

UMA ABORDAGEM POR RESTRIÇÃO DE POSTO PARA ESTABILIZAÇÃO E COMPUTAÇÃO EXPLÍCITA DE GANHOS DE CONTROLE

STEPHANIE L. BRIÃO*, EUGÊNIO B. CASTELAN*, MATHEUS V. A. PEDROSA*

**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas e Automação
Departamento de Automação e Sistemas
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis, Brasil*

Emails: stephanie.loi@posgrad.ufsc.br, eugenio.castelan@ufsc.br,
matheus.pedrosa@posgrad.ufsc.br

Abstract— The computation of stabilizing State Feedback (StF) and Static Output Feedback (SOF) control gains is treated in this work by considering polyhedral Lyapunov functions. Therefore, the associated nonlinear algebraic necessary and sufficient conditions that prove the closed-loop stability are exploited to propose a rank constrained optimization problem that allows to explicitly design the control gains. More specifically, the associated nonlinear equation is substituted by a rank constrained and linearly structured matrix while keeping the stability condition associated to the polyhedral Lyapunov function. In addition, some control requirements are explored as the speed of states convergence and the control effort, which can be represented by two convex constraints. In the resolution of the proposed optimization problem an iterative method is used requiring a feasible initial solution that, in the present work, is obtained from pole placement techniques. Finally, from a discrete system two numerical experiments are presented to show the effectiveness and some drawbacks of our proposal.

Keywords— State feedback; Static output feedback; Discrete-time systems; Polyhedral Lyapunov functions; Rank-constrained optimization; Explicit gains computation

Resumo— A computação de ganhos de realimentação de estados (StF) e de realimentação estática de saída (SOF) é tratada neste trabalho considerando-se as funções de Lyapunov poliedrais. Assim, as condições algébricas não lineares necessárias e suficientes que provam a estabilidade em malha fechada são exploradas para propor um problema de otimização com restrição de posto que permite projetar explicitamente os ganhos de controle. Mais especificamente, a equação não linear associada é substituída por uma matriz com restrição de posto e estruturada linearmente, mantendo a condição de estabilidade associada à função de Lyapunov poliedral. Além disso, alguns requisitos de controle são explorados como a velocidade de convergência de estados e o esforço de controle, os quais podem ser representados por duas restrições convexas. Na resolução do problema de otimização proposto é utilizado um método iterativo que requer uma solução inicial factível que, no presente trabalho, é obtida a partir de técnicas de posicionamento de polos. Por fim, a partir de um sistema discreto dois experimentos numéricos são apresentados para mostrar a eficácia e algumas desvantagens de nossa proposta.

Palavras-chave— Realimentação de estados; Realimentação estática de saída; Sistemas discretos no tempo; Funções de Lyapunov poliedrais; Otimização com restrição de posto; Computação explícita de ganhos

1 Introdução

Nas últimas décadas, as funções de Lyapunov poliedrais (FLP) têm sido aplicadas com sucesso em diversos problemas de controle, principalmente na área de controle sob restrições. Assim, os conjuntos poliedrais positivamente invariantes associados às FLP foram usados, já no final dos anos 80, para resolver o problema de regulação linear restrita (PRLR) (Vassilaki et al., 1988; Hennes, 1989) e algumas de suas extensões foram propostas posteriormente como, por exemplo, o tratamento de sistemas incertos e de sistemas sujeitos a perturbações (veja (Castelan et al., 2007) e (Hennes, 1995)). Também, pode-se utilizar FLP para determinar aproximações arbitrárias do máximo conjunto invariante dentro das restrições de estado e considerando os limites de entrada de controle, entre outros problemas de análise e síntese encontrados na literatura (Blanchini et al., 2007; Blanchini and Miani, 2008).

No contexto do presente trabalho considera-se sistemas discretos lineares invariantes no tempo (LIT). As condições algébricas necessárias e suficientes de estabilidade para sistemas sob a forma de inclusões de diferenças/diferenciais lineares (IDL) foram obtidas

usando FLP em (Molchanov and Pyatnitskiy, 1989), e no caso de sistemas LIT em (Kiendl et al., 1992). Para sistemas discretos LIT essas condições consistem de uma equação matricial não linear com três matrizes desconhecidas (o ganho de controle, a matriz que define a FLP e uma auxiliar) e de uma restrição adicional de norma infinita referente à matriz auxiliar. Uma interpretação interessante é que a equação matricial não linear pode ser vista como uma transformação de similaridade generalizada e a restrição de norma infinita impõe a estabilidade de Schur à matriz auxiliar e, portanto, ao sistema de malha fechada.

Em (Hu and Blanchini, 2010), são estabelecidas relações entre funções quadráticas de Lyapunov compostas e FLP, onde as condições apresentadas para estabilidade/estabilizabilidade de IDL não são conservadoras. As condições de estabilidade dessas funções não podem ser diretamente formuladas em termos de desigualdades matriciais lineares (Linear Matrix Inequalities-LMI).

No caso das relações algébricas que provam a estabilidade por FLP, a igualdade considerada contém produtos bilineares entre as variáveis matriciais de decisão. Faz-se necessário, então, a utilização de técnicas de otimização não lineares especializadas para

sua utilização no projeto de controladores. Neste contexto, os objetivos do presente trabalho são: *i*) reformular a equação algébrica não linear sob a forma de uma restrição de posto com base em uma matriz estruturada que envolve a linearidade somente da matriz de ganhos de realimentação e da matriz auxiliar já mencionada, e *ii*) mostrar como esta restrição de posto pode ser considerada para efeito da computação explícita da matriz de ganhos de realimentação e da estabilização do sistema em malha fechada, incluindo restrições adicionais relacionadas à velocidade de convergência das trajetórias dos estados para a origem e ao esforço de controle. Adicionalmente, também serão tecidos comentários sobre limitações existentes na proposta original.

Resumidamente, em sistemas LIT considera-se a forma explícita de ganhos de controle da realimentação de estado (StF) e da realimentação estática de saída (SOF). Também, nesses sistemas, trata-se a condição algébrica de estabilidade, que contém uma igualdade não linear. Há diversos métodos que abordam esse tipo de otimização, alguns dependentes de solução inicial factível (Sun and Dai, 2017; Delgado et al., 2014) e outros não dependentes (Fazel, 2002; Recht et al., 2010). O método proposto nesse trabalho é o de Delgado et al. (2014) cujas soluções iniciais foram obtidas por posicionamento de polos (Castelan et al., 2003) e (Syrmos and Lewis, 1993). Assim, depois de obtida a primeira solução, esse método busca por soluções melhores através de uma programação linear (PL) com restrições de estabilidade à matriz auxiliar (Kiendl et al., 1992) e permitindo adicionar critérios de desempenho de controle ao problema.

Na Seção 2 será apresentado o problema de computação explícita de ganhos de controle em StF e SOF. Então, abordam-se as condições algébricas as quais provam a estabilidade em malha fechada pelas FLP. Já a terceira seção mostra em detalhes o problema proposto de restrição de posto, primeiramente focando no projeto de StF explícito e depois no projeto SOF. Utilizando o método proposto de otimização via PL, os resultados gerados por um experimento numérico são mostrados na Seção 4. Logo, finaliza-se esse trabalho com algumas considerações finais.

Notações: Os elementos de um vetor $z \in \mathbb{R}^n$ são denotados por $z_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Os elementos de uma matriz $Z \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são $z_{ij}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$ e $\forall j \in \{1, \dots, m\}$. Igualdades e desigualdades entre vetores e matrizes são consideradas elemento por elemento. $\|z\|_\infty = \max_i |z_i|$ representa a norma infinita de um vetor e $\|Z\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |z_{ij}|$ representa a norma matricial induzida. $\text{posto}(Z)$ denota o posto de uma matriz. $\text{Tr}(Z)$ é o traço de uma matriz. I representa uma matriz identidade de dimensão apropriada. $\mathbb{S}^{2N} = \{Z = Z^T \in \mathbb{R}^{N \times N}; Z \succeq 0\}$ é o conjunto de matrizes simétricas semi-definidas positivas, onde Z^T é a transposição de uma matriz Z . \hat{Z} denota uma matriz estimada de Z . Para qualquer matriz Z , seu valor inicial é denotado Z_0 .

2 Apresentação do Problema e Preliminares

Considere o seguinte sistema discreto linear invariante no tempo:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1)$$

$$y_k = Cx_k, \quad (2)$$

onde $k \in \mathbb{N}$ é o índice de tempo, $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u_k \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e $y_k \in \mathbb{R}^p$ é a saída medida, com matrizes associadas $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ tais que (A, B) é controlável e (C, A) é observável.

Neste trabalho, o interesse principal é encontrar uma lei de controle de tipo StF:

$$u_k = Fx_k, \quad F \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (3)$$

ou uma lei de controle por SOF:

$$u_k = Ky_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (4)$$

de modo que o sistema em malha fechada correspondente seja assintoticamente exponencialmente estável. Mais especificamente, objetiva-se que a matriz de ganho de realimentação F ou K apareça explicitamente nas condições de estabilização para que algumas restrições possam ser diretamente impostas a essas matrizes de realimentação.

Com o objetivo de resolver o problema geral acima, considera-se primeiro o problema StF explícito e depois resolve-se o problema SOF realizando a substituição $F \leftarrow KC$. Assim, o sistema em malha fechada para os dois casos é descrito por:

$$x_{k+1} = (A + BF)x_k \quad (5)$$

e a condição de estabilidade via FLP é como segue (ver (Kiendl et al., 1992) e (Molchanov and Pyatinitkiy, 1989)).

Teorema 1 *O sistema em malha fechada (5) é assintoticamente exponencialmente estável, se e somente se, existir um escalar $r \geq n$ e matrizes $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, com $\text{posto}(L) = n$, e $H \in \mathbb{R}^{r \times r}$, tais que:*

$$L(A + BF) = HL \quad (6)$$

$$\|H\|_\infty \leq \varepsilon \quad (7)$$

para algum escalar real $\varepsilon \in [0, 1)$.

Observação 1: A função de Lyapunov poliedral $v(x_k) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, associada às relações (6) e (7), e decrescente ao longo das trajetórias do sistema em malha fechada (5), é dada por (Kiendl et al., 1992):

$$v(x_k) = \|Lx_k\|_\infty. \quad (8)$$

Assim, para qualquer escalar positivo δ , o conjunto poliédrico simétrico $S(L, \delta) = \{x_k \in \mathbb{R}^n : \|Lx_k\|_\infty \leq \delta\}$ da função (8) é invariante positivo e ε -contrativo (Hennet, 1995; Blanchini and Miani, 2008).

Além disso, o coeficiente de contratividade implica $\rho(A + BF) \leq \varepsilon$ e é então relacionado à velocidade de convergência (exponencial) da resposta do estado.

Observação 2: Os requisitos de desempenho considerados no presente trabalho são: *i*) a velocidade de convergência da resposta do estado através do coeficiente de contratividade ε em (7), e *ii*) o esforço de controle associado à restrição de norma infinita de F :

$$\|F\|_\infty \leq \phi, \quad \phi \in \mathbb{R}_+ \quad (9)$$

A partir dessa igualdade, segue-se que $\|u_k\|_\infty = \|Fx_k\|_\infty \leq \phi\|x_k\|_\infty$ e, por consequência, ϕ determina um limite superior para o esforço de controle representado por $\|u_k\|_\infty$. Logo, consideram-se os requisitos de controle a velocidade de convergência das trajetórias de estado em malha fechada e o limite superior do esforço de controle.

Uma possibilidade de calcular uma matriz F a partir do Teorema 1 é escolher uma matriz H sob a forma real de Jordan sujeita à condição (7) e, em seguida, resolve-se (6) pela técnica de posicionamento de polos. Nessa técnica, a matriz de ganho é calculada no passo final a partir do conjunto de autovetores estabelecidos para o sistema em malha fechada (veja (Hennet, 1995) e (Castelan and Hennet, 1992) para obter mais detalhes), porém a matriz de ganho F não é computada de forma explícita. No entanto, se uma matriz L é dada, como no caso de PRLR, a igualdade (6) pode ser utilizada como restrição de uma PL com a limitação (7), sendo H e F as variáveis matriciais de decisão. Mais especificamente, dada uma matriz L busca-se uma matriz F de forma explícita e, além disso, pode-se considerar restrições lineares adicionais (Santos et al., 1997; Vassilaki et al., 1988; Hennet, 1989).

Neste trabalho, por outro lado, consideram-se que ambas as matrizes L e H não são *a priori* dadas, assim como o ganho F ou K explícitos na formulação. Portanto, a proposta desse artigo surge da necessidade de resolver a equação não linear (6) com a restrição adicional convexa (7). Tendo em vista que os termos não lineares correspondem aos produtos LBF e HL , a busca de solução pode ser realizada usando, por exemplo, a técnica de otimização não linear proposta por Kolodziej et al. (2013) para resolver o problema da programação bilinear correspondente, o qual será objeto de um trabalho futuro. Já neste trabalho, propõe-se uma reescrita da igualdade matricial (6) sob a forma de uma restrição de posto. Assim, uma matriz de estrutura especial, linear em relação às variáveis H e F , é construída sujeita a uma condição de seu posto. Logo, o cálculo da matriz de ganho F para o problema StF, ou da matriz K para SOF, será possível através da formulação de um problema de restrição de posto (PRP) adequado, como será mostrado na próxima seção.

3 Reformulação do Problema para Restrição de Posto

Ao considerar a notação:

$$L = \begin{bmatrix} l_1^T \\ \vdots \\ l_r^T \end{bmatrix}, \quad \text{com } l_j \in \mathbb{R}^n, j = 1, \dots, r, \text{ e}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r1} & \cdots & h_{rr} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

é obtido o seguinte lema fundamental para a nossa abordagem.

Lema 2 *Seja a matriz $\text{tvec}(L) = [l_1^T l_2^T \cdots l_r^T] \in \mathbb{R}^{1 \times nr}$ e a matriz $M(H, F) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ com $N = n \cdot r$, dada em (11):*

$$M(H, F) = \begin{bmatrix} (A + BF) - h_{11}I_n & \cdots & -h_{1r}I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -h_{r1}I_n & \cdots & (A + BF) - h_{rr}I_n \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Então, reescreve-se a igualdade não linear (6) como:

$$\text{tvec}(L) \cdot M(H, F) = 0 \quad (12)$$

Prova: Considerando a notação em (10), a equação matricial (6) pode ser reescrita linha por linha como $l_i^T(A + BF) = \sum_{j=1}^r h_{ij}l_j^T$, com $i = 1, \dots, r$.

Logo, pelas definições de $\text{tvec}(L)$ e $M(H, F)$, obtém-se a relação de igualdade (12). \square

Observe que a matriz $M(H, F)$ é linear em relação às variáveis matriciais H e F . Além disso, existem vetores não nulos $\text{tvec}(L)$ tais que (12) é verificada, se e somente se, $\text{posto}(M(H, F)) < N$. É necessário, porém, obter-se mais informações sobre essa condição de posto para usá-la em otimização. Para tanto, apresenta-se a seguir um resultado básico aplicado à matriz estruturada $M(H, F)$.

Lema 3 *Sejam os conjuntos espectrais de $A + BF$ e H definidos por:*

$$\sigma(A + BF) = \{\lambda_i \in \mathbb{C}, \forall i = 1, \dots, n\} \quad (13)$$

$$\sigma(H) = \{\mu_j \in \mathbb{C}, \forall j = 1, \dots, r\}. \quad (14)$$

Então, o espectro de $M(H, F)$ é composto por todas as possíveis diferenças em pares dos autovalores de $A + BF$ e H , incluindo as multiplicidades algébricas (Horn and Johnson, 1994):

$$\sigma(M(H, F)) = \left\{ \gamma_{ij} = \lambda_i - \mu_j \in \mathbb{C}, \begin{matrix} \forall i = 1, \dots, n, \\ \forall j = 1, \dots, r \end{matrix} \right\} \quad (15)$$

A partir das definições anteriores e do Lema 3, chega-se à proposição seguinte.

Proposição 4 Se a igualdade (6) for verificada com $\text{posto}(L) = n \leq r$, então:

$$\text{posto}(M(H, F)) = \tilde{N} \leq N - n. \quad (16)$$

Prova: Primeiro nota-se que (6) pode ser vista como uma transformação de similaridade generalizada, sob a hipótese $\text{posto}(L) = n \leq r$, o que implica em $\sigma(A + BF) \subseteq \sigma(H)$. Em geral, a partir de (15) afirma-se que $M(H, F)$ tem pelo menos n autovalores nulos e isso resulta em $\text{posto}(M(H, F)) \leq N - n$. \square

A partir dos resultados anteriores, propõe-se a seguinte formulação geral, sob a forma de PRP, para calcular soluções explícitas de ganhos de StF:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } H, F \\ &\text{sujeito a (7), (16) e } f_\ell(H, F) \leq \varphi_\ell, \end{aligned} \quad (17)$$

onde para algum inteiro não negativo ℓ e respectivos limites superiores escalares φ_ℓ , $f_\ell(H, F) \leq \varphi_\ell$ representam restrições convexas adicionais que podem ser impostas no cálculo da matriz de realimentação F ou da matriz H . Dentre essas restrições pode-se, por exemplo, considerar os requisitos de desempenho de controle adicionais ao problema original (6), conforme a Observação 2. Caso o problema (17) tenha solução é necessário verificar se $M(H, F)$ encontrada permite a construção de L , pela relação (12), tal que $\text{posto}(L) = n$. Também, é importante ressaltar que diferentes FLP podem ser associadas as soluções, a partir de (12).

Mesmo que $M(H, F)$ seja linear em relação às variáveis matriciais H e F , ainda assim a restrição de posto (16) não é convexa. Pode-se, entretanto, resolver este problema via programação semi-definida positiva (SDP) utilizando-se a função traço, que é convexa, tomando como base o trabalho de Delgado et al. (2014). Diante disso, uma matriz SDP $\mathcal{M}_a(H, F)$ é construída, dependente da matriz $M(H, F)$ e das matrizes $Y, Z \in \mathbb{S}^N$, possuindo a seguinte forma:

$$\mathcal{M}_a(H, F) = \begin{bmatrix} Y & M(H, F) \\ M^T(H, F) & Z \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^{2N}. \quad (18)$$

Considerando-se o resultado apresentado em (Dattorro, 2011), pode-se substituir a restrição (16) por uma restrição de posto sobre a matriz aumentada $\mathcal{M}_a(H, F)$. Então, o problema PRP (17) é substituído por

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } H, F \\ &\text{sujeito a } \text{posto}(\mathcal{M}_a(H, F)) \leq N - n, \\ &(7) \text{ e } f_\ell(H, F) \leq \varphi_\ell. \end{aligned} \quad (19)$$

Como o problema (19) possui uma restrição de posto em relação à matriz SDP (18) evidencia-se na sequência o seguinte lema adaptado de Delgado et al. (2014).

Lema 5 O posto da matriz $\mathcal{M}_a(H, F) \in \mathbb{S}^{2N}$ é inferior ou igual a $N - n$, se e somente se, existir $Q \in \Phi_{2N, N-n}$, tal que

$$\text{Tr}(\mathcal{M}_a(H, F)Q) = 0, \quad (20)$$

onde $\Phi_{2N, N-n} = \{Q \in \mathbb{S}^{2N}, 0 \preceq Q \preceq I, \text{Tr}(Q) = N + n\}$.

Assim, utilizando-se o Lema 5, o problema PRP (19) torna-se um problema de otimização com restrição convexa do tipo traço, como segue:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \text{Tr}(\mathcal{M}_a(H, F)Q) \\ &\text{sujeito a } \mathcal{M}_a(H, F) \succeq 0, \\ &\text{Tr}(Q) = N + n, \\ &0 \preceq Q \preceq I, \\ &(7) \text{ e } f_\ell(H, F) \leq \varphi_\ell. \end{aligned} \quad (21)$$

Observa-se que a função objetivo não é linear devido a nova variável matricial auxiliar Q . Desse modo, o problema de otimização (21) pode ser resolvido pelo método iterativo proposto em (Delgado et al., 2014). Esse método é descrito abaixo, onde o subscrito κ está associado ao resultado obtido na iteração anterior.

$$\hat{Q}^{\kappa+1} = \arg \{ \min \text{Tr}(\hat{\mathcal{M}}_a(H, F)^\kappa Q) \} \quad (22)$$

$$\hat{\mathcal{M}}_a(H, F)^{\kappa+1} = \arg \{ \min \text{Tr}(\mathcal{M}_a(H, F)\hat{Q}^{\kappa+1}) \}. \quad (23)$$

Uma solução inicial para $\mathcal{M}_a(H, F)^0$ é obtida buscando Y e Z sujeitas à condição em (18), e utilizando uma matriz $M(H_0, F_0)$ a partir de uma solução inicial (H_0, F_0) factível para (6) e (7).

Logo, os procedimentos descritos anteriormente para StF são resumidos pelo Algoritmo 1. O Algoritmo 2 é estabelecido para SOF substituindo $F \leftarrow KC$ no algoritmo anterior.

Algoritmo 1 Realimentação de Estados com Critérios de Desempenho de Controle

Entrada: A, B, F_0, H_0

- 1: Calcule a matriz inicial de $M(H_0, F_0)$;
- 2: Construir a matriz inicial aumentada de $\mathcal{M}_a(H_0, F_0)$;
- 3: Resolver a otimização (21) iterando as equações (22) e (23);
- 4: Buscar L com $\text{posto}(L) = n$ e que satisfaça (12).

Saída: F, H e L

4 Exemplo Numérico

Considere o sistema, formado pelas equações (1) e (2), controlável e observável, e representado pela seguinte tripla (A, B, C) (Hennet, 1995):

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 1.55 & -0.625 \\ -0.1 & 0.4 & -0.25 \\ -0.7 & -0.1 & 0.25 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \\ 2.2 & 1 \end{bmatrix}$$

Algoritmo 2 Realimentação Estática de Saída com Critérios de Desempenho de Controle

Entrada: A, B, C, K_0, H_0

- 1: Calcule a matriz inicial de $M(H_0, K_0C)$;
- 2: Construir a matriz inicial aumentada de $\mathcal{M}_a(H_0, K_0C)$;
- 3: Resolver a otimização (21) iterando as equações (22) e (23);
- 4: Buscar L com $\text{posto}(L) = n$ e que satisfaça (12).

Saída: K, H e L

$$e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde a matriz A em malha aberta é instável com espectro $\sigma(A) = \{1.1282, -0.0391 \pm 0.3731i\}$.

Os Algoritmos 1 e 2 foram implementados no MATLAB (Moler et al., 1982), usando o pacote *cvx* (Grant et al., 2008) para otimização convexa. A tolerância do posto considerada é $\text{rtol} \leq 10^{-10}$, e os dados numéricos obtidos são apresentados a seguir com quatro casas decimais.

4.1 Resultados em StF

Aplicou-se a técnica de posicionamento de polos descrita em (Castelan and Hennes, 1992) para obter as matrizes F_0 e H_0 , mostradas na Tabela 1.

Tabela 1: Resultados para alocação de polos

F_0			H_0		
0.3285	0.7950	-0.3062	0.5	0	0
0.0292	-1.4338	0.7806	0	0.3	-0.3
			0	0.3	0.3

Para essas matrizes têm-se $\|F_0\|_\infty = 2.2436$, $\|H_0\|_\infty = 0.6000$ e $\sigma(H_0) = \sigma(A + BF_0) = \{0.5000, 0.3000 \pm 0.3000i\}$.

Primeiro Experimento: A partir dessas soluções iniciais deseja-se diminuir o coeficiente de contração impondo-se o critério $f_1(H, F) = \|H\|_\infty < \|H_0\|_\infty$, e também manter o esforço de controle compatível com o inicial $f_2(H, F) = \|F\|_\infty \leq \|F_0\|_\infty$. Então, aplicando o Algoritmo 1, com $\|H\|_\infty \leq \varepsilon < \|H_0\|_\infty$ para diferentes valores de $\varepsilon \in \{0.57, 0.47, 0.37, 0.27\}$, encontrou-se os resultados resumidos na Tabela 2.

Tabela 2: Resultados para valores decrescentes de ε

ε	$\ F\ _\infty$	F		
0.57	2.2077	0.3402	0.7833	-0.3112
		0.0070	-1.4256	0.7751
0.47	2.2412	0.3789	0.7561	-0.3333
		-0.0651	-1.4114	0.7647
0.37	2.2436	0.4056	0.7267	-0.3450
		-0.1154	-1.3883	0.7398
0.27	—	—		

Observa-se que é possível obter valores de ε menores, e, portanto, convergência mais rápida das trajetórias de estado, mantendo-se o esforço de controle compatível ao obtido inicialmente. Entretanto, a solução tornou-se infactível para valores de $\varepsilon \leq 0.27$,

assim para obter mais valores factíveis de ε , seria necessário admitir $\|F\|_\infty > \|F_0\|_\infty$.

Segundo Experimento: Neste caso, a partir da solução inicial da Tabela 1, deseja-se diminuir o esforço de controle, isto é, $\|F\|_\infty < \|F_0\|_\infty$, mantendo-se o coeficiente de contratividade satisfazendo a condição inicial $\|H\|_\infty \leq \|H_0\|_\infty$. Então, aplicando-se o Algoritmo 1, com $\|F\|_\infty \leq \phi < \|F_0\|_\infty$ para diferentes valores de $\phi \in \{2.07, 1.95, 1.87, 1.75\}$, obteve-se os resultados resumidos na Tabela 3.

Tabela 3: Resultados para valores decrescentes de ϕ

ϕ	$\ H\ _\infty$	F		
2.07	0.5335	0.3344	0.7340	-0.2758
		0	-1.3649	0.7051
1.95	0.4854	0.3267	0.6845	-0.2465
		0	-1.3069	0.6431
1.87	0.4432	0.3225	0.6550	-0.2369
		0	-1.2716	0.5984
1.75	—	—		

Observa-se, neste caso, que ao diminuir os limites de esforço de controle, ocorre variação da $\|H\|_\infty$ e, portanto, do coeficiente de contratividade, sem ultrapassar o valor limite $\varepsilon = \|H_0\|_\infty = 0.6$.

Assim, para cada solução encontrada de F e H , é possível determinar diferentes FLP associadas aos sistemas em malha fechada correspondentes. Para tanto, determina-se uma base para o espaço nulo à esquerda de $M(H, F)$ em (12) e, constrói-se de forma adequada matrizes L que satisfaçam $L \in \mathbb{R}^{r \times n}$, com $\text{posto}(L) = n$. Por exemplo, para o caso $\varepsilon = 0.57$ da Tabela 2, obtém-se

$$H = \begin{bmatrix} 0.4775 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2852 & -0.2848 \\ 0 & 0.2848 & 0.2852 \end{bmatrix},$$

e as duas FLP a seguir que satisfazem a equação (6):

$$v_1(x_k) = \|L_1 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -1.6397 & -1.1052 & -2.2561 \\ 1.9763 & -1.1985 & -0.8492 \\ 1.5252 & 3.2231 & -2.6874 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty e$$

$$v_2(x_k) = \|L_2 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -1.6397 & -1.1052 & -2.2561 \\ -0.6601 & 0.8789 & 0.0492 \\ -0.8733 & -1.2253 & 1.2350 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty.$$

Na Figura 1 pode-se observar e comparar os desempenhos temporais obtidos para a solução inicial (H_0, F_0) , descrita na Tabela 1, conforme Figura 1(a) e 1(b), e soluções obtidas via o Algoritmo 1.

Observa-se, inicialmente, que a solução correspondente para $\varepsilon = 0.37$ na Tabela 2, conforme Figura 1(c) e 1(d), implica, como esperado, em uma convergência mais rápida dos estados para a origem do que a da solução inicial, com esforço de controle compatível. A redução no esforço inicial de controle e convergência mais rápida para a origem nos estados do que a solução inicial, também pode ser observada nas Figuras 1(e) e 1(f), correspondentes à solução $\phi = 1.87$ da Tabela 3.

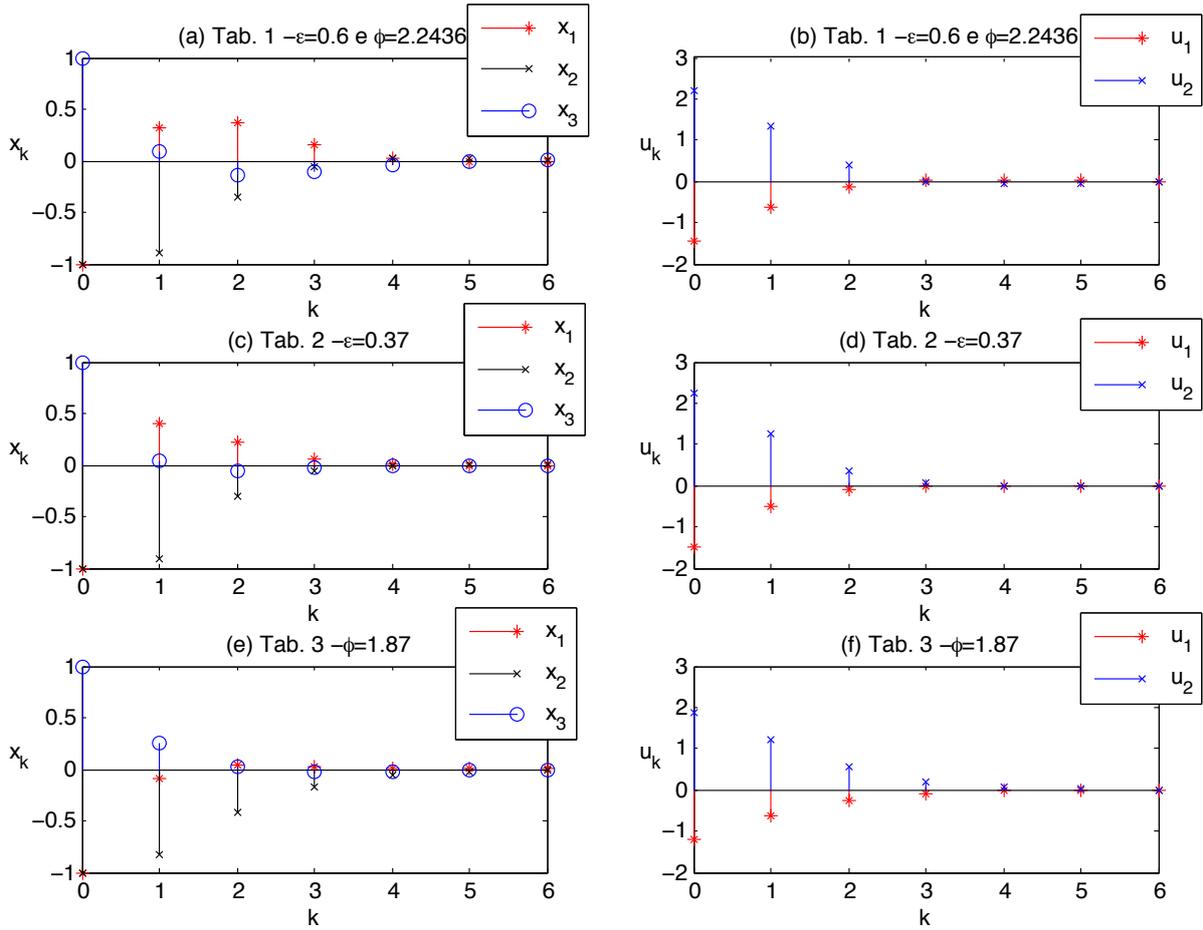


Figura 1: Trajetórias dos estados e variáveis de controle para $x_0 = [-1 -1 1]^T$

4.2 Resultados em SOF

Como neste exemplo $m + p = 4 > n$, aplicou-se o Algoritmo de Syrmos and Lewis (1993), via posicionamento de polos, para obter a solução inicial e formar a Tabela 4.

Tabela 4: Resultados para alocação de polos

K_0		H_0		
0.2350	-0.4386	0.5	0	0
-0.1067	1.2391	0	0.3	-0.3
		0	0.3	0.3

O sistema em malha fechada é tal que $\sigma(H_0) = \{0.5000, 0.3000 \pm 0.3000i\} = \sigma(A + BK_0C)$ e, além disso $\|K_0\|_\infty = 1.3458$ e $\|H_0\|_\infty = 0.6000$.

Como no Experimento 1, relatado anteriormente, impõe-se $f_1(H, F) = \|H\|_\infty < \|H_0\|_\infty$, atribuindo-se diferentes valores para o coeficiente de contratividade ε e busca-se manter $\|K\|_\infty \leq \|K_0\|_\infty$, porém aplicando agora o Algoritmo 2. Os resultados obtidos estão sumarizados na Tabela 5.

Observa-se que o menor coeficiente de contratividade obtido é superior ao menor valor factível para StF, como esperado. Utilizando a matriz de ganho K para $\varepsilon = 0.53$, buscou-se em (12) as seguintes funções de Lyapunov poliedrais:

Tabela 5: Resultados para valores decrescentes de ε

ε	$\ K\ _\infty$	K	
0.59	1.3458	0.2392	-0.4373
		-0.1111	1.2347
0.56	1.3458	0.2433	-0.4358
		-0.1157	1.2301
0.53	1.3458	0.2474	-0.4343
		-0.1202	1.2255
0.5	—	—	

$$v_1(x_k) = \|L_1 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.0848 & -0.9757 & -0.2019 \\ 0.0658 & -3.1614 & -1.5312 \\ -0.5290 & 0.5068 & 0.3466 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty$$

$$v_2(x_k) = \|L_2 x_k\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 0.0848 & 0.9757 & 0.2019 \\ -0.8596 & 1.0619 & 0.6777 \\ -0.0657 & 5.0678 & 2.4468 \end{bmatrix} x_k \right\|_\infty$$

5 Conclusão

A computação explícita de ganhos de realimentação de estados e de realimentação estática de saída foi considerada no presente trabalho. Para tanto, foi proposto um problema de otimização com restrição de posto que permite determinar funções de Lyapunov poliedrais associadas à condição de estabilidade do sistema.

Primeiramente, foi mostrado como a equação matricial não linear, necessária para provar a estabilidade do sistema em malha fechada, pode ser substituída por uma condição sobre o posto de uma matriz estruturada que é linear em relação à matriz de ganhos de realimentação desejada e à matriz auxiliar que garante a estabilidade. Dessa forma, baseados nos trabalhos de (Dattorro, 2011) e (Delgado et al., 2014) sobre restrição de posto, foram propostos dois problemas de otimização para a computação de forma explícita dos ganhos de realimentação de estados e de estática de saída.

Os algoritmos propostos são iterativos e necessitam de soluções iniciais factíveis as quais podem ser obtidas por posicionamento de polos, por exemplo. Além disso, na presente proposta os requisitos de controle são considerados como restrições dos problemas de otimização cuja função objetivo utilizada trata apenas a restrição de posto. Essas duas características podem ser consideradas como limitações à abordagem apresentada e podem, eventualmente, ser atacadas de forma mais eficiente (Delgado et al., 2014; Sun and Dai, 2017). Uma outra possibilidade, atualmente sendo explorada pelos autores, é tratar a não linearidade presente na condição de estabilidade via técnicas eficientes de otimização bilinear.

Agradecimentos

Este trabalho foi apoiado pela Agência de Financiamento Brasileira CNPq. Os autores são gratos pelas sugestões dos revisores.

Referências

Blanchini, F. and Miani, S. (2008). *Set-theoretic methods in control*, Springer, Berlin, Heidelberg.

Blanchini, F., Miani, S. and Sarvognan, C. (2007). Stability results for linear parameter varying and switching system, *Automatica* **43**: 1817–1823.

Castelan, E. B., Corso, J., Moreno, U. F. and De Pieri, E. R. (2007). Stability and stabilization of a class of uncertain nonlinear discrete-time systems with saturating actuators, *IFAC Proceedings Volumes* **40**(20): 518–523.

Castelan, E. B. and Hennet, J.-C. (1992). Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems, *Automatica* **28**(3): 605 – 611.

Castelan, E. B., Hennet, J.-C. and Villarreal, E. L. (2003). Quadratic characterization and use of output stabilizable subspaces, *IEEE transactions on automatic control* **48**(4): 654–660.

Dattorro, J. (2011). *Convex Optimization & Euclidean Distance Geometry*, Meboo Publishing USA.

Delgado, R. A., Agüero, J. C. and Goodwin, G. C. (2014). A rank-constrained optimization approach: Application to factor analysis, *IFAC Proceedings Volumes* **47**(3): 10373–10378.

Fazel, M. (2002). *Matrix rank minimization with applications*, PhD thesis, Stanford University.

Grant, M., Boyd, S. and Ye, Y. (2008). *Cvx: Matlab software for disciplined convex programming*.

Hennet, J.-C. (1989). Une extension du Lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes, *C. R. Acad. Sciences* **308**: 415–419.

Hennet, J.-C. (1995). Discrete time constrained linear systems, *Control and Dynamic Systems* **71**: 157–214.

Horn, R. A. and Johnson, C. R. (1994). *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press.

Hu, T. and Blanchini, F. (2010). Non-conservative matrix inequality conditions for stability/stabilizability of linear differential inclusions, *Automatica* **46**(1): 190–196.

Kiendl, H., Adamy, J. . and Stelzner, P. (1992). Vector norms as lyapunov functions for linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(6): 839–842.

Kolodziej, S., Castro, P. M. and Grossmann, I. E. (2013). Global optimization of bilinear programs with a multiparametric disaggregation technique, *Journal of Global Optimization* **57**(4): 1039–1063.

Molchanov, A. and Pyatnitskiy, Y. (1989). Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory, *Systems and Control Letters* **13**: 59–64.

Moler, C. et al. (1982). *MATLAB users' guide*, University of New Mexico.

Recht, B., Fazel, M. and Parrilo, P. (2010). Guaranteed minimum-rank solutions of linear matrix equations via nuclear norm minimization, *Siam Review* **52**(3): 471–501.

Santos, M. M., Castelan, E. B. and Hennet, J.-C. (1997). A linear programming approach for regional pole placement under pointwise constraints, *IFAC Proceedings Volumes* **30**(16): 297–302.

Sun, C. and Dai, R. (2017). Rank-constrained optimization and its applications, *Automatica* **82**: 128–136.

Syrmos, V. L. and Lewis, F. L. (1993). Output feedback eigenstructure assignment using two Sylvester equations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(3): 495–499.

Vassilaki, M., Hennes, J. and Bitsoris, G. (1988). Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints, *International Journal of control* **47**(6): 1727–1735.