cases} \dot{e}_z = \underbrace{(A_m - \bar{L} C_m)}_{\bar{A}_m} e_z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_g} \dot{g}, \\ e_y = C_g e_z, \end{cases} \quad (26)$$

onde  $\bar{L} = [\bar{L}_1 \ \bar{L}_2 \ \bar{L}_3]^T$ . Para obter a função de transferência que relaciona a entrada  $\dot{g}$  com a saída  $e_{z3} = g - \hat{Z}_3$ , basta calcular a expressão

$$\frac{E_{z3}(s)}{sG(s)} = C_g (sI - \bar{A}_m)^{-1} B_g,$$

com  $C_g = [0 \ 0 \ 1]$ . Logo, escolhendo-se  $\bar{L}_1, \bar{L}_2$  e  $\bar{L}_3$  tal que os pólos do estimador sejam iguais, pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \frac{E_{z3}(s)}{G(s)} &= \frac{(s+w_0)^3 - w_0^3}{(s+w_0)^3}, \\ 3w_0 &= \bar{L}_1 + \alpha_1, \\ 3w_0^2 &= \alpha_1 \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \alpha_0 \\ w_0^3 &= \bar{L}_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Lembrando que  $E_{z3} = G(s) - \hat{Z}_3(s)$ , é possível simplificar a Eq. (27) para obter a relação:

$$\hat{Z}_3(s) = \frac{w_0^3}{(s+w_0)^3} G(s). \quad (28)$$

### 3.2 Projeto de Controle

Observe que a parte homogênea de (23) (análoga ao polinômio do denominador do filtro  $Q_0(s)$ , dado por (20)) é estável. Logo, para promover a convergência assintótica de  $z$  para um valor de referência  $z^*$ , basta escolher uma lei de controle  $\dot{u}$  do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\hat{Z}_3 + \alpha_0 z^* + \alpha_1 \dot{z}^* + \ddot{z}^*, \\ z^* &= \beta y^*. \end{aligned} \quad (29)$$

Substituindo-se (29) em (23), obtém-se

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = \underbrace{g(t) - \hat{Z}_3}_{e_{z3}}, \quad (30)$$

onde  $e = z - z^*$ . Uma condição suficiente para  $z \rightarrow z^*$  é  $\hat{Z}_3 \rightarrow g$ . De acordo com (28), isto pode ser obtido fazendo-se  $w_0 \rightarrow \infty$ , que é uma atribuição de valor inviável na prática. Sendo assim, é necessário investigar o sistema planta-observador-controlador em malha fechada como um todo para identificar se existem outras condições que possam assegurar suas propriedades de estabilidade e convergência.

### 3.3 Análise de estabilidade

Para facilitar os desenvolvimentos matemáticos que se seguem, sem perder a consistência matemática, assume-se, com base na Eq. (28), que:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_3(s) &= c_0 G(s). \\ c_0 &\in (0; 1). \end{aligned} \quad (31)$$

Em (31),  $c_0 \in \mathbb{R}$  é uma variável definida apenas para fins de análise e representa um fator de escala entre a estimativa e o valor de  $G(s)$ . Escrevendo (29) no domínio da frequência, com base em (31), tem-se

$$sU(s) = -c_0 G(s) + J^*(s), \quad (32)$$

onde  $J^*(s)$  é a representação de  $j = \alpha_0 z^* + \alpha_1 \dot{z}^* + \ddot{z}^*$  no domínio da frequência. Manipulando (32) com a ajuda de (8), (22) e  $b_p = K_0|b|$ , é possível deduzir a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{(s^2 + a_1 s + a_0)J^*(s)}{s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}. \\ p_2 &= a_1 + b_p c_0, \\ p_1 &= a_0 + b_p c_0 \alpha_1, \\ p_0 &= b_p c_0 \alpha_0. \end{aligned} \quad (33)$$

Observe em (33) que, com exceção do polo simples na origem, é possível alocar os demais polos da função  $U(s)$  no semi-plano lateral esquerdo do plano complexo apenas escolhendo-se valores para  $K_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_0$ . Ajustando-se estes parâmetros, é possível afirmar, uma vez que o sinal de referência  $z^*(t)$  é limitado, que a derivada do sinal de controle  $\dot{u}(t)$  também será limitada, assim como  $\hat{Z}_3$  (ver (29)). Uma vez que  $\omega_0$  pode ser alocado no semiplano lateral esquerdo por uma escolha apropriada de  $\bar{L}$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_0$ , conclui-se de (28) que  $g(t)$  é limitado e conseqüentemente também é  $e_{z3}(t)$ . Contudo, de (20) e (30) sabe-se respectivamente que

$$U_f(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \bar{U}(s) \quad (34)$$

e

$$E(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} E_{z3}(s) = \frac{1}{(s + \gamma)^2} E_{z3}(s). \quad (35)$$

onde  $\bar{U}$  é a representação de  $\dot{u}(t)$  no domínio da frequência. Portanto,  $u_f(t)$  e  $e(t) = z(t) - z^*(t)$  são limitados e podem ser feitos arbitrariamente pequenos aumentando-se o parâmetro  $\gamma$ . Finalmente, a partir das conclusões anteriores, (17) e (29), conclui-se o mesmo de  $e_y = y - y^*$ .

O resultado destas análises é resumido no Teorema 1 a seguir.

**Teorema 1** *Considere o sistema de controle composto pela planta modificada (17)-(20), pelo observador de estados estendido (25) e pela lei de controle (29). Se os valores das constantes de projeto  $\bar{L}_1$ ,  $\bar{L}_2$ ,  $\bar{L}_3$  do observador,  $\gamma$  do filtro  $Q_0(s)$  e  $K_0$  da planta modificada forem escolhidos de forma que os polinômios*

$$\bar{\alpha}_1(s) = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3, \quad (36)$$

$$\bar{\alpha}_2(s) = s^2 + 2\gamma s + \gamma^2, \quad (37)$$

*sejam Hurwitz, onde  $\omega_0$  é dado por (27), então as seguintes propriedades são válidas para o sistema em malha fechada:*

- (i) *Todos os sinais do sistema são uniformemente limitados  $\forall t$ ;*
- (ii) *O erro de rastreamento  $e_y(t) = y(t) - y^*$  pode ser reduzido arbitrariamente aumentando-se o valor de  $\gamma$ .*

Toda a análise das propriedades de rastreamento da estratégia ADRC com planta modificada foi implementada com o objetivo de utiliza-la em uma estrutura em cascata, visando o controle de formação e rastreamento de trajetória por um conjunto de robôs móveis não-holonômicos com dinâmica incerta. Portanto, na próxima seção será apresentada toda a estratégia de controle utilizada.

## 4. ESTRATÉGIA DE CONTROLE

Neste trabalho é utilizada, para cada robô da formação, uma estratégia de controle em cascata. Esta estratégia consiste em separar o sistema em uma parte dinâmica e uma parte cinemática, como mostrado na Figura 2.

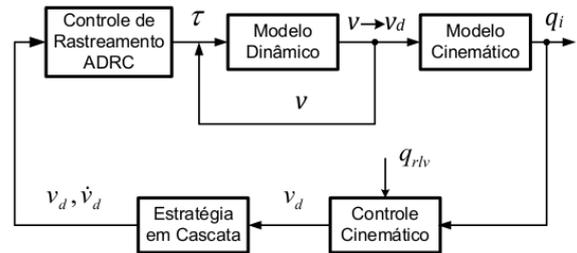


Figura 2: Estrutura de controle em cascata

Então, primeiramente é projetado um controlador de formação e rastreamento cinemático para

(3), que gera um comando de velocidade desejada  $v_{di}$ . Contudo, de (3) sabe-se que

$$\dot{q}_i = R(q_i) e_{v_i} + R(q_i) v_{di} \quad (38)$$

onde  $e_{v_i} = v_i - v_{di}$ . Portanto, projetando-se um controlador de rastreamento dinâmico tal que  $v_i \rightarrow v_{di}$ , conclui-se que a diferença entre o modelo dinâmico, descrito por (4) e (38), e o modelo cinemático (3) é um sinal de erro  $e_{v_i}$  tendendo para zero. A seguir, é apresentado o controlador de formação e rastreamento cinemático.

#### 4.1 Formação e rastreamento cinemático

Considerando, inicialmente, o caso de uma formação de robôs unicyclos, tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \\ \dot{\theta}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & 0 \\ \sin(\theta_i) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{di} \\ \omega_{di} \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde  $u_{di}$  e  $\omega_{di}$  são, respectivamente, as velocidades linear e angular e  $\theta_i$  a orientação de cada robô da formação. Então, para cada robô, pode-se propor uma lei de controle cinemática

$$u_{di} = -k_{f_i} e_{f_i} + \bar{u}_{r_i} \quad (40)$$

$$\omega_{di} = u_{r_i} k_{r_i} \bar{e}_{r_i} + k_{w_i} e_{\psi_{r_i}} + w_{r_i} \quad (41)$$

para os robôs rastreando os líderes virtuais ( $i = 1, \dots, m$ ) e

$$u_{di} = -k_{f_i} e_{f_i}, \quad \omega_{di} = -k_{w_i} e_{\psi_{f_i}}, \quad (42)$$

para os outros robôs da formação ( $i = m + 1, \dots, N$ ), onde  $e_{f_i} = \nabla_{\bar{z}_i} J^T R_{li}$  é a projeção de  $\nabla_{\bar{z}_i} J^T$  na direção de movimentos  $R_{li} = [\cos(\psi_i) \sin(\psi_i)]$  permitida pela restrição não-holonômica;  $e_{\psi_{r_i}} = \sin(\psi_i - \psi_{r_i})$  é o erro de orientação do robô  $i$  com respeito à orientação do seu líder virtual,  $\bar{e}_{r_i} = (\bar{z}_i - \bar{z}_{rlvi})^T R_{ni}$  é a projeção do vetor de posição relativa de cada robô com relação ao seu líder virtual no espaço ortogonal a  $R_{li}$ , definido por  $R_{ni} = [-\sin(\psi_i) \cos(\psi_i)]^T$ , e  $\bar{u}_{r_i} = u_{rlvi} \cos(\psi_{r_i} - \psi_i)$  é a projeção do vetor velocidade  $u_{rlvi}$  de um líder virtual na direção do seu seguidor. A configuração  $\bar{z}_{rlvi}$  de cada líder virtual é definida por

$$\bar{z}_{rlvi}(t) = \bar{z}_{r1}(t) + d_i(t) \quad (43)$$

onde  $\bar{z}_{r1}(t) = [x_{r1}(t) \ y_{r1}(t)]^T$  é uma trajetória definida por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{r1} \\ \dot{y}_{r1} \\ \dot{\theta}_{r1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{r1}) & 0 \\ \sin(\theta_{r1}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v_{r1}(t) \quad (44)$$

onde  $v_{r1}^T = [u_{r1} \ w_{r1}]$  e  $u_{r1}$ ,  $w_{r1}$  são velocidades linear e angular comuns a todos os líderes. Além disso,  $d_i(t)$  é usado para definir a orientação

da formação e deve ser escolhido para obedecer o molde geométrico definido pela função potencial.

Em (Lima et al., 2014) mostra-se que as leis de controle (40), (41) e (42) garantem a convergência da formação para uma configuração que minimiza a função potencial  $J$ . Contudo, neste trabalho, as entradas do modelo cinemático (3) não são as velocidades linear  $u_{di}$  e angular  $\omega_{di}$ , mas as velocidades angulares nas rodas. Portanto, considerando a estrutura em cascata (38), tem-se

$$R_i(q_i) = \frac{r_i}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \sin(\theta_i) \\ b_i^{-1} & -b_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (45)$$

e  $v_{di}^T = [\omega_{d1i} \ \omega_{d2i}]$ , onde  $\omega_{d1i}$  e  $\omega_{d2i}$  são as velocidades lineares nas rodas direita e esquerda respectivamente. Neste caso, deve-se utilizar uma matriz transformação que relaciona  $\omega_{di}$  e  $u_{di}$  com as correspondentes velocidades angulares das rodas  $\omega_{d1i}$  e  $\omega_{d2i}$ . Ou seja,

$$v_{di} = \begin{bmatrix} \omega_{d1i} \\ \omega_{d2i} \end{bmatrix} = \frac{1}{r_i} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & b_i \\ 1 & -b_i \end{bmatrix}}_{B_i} \begin{bmatrix} u_{di} \\ \omega_{di} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Na próxima seção, será apresentado o controlador de rastreamento dinâmico, que utiliza a estratégia ADRC com planta modificada e garante  $e_{v_i} \rightarrow 0$ .

#### 4.2 Controle de rastreamento dinâmico

Neste artigo, considera-se uma formação de robôs móveis com acionamento diferencial, onde as entradas são os torques nas rodas. Portanto, tem-se

$$M_{Ri} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix}, C_{Ri} = \begin{bmatrix} 0 & C\omega_i \\ -C\omega_i & 0 \end{bmatrix}, \\ B_{Ri} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (47)$$

onde  $\tau_i = [\tau_{1i} \ \tau_{2i}]^T$ ,  $v_i = [\omega_{1i} \ \omega_{2i}]^T$  e  $q_i = [x_i \ y_i \ \theta_i]^T$ , sendo  $m_{11}$ ,  $m_{12}$  e  $C$  parâmetros dinâmicos incertos,  $r_i$  e  $b_i$  parâmetros cinemáticos,  $\tau_{1i}$ ,  $\tau_{2i}$ ,  $\omega_{1i}$  e  $\omega_{2i}$  os torques e as velocidades angulares nas rodas direita e esquerda respectivamente e  $\omega_i = \dot{\theta}_i$  a velocidade angular do robô. Logo, sabe-se que a parte dinâmica do robô pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{m_{12}}{m_{11}} \dot{\omega}_2 + \frac{C}{m_{11}} \omega \omega_2 + \frac{1}{m_{11}} \tau_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{m_{12}}{m_{11}} \dot{\omega}_1 - \frac{C}{m_{11}} \omega \omega_1 + \frac{1}{m_{11}} \tau_2. \end{aligned} \quad (48)$$

Como os parâmetros  $m_{11}$ ,  $m_{12}$  e  $C$  são incertos, os ganhos de controle  $\frac{1}{m_{11}}$  também serão, o que justifica utilização do ADRC com planta modificada. A ideia é considerar (48) como dois sistemas de primeira ordem com perturbações generalizadas  $f_1(t) = \frac{m_{12}}{m_{11}} \dot{\omega}_2 + \frac{C}{m_{11}} \omega \omega_2$  e  $f_2(t) = \frac{m_{12}}{m_{11}} \dot{\omega}_1 - \frac{C}{m_{11}} \omega \omega_1$ . Então, para cada um dos sistemas é aplicado o controlador ADRC com planta

modificada. Vale ressaltar que, por se tratar de sistemas de primeira ordem, o filtro em paralelo  $Q_0(s)$  também assume a forma de um sistema de primeira ordem, ou seja,  $Q_0(s) = s/(s + \gamma)$ . Portanto, de (30) conclui-se, para um sistema de primeira ordem, que

$$\dot{z}_1 + \gamma \bar{z}_1 = g_1(t) + \hat{\tau}_1, \quad \dot{z}_2 + \gamma z_2 = g_2(t) + \hat{\tau}_2 \quad (49)$$

onde  $g_1(t) = \beta(f_1 + b\tau_1 + \gamma\omega_1)$  e  $g_2(t) = \beta(f_2 + b\tau_2 + \gamma\omega_2)$ . Note que, neste caso,  $A_m = \begin{bmatrix} -\gamma & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $C_m = [1 \ 0]$ . Projetando-se então o estimador estendido para  $(i = 1)$  e  $(i = 2)$  (49), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{Z}}_{1i} &= -\gamma \hat{Z}_{1i} + \hat{Z}_{2i} + \bar{L}_1 e_{Z_{1i}} + \hat{\tau}_i \\ \dot{\hat{Z}}_{2i} &= \bar{L}_2 e_{Z_{1i}} \end{aligned} \quad (50)$$

onde  $e_{Z_{1i}} = z_i - \hat{Z}_{1i}$ ,  $Z_{1i} = C_m z_i$  e  $\hat{Z}_{2i}$  é a estimativa da perturbação generalizada  $g_i$ . Portanto, de (29), tem-se a lei de controle

$$\hat{\tau}_i = -\hat{Z}_{2i} + \gamma^2 \beta v_{di} \quad (51)$$

onde  $v_{di}$  é a lei de rastreamento cinemática definida em (46).

**Observação 1** As leis de controle (40),(41) e (42), para a parte cinemática, e (50), para parte dinâmica, garantem, separadamente, o rastreamento de suas respectivas trajetórias de referência. No entanto, para garantir que a estrutura em cascata da Figura 2 também rastreie a trajetória desejada, o controlador de rastreamento dinâmico deve obedecer um tempo mínimo de convergência  $t_m$  que depende da sintonia do controlador de rastreamento cinemático. Contudo, pode-se afirmar que, para qualquer valor dos parâmetros de sintonia do controlador cinemático, sempre haverá valores dos parâmetros do controlador dinâmico grandes o suficiente para  $t_m$  ser alcançado. Uma análise matemática mais rigorosa desse fato, que determine também a relação entre os ganhos dos controladores que garantem a convergência, é uma proposta de trabalho futuro.

## 5. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Considere uma formação de robôs com acionamento diferencial descrito por (3), (4) e (47). A Tabela 1 mostra os valores dos parâmetros dinâmicos correspondentes a diferentes valores de massa  $m_c$  e momento de inércia  $I_\omega$  de um robô de largura  $b = 1.5m$  e rodas de raio  $r = 0.15m$  (Fukao et al., 2000). A ideia é verificar a robustez do controlador de formação e rastreamento à variação dos parâmetros dinâmicos dos robôs, o que pode ocorrer, por exemplo, em uma tarefa de transporte de cargas. Utilizou-se então a lei de controle (51) e o estimador (50), onde os valores de sintonia

Tabela 1: Parâmetros dinâmicos

Par. dinâm.	$m_c = 30kg$ $I_\omega = 15kgm^2$	$m_c = 45kg$ $I_\omega = 25kgm^2$
$m_{11}$	0.2609	0.3838
$m_{12}$	0.1042	0.1501
$C$	0.1350	0.2025

dos parâmetros dos controladores são  $\bar{L}_1 = 1960$ ,  $\bar{L}_2 = 10^6$ ,  $\gamma = 40$  e  $K_0 = 100$  para o controlador de rastreamento dinâmico e  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.5$ ,  $k_{fi} = 150$  e  $k_{\omega_i} = 5$  para o controlador de rastreamento cinemático. As funções potenciais  $J_{ij}$  e  $J_{ri}$  utilizadas no controlador cinemático tem mínimo em  $d_{ij} = 30.2m$  e é descrita abaixo:

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \frac{a_{ij}}{2} \|\bar{z}_{ij}\|^2 + \frac{b_{ij}c_{ij}}{2} \exp(-\|\bar{z}_{ij}\|^2/c_{ij}) \\ J_{ri} &= \|\bar{z}_i - \bar{z}_{rli}\|^2 \end{aligned}$$

onde  $a_{ij} = 0.01$ ,  $b_{ij} = 10$ ,  $c_{ij} = d_{ij}^2/\log(b_{ij}/a_{ij})$ . As condições iniciais  $[x, y, \theta]$  dos robôs são  $[280 \ 0 \ pi]$ ,  $[300 \ 300 \ pi]$ ,  $[-300 \ 0 \ -pi]$  e o objetivo é a formação rastrear dois líderes virtuais movendo-se sobre trajetórias circulares de raio  $R_r = 310m$ .

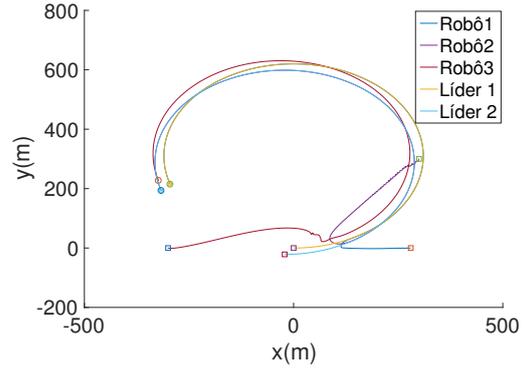


Figura 3: Trajetórias dos robôs:  $m_c = 30kg/I_\omega = 15kgm^2$

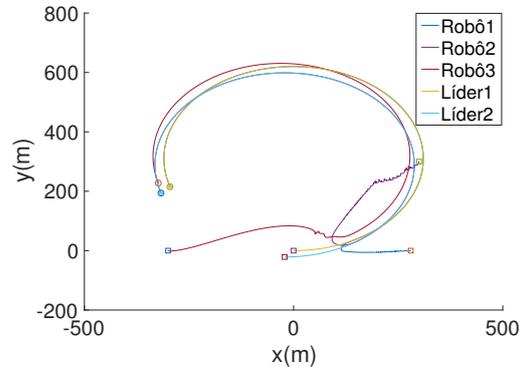


Figura 4: Trajetórias dos robôs:  $m_c = 45kg/I_\omega = 25kgm^2$

As Figuras 3 e 4 mostram que a formação é

alcançada e rastreia a trajetória definida pelo líder virtual. Além disso, não há uma diferença relevante entre as trajetórias dos robôs nas duas figuras, o que mostra a robustez da estratégia proposta à mudança nos parâmetros dinâmicos dos robôs da formação.

## 6. CONCLUSÕES FINAIS

Este artigo apresentou a aplicação do controlador ADRC com planta modificada em uma estratégia de controle em cascata, visando o controle de formação e rastreamento de trajetória de um conjunto de robôs móveis não-holonômicos com parâmetros dinâmicos incertos. Utilizando simulações computacionais, a estratégia de controle proposta foi aplicada em um conjunto de robôs, onde variou-se os parâmetros dinâmicos destes, visando testar a robustez da estratégia de controle de formação à variação dos parâmetros dinâmicos dos robôs. Os resultados confirmaram a robustez e eficiência da estratégia de controle de formação e rastreamento proposta.

## Referências

- Antonelli, G., Arrichiello, F. and Chiaverini, S. (2010). Flocking for multi-robot systems via the null-space-based behavioral control, *Swarm Intelligence* **4**(1): 37–56.
- Arcak, M. (2007). Passivity as a design tool for group coordination, **52**: 1380–1390.
- Correia, C. A. M., Zachi, A. R. L. and Gouvea, J. A. (2017). Um método de controle robusto por realimentação de saída aplicado em sistemas com parâmetros incertos., *Simposio Brasileiro de Automação Inteligente*, Porto Alegre (RS), pp. 1351–1356.
- Cui, R., Sam Ge, S., Voon Ee How, B. and Sang Choo, Y. (2010). Leader–follower formation control of underactuated autonomous underwater vehicles, *Ocean Engineering* **37**(17): 1491–1502.
- Dong, X., Zhoub, Y., Ren, Z. and Zhong, Y. (2016). Time-varying formation control for unmanned aerial vehicles with switching interaction topologies, *Control Engineering Practice* **46**: 26–36.
- Fukao, T., Nakagawa, H. and Adachi, N. (2000). Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot, *Robotics and Automation, IEEE Transactions on* **16**(5): 609–615.
- Gao, Z., Hu, S. and Jiang, F. (2001). A novel motion control design approach based on active disturbance rejection, *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida, USA.
- Gao, Z., Huang, Y. and Han, J. (2001). An alternative paradigm for control system design, *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*, Vol. 5, IEEE, pp. 4578–4585.
- Han, J. (1998). Auto-disturbance rejection control and its applications, *Control and decision* **13**(1): 19–23.
- Han, J. (2009). From pid to active disturbance rejection control, *IEEE transactions on Industrial Electronics* **56**(3): 900–906.
- Hengster-Movrić, K., Bogdan, S. and Draganjac, I. (2010). Multi-agent formation control based on bell-shaped potential functions, *Journal of Intelligent and Robotic Systems* **58**(2): 165–189.
- Leonard, N. E. and Fiorelli, E. (2001). Virtual leaders, artificial potentials and coordinated control of groups, Orlando (FL), pp. 2968–2873.
- Li, H., Xie, P. and Yan, W. (2016). Receding horizon formation tracking control of constrained underactuated autonomous underwater vehicles, *Robust and Nonlinear Control* **64**: 5004–5013.
- Lima, A., Gouvea, J. A., Lizarralde, F. and Hsu, L. (2014). Trajectory tracking, pose regulation and adaptive formation control of a group of nonholonomic mobile robots, Cape Town, South Africa, pp. 5709–5714.
- Mastellone, S., Stipanovic, D. M. and Spong, M. W. (2007). Remote formation control and collision avoidance for multi-agent nonholonomic systems, Roma (Italy), pp. 1062–1067.
- Peng, Z., Yang, S., Wen, G., Rahmani, A. and Yu, Y. (2016). Adaptive distributed formation control for multiple nonholonomic wheeled mobile robots, *Neurocomputing* **173**: 1485–1494.
- Ren, W., Beard, R. W. and Atkins, E. M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control, **27**: 71–82.
- Tanner, H. G., Jadbabaie, A. and Pappas, G. J. (2007). Flocking in fixed and switching networks, **52**(5): 863–868.
- Tanner, H. G., Pappas, G. J. and Kumar, V. (2004). Leader-to-formation stability, **20**: 443–455.
- van den Broek, T. H., van de Wouw, N. and Nijmeijer, H. (2009). Formation control of unicycle mobile robots: a virtual structure approach, *48th IEEE Conf. on Decision and Control*, IEEE, pp. 8328–8333.