

# IDENTIFICAÇÃO RECURSIVA DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS VARIANTES NO TEMPO ATRAVÉS DO FILTRO DE KALMAN ESTENDIDO E DA FILTRAGEM DE VARIÁVEIS DE ESTADO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVOS

FLÁVIO LUIZ ROSSINI\*, MATEUS GIESBRECHT†

\* *Via Rosalina Maria dos Santos, 1233  
Campo Mourão, PR, Brasil  
CEP 87301-899*

† *Av. Albert Einstein, 400 - Sala 207  
Cidade Universitária Zeferino Vaz - Barão Geraldo  
Campinas, SP, Brasil  
CEP 13083-852*

Emails: [flrossini@utfpr.edu.br](mailto:flrossini@utfpr.edu.br), [mateus@fee.unicamp.br](mailto:mateus@fee.unicamp.br)

**Abstract**— In this paper we discuss the state-variable filter (SVF) and the identification of continuous dynamic time-varying systems through the Extended Kalman Filter (EKF) coupled to the recursive least squares state-variable filter (RLSSVF) Method. In the article we describe the fundamentals of the sampling and the arrangement for the filtering of the input and output signals of the system, which are recursively made available to the EKF algorithm, which evaluates the states. Then, the data are used to execute the RLSSVF estimation algorithm of a Time-Varying Multivariable Linear Continuous System. The numerical results are compared with the data of the proposed benchmark and the quality of the estimation is evaluated through Markov Parameters. Finally, through the simulation results, the accuracy of the estimates was verified. The main contribution of this article is the use of the described techniques to obtain models in state space, allowing the recursive identification of parameters of multivariate continuous systems.

**Keywords**— state-variable filter (SVF), Extended Kalman Filter (EKF), recursive least squares state-variable filter (RLSSVF) Method, Hybrid Algorithm.

**Resumo**— Neste artigo se aborda a Filtragem de Variável de Estado (SVF) e a identificação de sistemas dinâmicos contínuos variantes no tempo através do Filtro de Kalman Estendido (EKF) acoplado ao Método de Filtragem de Variáveis de Estado pelos Mínimos Quadrados Recursivos (RLSSVF). No artigo são descritos a fundamentação sobre a amostragem e o arranjo para a filtragem dos sinais de entrada e saída do sistema, os quais são disponibilizados recursivamente ao algoritmo EKF, o qual realiza a estimação dos estados. Em seguida, usam-se os dados para executar o algoritmo RLSSVF para estimação de um Sistema Contínuo Linear Multivariável Variante no Tempo. Os resultados numéricos são comparados com os dados do *Benchmark* proposto e se avalia a qualidade da estimação por meio dos Parâmetros de Markov. Por fim, através dos resultados das simulações, foi constatada a exatidão das estimações. A principal contribuição desse artigo é o uso das técnicas descritas para obtenção de modelos em espaço de estados, permitindo a identificação recursiva de parâmetros de sistemas contínuos multivariáveis.

**Palavras-chave**— Filtro de Variáveis de Estado, Filtro de Kalman Estendido, Método de Filtragem de Variável de Estado pelos Mínimos Quadrados Recursivo, Algoritmo Híbrido.

## 1 Introdução

Ao exigir rigor na descrição do modelo matemático de um sistema dinâmico real, é inerente o surgimento de incertezas quanto a sua estrutura e quanto aos valores dos parâmetros envolvidos (Slotine et al., 1991). Assim, a modelagem analítica de sistemas dinâmicos, também conhecida como caixa branca, torna-se onerosa, pois é necessário conhecer completamente o sistema, as leis físicas que o descrevem, bem como as propriedades físicas de todos os materiais envolvidos (Geromel et al., 2004).

Para contornar tais dificuldades, métodos de identificação de sistemas são propostos na literatura (Aguirre, 2015), (Ljung, 1999) e (Katayama, 2006). Uma das principais vantagens dessas técnicas é que demandam pouco ou nenhum conhecimento prévio sobre o sistema. Os sistemas fi-

sicos e os ambientes externos nos quais operam, podem mudar de forma imprevisível, além de estarem sujeitos a perturbações significativas (Aguirre et al., 2007) e (Dorf and Bishop, 2013).

No contexto de identificação de sistemas, há duas frentes de pesquisas, sendo uma delas no domínio do tempo e a outra no domínio da frequência. Na identificação no domínio da frequência, o sistema deve satisfazer a propriedade da superposição e sua resposta em regime estacionário deve ser assintoticamente estável, quando a excitação for um sinal senoidal de frequência  $\omega$ . Esse método faz parte da classe de métodos de identificação não paramétrica (Aguirre, 2015). A identificação no domínio do tempo, consiste em encontrar um conjunto de coeficientes ou parâmetros de uma estrutura de modelo dinâmico escolhida, que tenha como entradas e saídas os valores dos sinais medidos no domínio do tempo. O presente

artigo tem interesse na identificação no domínio do tempo, sendo a estrutura do modelo conhecida *a priori* na forma de espaço de estado, pois essa é uma forma elegante, compacta e adequada para tratamento de sistemas de ordem qualquer, com número arbitrário de entradas e de saídas (Dorf and Bishop, 2013).

Como exemplo, na referência (Rayyam et al., 2015) foi abordada a variação brusca de parâmetro da máquina de indução, devido à quebra de barra do estator. E no artigo (Roshandel et al., 2011), uma nova abordagem de controle para sistema de teleoperação mestre escravo, onde há incerteza e possível mudança na impedância do ambiente na estação de trabalho, foi apresentada.

Na identificação de sistemas no domínio do tempo, uma vez conhecida ou proposta uma estrutura de modelo, pode-se distinguir dentre abordagem *off-line* e abordagem *on-line* para estimação de parâmetros. A abordagem *off-line*, pode ser executada por bloco, lote ou batelada, ou seja, todo o conjunto de dados deve estar disponível para executar o algoritmo de estimação. A estimação *off-line* também pode ser aplicada de forma recursiva, conforme a conveniência e adequação do algoritmo. Assim, os algoritmos recursivos, como por exemplo o método da variável instrumental refinada ótima (Padilla et al., 2016), podem ser executados *off-line* para fornecer estimativas em bloco e estimativas recursivas refinadas, para o conjunto de parâmetros os quais podem ser usados para fins de diagnóstico do sistema (Young, 2011), como por exemplo a detecção de falhas em motores de indução (Rayyam et al., 2015). A identificação recursiva é uma ferramenta computacional particularmente adequada para aplicações *on-line*, ou seja, aplica-se a sistemas dinâmicos, os quais possuem parâmetros variantes no tempo. Neste trabalho se tem especial interesse na abordagem de identificação recursiva de parâmetros do sistema (Aguirre, 2015) e (Padilla et al., 2016).

Um amplo número de pesquisas é apresentado referente aos métodos de identificação recursiva no domínio do tempo, para sistemas discretos no tempo. Uma abordagem difundida e frequentemente utilizada para estimar parâmetros de sistemas variantes no tempo é o algoritmo dos Mínimos Quadrados Recursivo com Fator de Esquecimento (MQRFE) ou também denominado de Mínimos Quadrados Recursivo Ponderado. O algoritmo mencionado consiste em encontrar os parâmetros que minimizam o erro de predição, a partir da atenuação exponencial de dados passados (Young, 2011). Essas técnicas podem ser aplicadas a sistemas contínuos cujos sinais tenham sido discretizados, e as saídas dos modelos representam com exatidão as saídas amostradas do sistema real. Entretanto os parâmetros do modelo discreto podem não permitir a identificação de parâmetros físicos de sistemas contínuos.

Em (Padilla et al., 2016) foi abordada a estimação recursiva de modelos lineares de tempo contínuo SISO (do inglês, *Single-Input and Single-Output*) que variam lentamente (do inglês, *System Continuous-Time, Slowly Time-Varying - LCTSTV*). Comumente as abordagens de filtragem e estimação são propostas e aplicadas na forma escalar à sistemas SISO. No presente artigo é proposto um arranjo para realizar a filtragem e estimação na forma de espaço de estados, o que permite a aplicação do método a sistemas SIMO (*Single-Input and Multiple-Output*), MISO (*Multiple-Input and Single-Output*) e MIMO (*Multiple-Input and Multiple-Output*).

Ao tratar da identificação de sistemas de tempo contínuo, a primeira dificuldade encontrada é a necessidade de conhecer *a priori* as derivadas temporais dos sinais de entrada e saída da planta. Vários métodos foram concebidos para contornar tal dificuldade e reconstruir as derivadas temporais. Em (Garnier et al., 2003) foram realizadas comparações entre os métodos de identificação *off-line* a partir de experimentos para estudar a sensibilidade de cada abordagem aos parâmetros de projeto, período de amostragem, relação sinal-ruído, densidade espectral de potência de ruído e tipo de sinal de entrada. O artigo (Young and Garnier, 2006) fornece uma introdução aos principais aspectos dos métodos de domínio do tempo existentes para identificar modelos lineares a tempo contínuo a partir de dados de tempo discreto e amostrados. Cada método é caracterizado por vantagens específicas, tais como: conveniência matemática, simplicidade na implementação numérica e computação, tratamento de condições iniciais, visão física, precisão etc (Young, 2011). Assim, uma abordagem conhecida como método de Filtro de Variável de Estado (*State-Variable Filter - SVF*) (Garnier et al., 2008), será apresentada e manipulada neste artigo na forma de espaço de estados.

Uma vez conhecidas as entradas e saídas de um sistema dinâmico, é possível estimar um conjunto de parâmetros, que decreve seu comportamento. Porém, para a forma no espaço de estados, devem ser conhecidas as entradas, as saídas e os estados do sistema, isso dificulta sua implementação, pois em geral os estados do sistema não são conhecidos ou disponíveis para medição. Assim, para contornar tal dificuldade, o algoritmo do Filtro de Kalman usa os sinais de entradas e saídas do sistema para estimar os estados. Portanto, o Filtro de Kalman viabiliza a implementação de algoritmos para estimação de modelos no espaço de estados.

Nesse contexto de identificação de sistemas, o Filtro de Kalman é um estimador recursivo ótimo capaz de estimar estados a partir de sinais ruidosos de entrada e saída do processo, sendo atrativo à aplicações práticas. Para sua construção, o al-

goritmo exige um modelo do sistema, condições iniciais de estados e o valor inicial da matriz de covariância dos estados. Tal algoritmo foi proposto por Kalman e publicado em 1960 (Kalman et al., 1960), sendo um método para encontrar um processo estocástico com média igual à média do vetor de estado.

Uma forma de aplicar o Filtro de Kalman para estimação de parâmetros de modelos não lineares, consiste em linearizar analiticamente o modelo ideal em torno do estado atual, assim esse procedimento passou a ser conhecido como Filtro de Kalman Estendido (do inglês, *Extended Kalman Filter* - EKF). Com esse método é possível estimar parâmetros do sistema linear ao reescrever suas equações de maneira que os parâmetros a serem estimados façam parte do vetor de estados. Com isso o modelo se torna não linear.

Neste artigo é proposto um algoritmo híbrido composto de três estágios, que executam a amostragem, a filtragem e a estimação de um modelo dinâmico contínuo variante no tempo na forma de espaço de estado. Foram acoplados os métodos SVF, EKF e RLSSVF. Assim, no primeiro estágio do algoritmo proposto, se realiza a amostragem juntamente com a filtragem dos sinais de entrada e saída do sistema pelo método SVF. No segundo estágio, se executa o EKF a partir dos sinais filtrados para estimação dos estados. E no terceiro estágio, a partir dos sinais de entrada e saída filtrados e dos estados estimados, se executa o método RLSSVF para estimação recursiva dos parâmetros do sistema na forma de espaço de estado. Dessa forma, a motivação para a construção do algoritmo híbrido foi a estimação recursiva de parâmetros do sistema na forma de espaço de estado, a partir apenas das entradas e saídas do processo, sendo essa a vantagem sobre os métodos existentes e forte apelo a aplicações reais.

O artigo se encontra organizado da seguinte maneira: na seção 2 são apresentados os fundamentos da amostragem, filtragem e identificação do sistema de tempo contínuo. Na seção 3 ilustram-se a metodologia e o estudo de caso, com as considerações numéricas utilizadas, juntamente com os resultados das simulações. Na seção 4 desenvolve-se um estudo de caso, na seção 5 apresentam-se os resultados numéricos das simulações e na seção 6 relata-se as elucidações constatadas no trabalho.

## 2 Filtragem e Identificação Direta de Modelo Contínuo no Tempo

Apresenta-se na subseção 2.1 a formulação e os arranjos para amostrar e filtrar os sinais de entrada e saída do sistema, na subseção 2.2 são relatados os fundamentos da filtragem de variáveis de estado, na subseção 2.3 mostra-se o método de filtragem e identificação de modelo linear de tempo

contínuo suavemente variante no tempo (*linear, continuous-time, slowly time-varying* - LCTSTV) e na subseção 2.4 menciona-se sobre o EKF.

### 2.1 Modelos de Equações Diferenciais

Um modelo de sistema linear e invariante de tempo contínuo SISO pode assumir a forma de equação diferencial de coeficientes constantes, expressa por (Garnier et al., 2008):

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y(t) = b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t) + v(t) \quad (1)$$

sendo  $\frac{d^* (\cdot)}{dt^*}$  o operador diferencial de ordem  $*$ ,  $u(t)$  o sinal de entrada,  $y(t)$  o sinal de saída,  $v(t)$  um ruído aditivo branco e os parâmetros  $a_i$  e  $b_j$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 0, \dots, m$ , parâmetros constantes do modelo.

A equação 1 pode ser reescrita na forma de operador diferencial no domínio do tempo como:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) + v(t) \quad (2)$$

sendo  $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$  e  $B(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$ , com  $n \geq m$  e  $p$  o operador diferencial.

Para qualquer instante de tempo  $t = t_k$ , a equação 1 pode ser reescrita na forma de regressão como:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = \varphi^T(t_k) \theta(t_k) + v(t_k) \quad (3)$$

em que  $\varphi(t_k)$  é o vetor regressor e  $\theta(t_k)$  é o vetor de parâmetros, definidos por:

$$\varphi^T(t_k) = \left[ -\frac{d^{n-1} y(t_k)}{dt^{n-1}} \dots - y(t_k) \quad \frac{d^m u(t_k)}{dt^m} \dots u(t_k) \right] \quad (4)$$

e

$$\theta^T(t_k) = [a_1 \quad \dots \quad a_n \quad b_0 \quad \dots \quad b_m]. \quad (5)$$

No entanto, ao contrário do modelo discreto de equação a diferenças, onde apenas os dados de entrada e saída amostrados aparecem, o modelo de equação diferencial 3 contém derivadas temporais de entrada e saída que não estão disponíveis como dados de medição na maioria dos casos práticos. Com isso aumenta a complexidade para a identificação direta dos parâmetros do modelo.

### 2.2 Método de Filtragem de Variável de Estado

Considere inicialmente o modelo da equação diferencial 2 sem ruído aditivo branco, da forma:

$$A(p)x(t) = B(p)u(t) \quad (6)$$

em que  $x(t)$  representa a variáveis de saída livre de ruído.

Agora se aplica o filtro SVF, em ambos os lados da equação 6, da forma operacional  $F(p)$ ,

sendo desconsideradas as condições iniciais do transiente:

$$A(p)F(p)x(t) = B(p)F(p)u(t) \quad (7)$$

sendo o referido filtro SVF tipicamente escolhido na forma operacional:

$$F(p) = \frac{1}{(p + \lambda)^n} \quad (8)$$

sendo  $\lambda$  o parâmetro usado para definir a largura de banda do filtro e  $n$  é a ordem do sistema à identificar.

De maneira expandida a equação 7, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & (p^n + a_1p^{n-1} + \dots + a_n) F(p)x(t) \\ &= (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \dots + b_m) F(p)u(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Substituindo a equação 8 em 9 tem-se:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p^n}{(p + \lambda)^n} + \dots + a_n \frac{1}{(p + \lambda)^n} \right) x(t) \\ &= \left( b_0 \frac{p^m}{(p + \lambda)^n} + \dots + b_m \frac{1}{(p + \lambda)^n} \right) u(t) \end{aligned} \quad (10)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} & (F_n(p) + a_1F_{n-1}(p) + \dots + a_nF_0(p)) x(t) \\ &= (b_0F_m(p) + \dots + b_mF_0(p)) u(t) \end{aligned} \quad (11)$$

em que  $F_i(p)$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  seja um conjunto de filtros definidos como:

$$F_i(p) = \frac{p^i}{(p + \lambda)^n}. \quad (12)$$

A equação 11 pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} & x_f^{(n)}(t) + a_1x_f^{(n-1)}(t) + \dots + a_nx_f^{(0)}(t) \\ &= b_0u_f^{(m)}(t) + \dots + b_mu_f^{(0)}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

com

$$x_f^{(i)}(t) = f_i(t) \triangle x(t) \quad (14)$$

e

$$u_f^{(i)}(t) = f_i(t) \triangle u(t) \quad (15)$$

sendo que  $f_i(t)$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ , representa a resposta ao impulso do filtro definido em 12 e  $\triangle$  indica a operação de convolução.

As saídas dos filtros  $x_f^{(i)}(t)$  e  $u_f^{(i)}(t)$  fornecem as derivadas temporais pré-filtradas das entradas e saídas na largura de banda de interesse, que podem ser exploradas para estimativas de parâmetros do modelo.

### 2.3 Método Recursivo de Filtragem e Identificação

Foi proposto em (Padilla et al., 2016) um modelo alternativo ao apresentado na equação 2, para tratar do caso variante no tempo sujeito a ruído. Ele é expresso como:

$$A_0(p, t)x(t) = B_0(p, t)u(t) \quad (16a)$$

$$y(t_k) = x(t_k) + e(t_k) \quad (16b)$$

em que  $p$  é o operador diferencial,  $t$  é o tempo contínuo,  $x(t)$  é o sinal de saída sem ruído,  $u(t)$  é o sinal de entrada,  $t_k$  é o tempo em que são amostrados os sinais nos  $k$ -ésimos instantes e  $e(t_k)$  é um ruído branco de média nula.

No contexto de identificação, o sistema 16 pertence a um conjunto de modelos definido por:

$$A(p, t, \theta)x(t) = B(p, t, \theta)u(t) \quad (17a)$$

$$y(t_k) = x(t_k) + e(t_k) \quad (17b)$$

sendo  $A(p, t, \theta)$  e  $B(p, t, \theta)$  polinômios em  $p$  e com parâmetros  $a_i$  e  $b_j$ , sendo  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 0, \dots, m$ , variantes no tempo, dados por:

$$A(p, t, \theta) = p^n + a_1(t)p^{n-1} + \dots + a_n(t) \quad (18a)$$

$$B(p, t, \theta) = b_0p^m + b_1(t)p^{m-1} + \dots + b_m(t) \quad (18b)$$

sendo  $n \geq m$  e os parâmetros variantes no tempo podem ser agrupados no vetor de parâmetros da forma:

$$\theta(t) = [a_1(t) \dots a_n(t) \quad b_0(t) \dots b_m(t)]. \quad (19)$$

Para o sistema 17, as seguintes hipóteses devem ser satisfeitas:

(i) os graus  $n$  e  $m$  dos polinômios  $A_0(p, t)$  e  $B_0(p, t)$ , respectivamente, são *a priori* conhecidos; e

(ii) o sistema variante no tempo a ser identificado varia lentamente.

O problema de identificação é para estimar recursivamente o vetor de parâmetros 19 referente ao sistema 17 a partir das hipóteses listadas acima.

A estimação direta de modelos de tempo contínuo requer as derivadas temporais que frequentemente não estão disponíveis. Uma abordagem para resolver esse problema é usar o filtro SVF apresentado na equação 8. Quando os parâmetros de 17 são constantes, um modelo instantâneo no  $k$ -ésimo instante de amostragem por ser escrito como:

$$y(t_k) = G(p, \theta)u(t_k) + e(t_k) \quad (20)$$

em que  $G(p, \theta)$  é o modelo instantâneo.

Ao aplicar o filtro descrito pela equação 8, de maneira análoga ao que foi realizado para a obtenção da equação 11, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & y_f^{(n)}(t_k) + a_1(t_k)y_f^{(n-1)}(t_k) \\ & \dots + a_n(t_k)y_f(t_k) = b_0(t_k)u_f^{(m)}(t_k) \\ & \dots + b_m(t_k)u_f(t_k) + v_f(t_k) \end{aligned} \quad (21)$$

em que

$$v_f(t_k) = F(p)v(t_k) = F(p)A(p)e(t_k). \quad (22)$$

A equação 21 pode ser reescrita como uma regressão linear semelhante à equação 3, da forma:

$$y_f^{(n)}(t_k) = \varphi_f^T(t_k)\theta(t_k) + v_f(t_k) \quad (23)$$

com vetor regressor filtrado dado por:

$$\varphi_f^T(t_k) = [-y_f^{(n-1)}(t_k)\dots - y_f(t_k)\dots \\ \dots u_f^{(m)}(t_k)\dots u_f(t_k)] \quad (24)$$

e  $\theta_f(t_k)$  são as estimativas obtidas de forma recursiva com um algoritmo baseado no método dos mínimos quadrados a seguir (Padilla et al., 2016):

*Etapa de predição:*

$$\hat{\theta}(t_k|t_{k-1}) = \hat{\theta}(t_{k-1}) \quad (25a)$$

$$P(t_k|t_{k-1}) = P(t_{k-1}). \quad (25b)$$

*Etapa de correção:*

$$\hat{\theta}(t_k) = \hat{\theta}(t_k|t_{k-1}) + L(t_k)\varepsilon(t_k) \quad (26a)$$

$$\varepsilon(t_k) = x_f^{(n)}(t_k) - \varphi_f^T(t_k)\hat{\theta}(t_k|t_{k-1}) \quad (26b)$$

$$L(t_k) = \frac{P(t_k|t_{k-1})\varphi_f(t_k)}{1 + \varphi_f^T(t_k)P(t_k|t_{k-1})\varphi_f(t_k)} \quad (26c)$$

$$P(t_k) = P(t_k|t_{k-1}) - L(t_k)\varphi_f^T(t_k)P(t_k|t_{k-1}). \quad (26d)$$

O algoritmo 25-26 é chamado de Método RLS-SVF de busca aleatória.

#### 2.4 Filtro de Kalman Estendido

O EKF é um algoritmo popular para estimação de parâmetros físicos simultaneamente com as variáveis de estado, a partir das medições de entrada e saída do sistema e tem sido utilizado para solução de problemas de aplicações reais (Kowalski and Wierzbicki, 2007), (Meziane et al., 2008) e (Rayyam et al., 2015). Para aplicar o EKF, é necessário um modelo analítico do sistema a identificar, o qual é linearizado em torno do estado atual. Na sequência, é realizada a predição de parâmetros e estados futuros, assim como a execução da etapa de correção com os cálculos de ganho, atualização dos estados e da matriz de covariância do erro.

Para descrição do algoritmo EKF, considere agora um sistema não linear da forma (Aguirre, 2015):

$$x(t_{k+1}) = f(x(t_k), u(t_k), w(t_k)) \quad (27a)$$

$$y(t_k) = h(x(t_k)) + v(t_k) \quad (27b)$$

sendo  $f(x(t_k), u(t_k), w(t_k))$  e  $h(x(t_k))$  funções não lineares supostamente conhecidas, sabendo-se que  $x(t_k)$  é o vetor de estado,  $u(t_k)$  é o sinal de

entrada,  $w(t_k)$  é o ruído do sistema,  $h(x(t_k))$  é o sinal de saída livre de ruído e  $v(t_k)$  é o ruído de medição.

Lineariza-se o modelo não linear em torno da estimativa mais recente, a partir das derivadas parciais da equação 27, da forma:

$$F(t_k) = \left. \frac{\partial f(x(t_k), u(t_k), w(t_k))}{\partial x^T(t_k)} \right|_{x(t_k)=\hat{x}(t_k|t_k)} \quad (28a)$$

$$H(t_k) = \left. \frac{\partial h(x(t_k))}{\partial x^T(t_k)} \right|_{x(t_k)=\hat{x}(t_{k+1}|t_k)} \quad (28b)$$

em que  $k+1|k$  representa a predição no tempo  $k+1$  com base nos dados no tempo  $k$ .

A implementação do algoritmo EKF é realizada em duas etapas: a etapa de predição e a etapa de correção. Tais etapas são resumidas a seguir:

(i) Etapa de predição:

$$\hat{x}(t_{k+1}|t_k) = f(x(t_k), u(t_k), w(t_k)) \quad (29a)$$

$$F(t_k) = \left. \frac{\partial f(x(t_k), u(t_k), w(t_k))}{\partial x^T(t_k)} \right|_{x(t_k)=\hat{x}(t_k|t_k)} \quad (29b)$$

$$\hat{P}(t_{k+1}|t_k) = F(t_k)\hat{P}(t_k|t_k)F^T(t_k) + Q \quad (29c)$$

$$H(t_k) = \left. \frac{\partial h(x(t_k))}{\partial x^T(t_k)} \right|_{x(t_k)=\hat{x}(t_{k+1}|t_k)} \quad (29d)$$

(ii) Etapa de correção:

$$S(t_{k+1}) = H(t_k)\hat{P}(t_{k+1}|t_k)H^T(t_k) + R \quad (30a)$$

$$G(t_{k+1}) = \hat{P}(t_{k+1}|t_k)H^T(t_k) + R \quad (30b)$$

$$\hat{x}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{x}(t_{k+1}|t_k) + G(t_{k+1}) \\ (y(t_{k+1}) - H(t_k)\hat{x}(t_{k+1}|t_k)) \quad (30c)$$

$$\hat{P}(t_{k+1}|t_{k+1}) = (I - G(t_{k+1})H(t_k))\hat{P}(t_{k+1}|t_k) \quad (30d)$$

sendo  $G(t_k)$  é a matriz de ganho de Kalman. Para executar o algoritmo, são exigidas as condições iniciais  $x(t_0)$  e  $P(t_0|t_0)$ .

Nota-se que no EKF as funções não lineares  $f(x(t_k), u(t_k), w(t_k))$  e  $h(x(t_k))$  apresentadas na equação 27 são utilizadas, para propagação do vetor de estado e para determinar a saída esperada.

### 3 Metodologia

Nesta seção se disserta sobre o algoritmo híbrido proposto no artigo. Ilustra-se um diagrama de blocos para melhor esclarecimento quanto ao fluxo de informações e quanto aos blocos de processamento.

Considere um sistema contínuo linear multi-variável variante no tempo, dado por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (31a)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (31b)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é o sinal de entrada,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  é o sinal de saída,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz de transferência do sistema,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de entrada,  $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$  é a matriz de saída e  $t$  é o tempo contínuo.

Na figura 1, o sistema a ser identificado se encontra no interior do retângulo tracejado e no externo o algoritmo híbrido proposto.

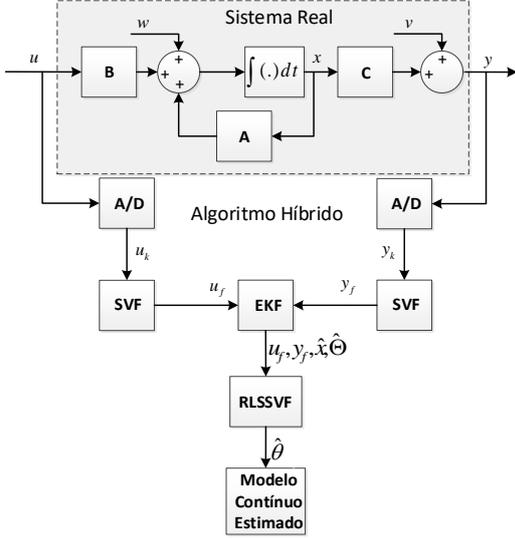


Figura 1: Diagrama de Blocos do sistema real e algoritmo híbrido.

No algoritmo, ilustrado na figura 1, são medidos apenas os sinais de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$  do sistema real, os quais são amostrados,  $u(t_k)$  e  $y(t_k)$ , nos respectivos blocos nominados por  $A/D$ . Em seguida os sinais  $u(t_k)$  e  $y(t_k)$  são filtrados nos blocos  $SVF$  a partir das equações 14 e 15, sendo disponibilizados  $u_f$  e  $y_f$  ao bloco  $EKF$ . No bloco  $EKF$  são realizadas as estimações de estados  $\hat{x}$  do sistema e de certo vetor de parâmetros  $\hat{\Theta}$ , selecionado pelo projetista, segundo as equações 29-30. Por fim, com os sinais de entrada e saída filtrados  $u_f$  e  $y_f$ , respectivamente, juntamente com o vetor de estados estimado  $\hat{x}$ , executa-se o bloco  $RLSSVF$  para estimação direta de todos os parâmetros do modelo em espaço de estado do sistema contínuo linear multivariável variante no tempo 31, conforme as equações 25-26.

Na próxima seção é apresentado um exemplo de aplicação do algoritmo e na sequência os resultados e a conclusão do artigo.

#### 4 Estudo de Caso

Para demonstração do algoritmo proposto foi utilizado um *benchmark* contínuo linear multivariável variante no tempo com representação de esta-

dos (Ohsumi and Kawano, 2002), expresso por:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + Bu(t) + w(t) \quad (32a)$$

$$y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (32b)$$

em que  $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $w(t) = [w_1(t) \ w_2(t)]^T$ ,  $C = [1 \ 0]$  e  $u(t)$ ,  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  e  $v(t)$  são ruídos gaussianos. Foram realizadas variações bruscas no parâmetros  $a_{11}(t)$  e  $a_{12}(t)$ , para análise da robustez do sistema de identificação híbrido, da seguinte forma:

$$a_{11}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 1400 \\ 0,2 & \text{se } t \geq 1400 \end{cases} \quad (33)$$

e

$$a_{12}(t) = \begin{cases} -0.5 & \text{se } 0 \leq t < 800 \\ -0.7 & \text{se } t \geq 800 \end{cases} \quad (34)$$

sendo a duração da simulação 2000 segundos. A resposta do *benchmark* foi simulada utilizando  $u(t)$ ,  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  e  $v(t)$  ruídos gaussianos de médias nulas e variâncias de 0.1, 0.05, 0.05 e 0.05, respectivamente, e decorrelacionados. Assim, a partir da excitação persistente do sistema contínuo, realizou-se a amostragem dos sinais de entrada e de saída para execução da filtragem e estimação dos parâmetros.

Discretizou-se o sistema 32, dada por (Rayyam et al., 2015):

$$A_k = e^{A\tau} \approx I + A\tau \quad (35a)$$

$$B_k = B\tau \quad (35b)$$

$$C_k = C; \quad (35c)$$

onde  $\tau$  é a taxa de amostragem dos sinais de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$ . A equação 32 na forma 35, realiza a propagação dos estados do sistema real nos instantes de tempo amostrados em  $t_k = t$ , cuja constituição do sistema discreto fica da forma:

$$x(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} 1 + a_{11}(t_k)\tau & a_{12}(t_k)\tau \\ a_{21}\tau & 1 - a_{22}\tau \end{bmatrix} x(t_k) + \begin{bmatrix} b_{11}\tau \\ b_{21}\tau \end{bmatrix} u(t_k) + w(t_k) \quad (36a)$$

$$y(t_k) = [c_{11} \ c_{12}] x(t_k) + v(t_k) \quad (36b)$$

sendo a frequência de corte  $\lambda = 0, 1$ .

A partir do sistema discretizado 36, selecionaram-se os parâmetros variantes de interesse  $a_{11}(t_k)$  e  $a_{12}(t_k)$ , para constituição do vetor de estados ampliado, expressado por:

$$X(t_k) = [x(t_k) \ a_{11}(t_k) \ a_{12}(t_k)]^T \quad (37)$$

sendo  $x(t_k) = [x_1(t_k) \ x_2(t_k)]^T$ . Em seguida, manipulou-se a equação 36 para obter a forma 27, dada por:

$$f(x(t_k), u(t_k), w(t_k)) = \begin{bmatrix} x(t_{k+1}) \\ a_{11}(t_k) \\ a_{12}(t_k) \end{bmatrix} \quad (38)$$

e

$$h(x(t_k)) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] X(t_k). \quad (39)$$

Executaram-se as derivadas parciais, conforme equação 28, referente as equações 38 e 39, sendo essas aplicadas ao EKF 29-30.

Ao executar o algoritmo híbrido, considerou-se o sistema contínuo real 32, cujas estimativas obtidas em cada recursão são apresentadas na forma numérica a seguir.

## 5 Resultados Simulados

Nas figuras 2 e 3 é apresentado o comportamento dos valores da matriz  $A$  do *benchmark* apresentado na equação 32, em função do tempo. Impõem-se variações bruscas nos parâmetros  $a_{11}$  e  $a_{12}$  conforme indicado em 33 e 34, respectivamente. Assim, é perceptível a rápida convergência para os valores próximos aos nominais, mesmo os parâmetros variantes no tempo com uma boa exatidão.

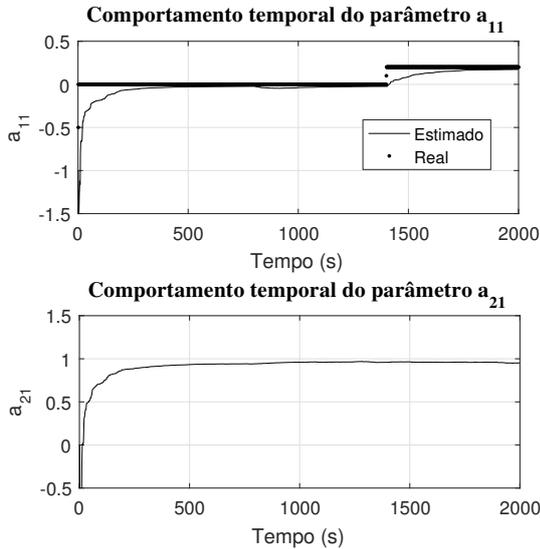


Figura 2: Identificação dos parâmetros  $a_{11}$  e  $a_{21}$  da matriz de transferência do sistema,  $A(t)$ , através do Algoritmo Híbrido proposto.

Na figura 4 são apresentados os resultados da estimação dos elementos da matriz  $B$ , os quais também convergem aos valores nominais do sistema.

Na figura 5 são ilustrados os resultados numéricos da estimação dos elementos da matriz  $C$ , sendo observado que os valores convergem em poucas recursões aos valores do sistema real.

Na figura 6, ilustra-se um recorte das saídas dos sistemas contínuo e estimado, na região da mudança do parâmetro  $a_{12}$ . Constataram-se diferenças sutis em cada um dos valores das saídas correspondentes, por exemplo, no instante de tempo 811s, os valores das saídas são 0,04162 e 0,03961

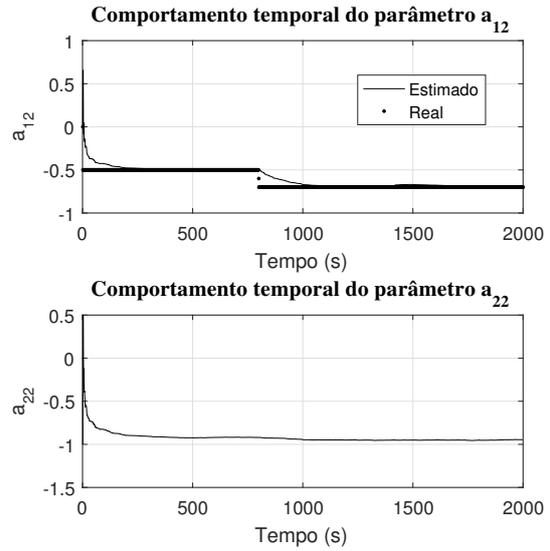


Figura 3: Identificação dos parâmetros  $a_{12}$  e  $a_{22}$  da matriz de transferência do sistema,  $A(t)$ , através do Algoritmo Híbrido proposto.

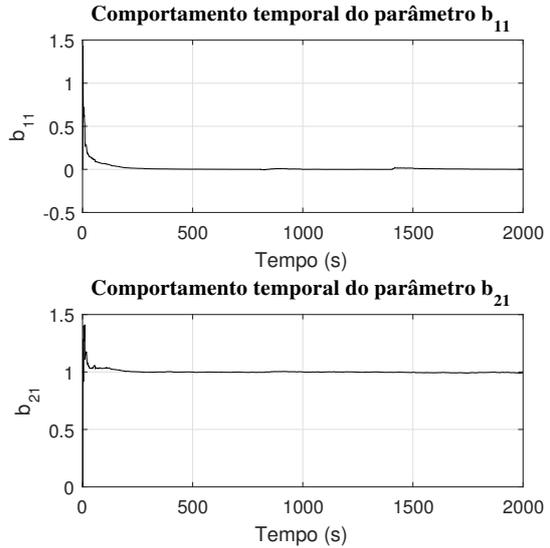


Figura 4: Identificação dos parâmetros  $b_{11}$  e  $b_{21}$  da matriz de entrada do sistema,  $B$ , através do Algoritmo Híbrido.

para o sistema contínuo e estimado, respectivamente.

## 6 Conclusão

No artigo foi apresentado um algoritmo híbrido composto por três estágios para amostrar, filtrar e estimar os estados e os parâmetros de um sistema dinâmico contínuo variante no tempo na forma de espaço de estados. A partir do método proposto neste artigo é possível a determinação recursiva de parâmetros físicos de sistemas contínuos MIMO através de medições amostradas de suas entradas

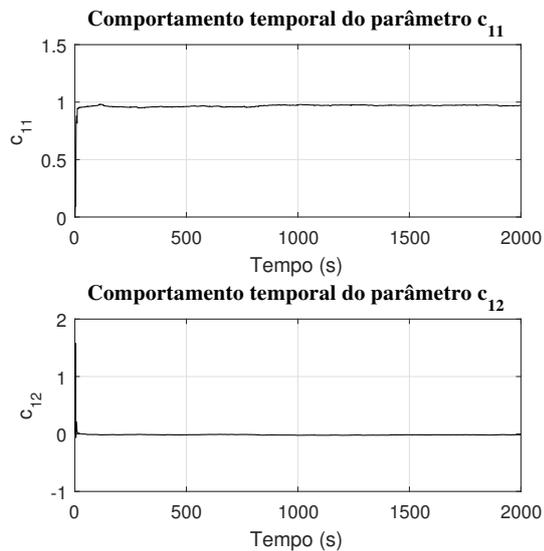


Figura 5: Identificação dos parâmetros  $c_{11}$  e  $c_{12}$  da matriz de saída do sistema,  $C$ , através do Algoritmo Híbrido.

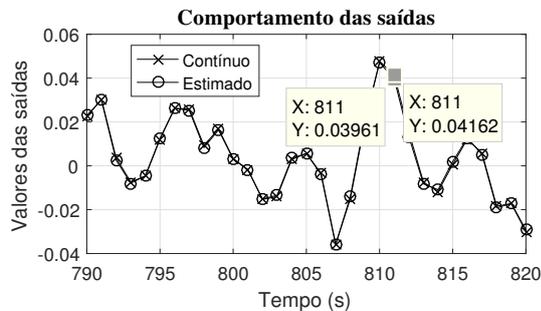


Figura 6: Saídas dos sistemas contínuo e estimado pelo EKF.

e saídas.

O algoritmo híbrido apresentado neste artigo, é capaz de realizar a amostragem, filtragem e identificação recursiva *off-line* ou *on-line*, conforme a necessidade do projetista. Tal algoritmo é aplicável na forma de espaço de estados, o qual vai ao encontro de formulações avançadas no contexto de engenharia.

A partir do exemplo proposto, observou-se uma boa exatidão na estimação dos parâmetros do *benchmark* estudado, a qual se encontra associada reversamente a frequência de corte do filtro. Como trabalhos futuros se espera: (i) identificar sistemas MIMO; (ii) aplicar o algoritmo à identificação de parâmetros de sistemas teleoperados; e (iii) desenvolver algoritmos de controle adaptativos indiretos.

### Agradecimentos

À Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e à Universidade Tecnológica Federal do

Paraná (UTFPR) *campus* de Campo Mourão, pelo crédito intelectual e financeiro.

### Referências

- Aguirre, L. A. (2015). *Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, Editora UFMG.
- Aguirre, L. A., Bruciapaglia, A. H., Miyagi, P. E. and Piqueira, J. R. C. (2007). *Enciclopédia de automática: controle e automação*, Blucher.
- Dorf, R. C. and Bishop, R. H. (2013). *Sistemas de Controle Modernos*, 12rd edn, LTC, RJ.
- Garnier, H., Mensler, M. and Richard, A. (2003). Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation, *International journal of Control* **76**(13): 1337–1357.
- Garnier, H., Wang, L. and Young, P. C. (2008). Direct identification of continuous-time models from sampled data: Issues, basic solutions and relevance, *Identification of continuous-time models from sampled data*, Springer, pp. 1–29.
- Geromel, J. C., Palhares, A. G., Geromel, J. C., Korogui, R. H., Pedrycz, W., Gomide, F., Arenales, M., Armentano, V. A., Morabito, R., Yanasse, H. H. et al. (2004). *Análise linear de sistemas dinâmicos: teorias, ensaios práticos e exercícios*, Edgard Blucher.
- Kalman, R. E. et al. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems, *Journal of basic Engineering* **82**(1): 35–45.
- Katayama, T. (2006). *Subspace methods for system identification*, Springer Science & Business Media.
- Kowalski, C. and Wierzbicki, R. (2007). Application of the extended kalman filter for rotor and stator fault detection of the induction motor, *Poznan University of Technology Academic Journals. Electrical Engineering* (55): 145–155.
- Ljung, L. (1999). *System identification: theory for the user*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- Meziane, S., Toufouti, R. and Benalla, H. (2008). Nonlinear control of induction machines using an extended kalman filter, *Acta Polytechnica Hungarica* **5**(4): 41–58.
- Ohsumi, A. and Kawano, T. (2002). Subspace identification for a class of time-varying continuous-time stochastic systems

via distribution-based approach, *IFAC Proceedings Volumes* **35**(1): 241–246.

- Padilla, A., Garnier, H., Young, P. C. and Yuz, J. (2016). Real-time identification of linear continuous-time systems with slowly time-varying parameters, *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 3769–3774.
- Rayyam, M., Zazi, M. and Hajji, Y. (2015). Detection of broken bars in induction motor using the extended kalman filter (ekf), *Complex Systems (WCCS), 2015 Third World Conference on*, IEEE, pp. 1–5.
- Roshandel, A., Khosravi, A. and Alfi, A. (2011). An lmi based delay-dependent robust controller for transparent bilateral teleoperation system, *The 2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation*, pp. 457–462.
- Slotine, J.-J. E., Li, W. et al. (1991). *Applied nonlinear control*, Vol. 199, Prentice hall Englewood Cliffs, NJ.
- Young, P. C. (2011). *Recursive estimation and time-series analysis: An introduction for the student and practitioner*, Springer Science & Business Media.
- Young, P. C. and Garnier, H. (2006). Identification and estimation of continuous-time, data-based mechanistic (dbm) models for environmental systems, *Environmental modelling & software* **21**(8): 1055–1072.