CONTROLE $\mathcal{H}_2$ E $\mathcal{H}_\infty$ VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DE SISTEMAS AFINS COM COMUTAÇÃO POR AÇÃO CONJUNTA DE FUNÇÃO DE COMUTAÇÃO E ENTRADA DE CONTROLE

Guilherme K. Kolotelo*, Grace S. Deaecto*

*Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP
13083-860, Campinas, São Paulo, Brasil

Emails: {gkk, grace}@fem.unicamp.br

Abstract— This paper deals with the control design problem of a full-order switched dynamical controller along with an output-dependent switching function for continuous-time switched affine systems. More specifically, the controller and the function must be designed in order to assure global asymptotic stability of a desired equilibrium point, as well as a guaranteed $\mathcal{H}_2$ or $\mathcal{H}_\infty$ performance index. The design conditions are expressed in terms of linear matrix inequalities, and do not require any stability property of each isolated subsystem. The theory is illustrated by an academic example comprised of three third order non-controllable subsystems where no stable convex combination exists, indicating that the independent action of the control input and the switching function cannot assure stability of the overall system, reinforcing the importance of the joint action of both control structures, the controller and the switching function.

Keywords— Switched Affine Systems, Output-Feedback Control, $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Performance, Linear Matrix Inequalities.

Resumo— Este artigo trata do projeto de um controlador dinâmico de ordem completa e de uma regra de comutação dependente da saída para sistemas afins com comutação a tempo contínuo. Mais especificamente, o controlador e a regra devem ser projetados de forma a assegurar estabilidade assintótica global de um ponto de equilíbrio desejado, assim como um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. As condições de projeto são descritas em termos de desigualdades matriciais lineares e não exigem nenhuma propriedade de estabilidade dos subsistemas isolados. A teoria é ilustrada por um exemplo acadêmico composto de três subsistemas de terceira ordem não-controláveis sem qualquer combinação convexa estável, indicando que a ação isolada da entrada de controle e da função de comutação não é capaz de assegurar estabilidade do sistema global, portanto, reforçando a importância da ação conjunta de ambas as estruturas de controle, o controlador e a função de comutação.

Palavras-chave— Sistemas Afins com Comutação, Controle via Realimentação de Saída, Desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, Desigualdades Matriciais Lineares.

1 Introdução

Sistemas com comutação e suas aplicações têm recebido bastante atenção da comunidade científica nos últimos anos. Sendo uma importante subclasse dos sistemas híbridos, eles são compostos de um conjunto de subsistemas e uma função de comutação que seleciona a cada instante de tempo um dos subsistemas. Esta função, também conhecida como regra de comutação, pode ser arbitrária, dependente do tempo, ou uma variável de controle a ser projetada. É interessante observar que uma regra adequada pode garantir estabilidade do sistema, mesmo no caso em que todos seus subsistemas são instáveis. Além disso, quando estritamente consistente, ela melhora o desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ do sistema com comutação comparado àquele de cada subsistema isolado, veja (Geromel et al., 2013). Os livros (Liberzon, 2003) e (Sun, 2006) e o artigo (Shorten et al., 2007) são referências básicas sobre o tema.

Sistemas afins com comutação formam uma subclasse dos sistemas com comutação com grande interesse prático, pois modelam diretamente o comportamento de vários conversores de potência, como os abordados nas referências (Cardim et al., 2009), (Deaecto, 2016) e (Egidio et al., 2017). Esta subclasse de sistemas é caracterizada pela presença de termos afins, responsáveis pela existência de vários pontos de equilíbrio, o que impõe maior dificuldade no projeto de controladores quando comparada aos sistemas lineares. Várias referências tratam do controle de sistemas afins com comutação, sejam baseadas somente em uma regra de comutação estabilizante dependente do estado, como em (Bolzern and Spinelli, 2004), (Trofino et al., 2012) e (Scharlau et al., 2014), ou baseadas na atuação conjunta de uma regra de comutação e de uma entrada de controle dependentes do estado, veja (Deaecto and Santos, 2015). A literatura também apresenta resultados relacionados ao projeto de uma regra de comutação estabilizante dependente da saída medida, como em (Yoshimura et al., 2013), (Deaecto, 2016) e (Egidio, 2016). Algumas destas referências abordam a otimização de critérios de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, enquanto outras tratam exclusivamente de estabilidade. No entanto, segundo o nosso conhecimento, o projeto conjunto de uma regra de comutação estabilizante e uma entrada de controle dependentes da saída medida foi realizado somente para sistemas lineares, veja (Deaecto et al., 2011).

Assim, o presente artigo generaliza os resultados recentes de (Deaecto, 2016) de forma a levar em conta o projeto conjunto de duas estruturas de controle, a saber, um controlador dinâmico de

ordem completa e uma função de comutação dependentes somente da saída medida, para sistemas afins com comutação a tempo contínuo. O projeto deve ser realizado com o objetivo de otimizar índices de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ e é baseado em condições expressas em termos de desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs). Como será ilustrado através de um exemplo acadêmico, nenhuma propriedade de estabilidade é exigida de cada subsistema isolado. Este exemplo consiste de três subsistemas de terceira ordem instáveis, não-controláveis, e sem qualquer combinação convexa estável entre suas matrizes dinâmicas, indicando que a ação isolada da entrada de controle ou da função de comutação não é capaz de estabilizar o sistema global, reforçando assim a importância da atuação conjunta de ambas as estruturas de controle.

A notação utilizada ao longo deste texto é usual. Para matrizes quadradas, $\mathrm{tr}\,(\cdot)$ indica a função traço. Para vetores ou matrizes reais, $(^T)$ refere-se à sua transposta. Para matrizes simétricas, $(\bullet)$ indica seus blocos simétricos. Para uma matriz real X, $\mathrm{He}\{X\}$ define o operador hermitiano $\mathrm{He}\{X\} \coloneqq X + X^T$. O símbolo $\mathbb{R}$ representa o conjunto de números reais. O conjunto $\mathbb{K} = \{1, \cdots, N\}$ é composto pelos primeiros N números naturais positivos. Para qualquer matriz simétrica, $X \succ 0$ ($X \succeq 0$) denota uma matriz (semi)definida positiva. O simplex unitário composto de todos os vetores não negativos $\lambda \in \mathbb{R}^N$ tal que $\sum_{i\in\mathbb{K}} \lambda_i = 1$ é indicado por Λ_N. A combinação convexa de matrizes $\{X_1, \cdots, X_N\}$ é indicada por $X_\lambda = \sum_{i\in\mathbb{K}} \lambda_i X_i$, para algum $\lambda \in \Lambda_N$. Uma matriz quadrada é dita ser Hurwitz se seus autovalores se situarem na região aberta $\mathrm{Re}\{s\} < 0$ do plano complexo. Finalmente, $\mathcal{L}_2$ define o conjunto de trajetórias quadraticamente integráveis.

2 Definição do Problema

Considere o sistema afim com comutação com a seguinte realização no espaço de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t) + H_\sigma w(t) + b_\sigma \\ y(t) &= C_\sigma x(t) + D_\sigma w(t) \\ z(t) &= E_\sigma x(t) + F_\sigma u(t) + G_\sigma w(t) \end{aligned} \tag{1}$$

evoluindo de condições iniciais $x(0) = x_e$ com $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ sendo o vetor de estados, não disponível para realimentação, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ a perturbação externa, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ a entrada de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ a saída medida, $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída de desempenho e $\sigma(y) : \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{K}$ a função de comutação a ser projetada, que seleciona um dos N subsistemas, a cada instante de tempo.

O sistema com comutação possui vários pontos de equilíbrio sempre que $b_i \neq 0$, para algum $i \in \mathbb{K}$. O conjunto de pontos de equilíbrio alcançáveis pode ser definido da seguinte forma

$$X_e = \{x_e \in \mathbb{R}^{n_x} : x_e = -A_\lambda^{-1} b_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\} \tag{2}$$

É possível mover o ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ para a origem a partir da mudança de variável $\xi(t) = x(t) - x_e$, o que resulta no seguinte sistema equivalente

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_\sigma \xi(t) + B_\sigma u(t) + H_\sigma w(t) + \ell_\sigma \\ y_e(t) &= C_\sigma \xi(t) + D_\sigma w(t) \\ z_e(t) &= E_\sigma \xi(t) + F_\sigma u(t) + G_\sigma w(t) \end{aligned} \tag{3}$$

com $\ell_i = A_i x_e + b_i, \forall i \in \mathbb{K}$, sendo o novo termo afim, $y_e(t) = y(t) - C_\sigma x_e$, $z_e(t) = z(t) - E_\sigma x_e$ as saídas transladadas e $\xi(0) = 0$. Note que quando $x_e \in X_e$ para algum $\lambda \in \Lambda$, temos $\ell_\lambda = 0$.

O objetivo deste trabalho consiste em determinar um esforço de controle $u(t)$ a partir de um controlador dinâmico dependente de $y(t)$ e uma função de comutação $\sigma(y) : \mathbb{R}^{n_y} \to \mathbb{K}$ de maneira a garantir estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $\xi = 0$. Dessa maneira, é proposto um controlador afim com comutação de ordem completa $\mathcal{C}_\sigma$ com representação em espaço de estado dada por

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\xi}}(t) &= \hat{A}_\sigma \hat{\xi}(t) + \hat{B}_\sigma y_e(t) + \hat{\ell}_\sigma\ ,\ \hat{\xi}(0) = 0 \\ u(t) &= \hat{C}_\sigma \hat{\xi}(t) \end{aligned} \tag{4}$$

onde $\hat{\xi}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estados do controlador e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o esforço de controle. Note que o controlador $\mathcal{C}_\sigma$ é fundamental na estrutura de controle proposta, pois além de fornecer a lei de controle $u(t)$ para a planta, disponibiliza seu estado $\hat{\xi}$ para sintetizar a função de comutação $\sigma(\cdot)$. Além disso, as condições de projeto devem levar em conta a otimização de índices de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ que foram definidos em (Geromel et al., 2013) como apresentados a seguir:

- **Índice de desempenho $\mathcal{H}_2$:** Para subsistemas estritamente próprios ($G_i = 0,\ \forall i \in \mathbb{K}$), a saída $z_{e,k}(t)$ associada à perturbação do tipo impulsiva $w(t) = \delta(t)\psi_k$, com vetores ψ_k, $k \in \{1, \ldots, n_w\}$, formando a base padrão, permite definir o índice $\mathcal{H}_2$ como

$$J_2(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) = \sum_{k=1}^{n_w} \|z_{e,k}(t)\|_2^2 \tag{5}$$

- **Índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$:** Para a saída $z_e(t)$ associada a perturbações $w(t) \in \mathcal{L}_2$, $w(t) \neq 0$, o índice $\mathcal{H}_\infty$ é definido como

$$J_\infty(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) = \sup_{0\neq w\in\mathcal{L}_2} \frac{\|z_e(t)\|_2^2}{\|w(t)\|_2^2} < \rho \tag{6}$$

para um $\rho > 0$ dado.

Conectando o controlador (4) no sistema (3) e definindo o vetor de estados aumentado $\tilde{\xi}(t) = [\xi(t)^T \ \ \hat{\xi}(t)^T]^T \in \mathbb{R}^{2n_x}$, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}(t) &= \tilde{A}_\sigma \tilde{\xi}(t) + \tilde{H}_\sigma w(t) + \tilde{\ell}_\sigma \\ z_e(t) &= \tilde{E}_\sigma \tilde{\xi}(t) + \tilde{G}_\sigma w(t) \end{aligned} \tag{7}$$

com $\tilde{\xi}(0) = 0$ e matrizes dadas por

$$\begin{gathered} \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & B_i\hat{C}_i \\ \hat{B}_i C_i & \hat{A}_i \end{bmatrix}, \ \tilde{\ell}_i = \begin{bmatrix} \ell_i \\ \hat{\ell}_i \end{bmatrix}, \ \tilde{H}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ \hat{B}_i D_i \end{bmatrix} \\ \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & F_i\hat{C}_i \end{bmatrix}, \ \tilde{G}_i = G_i \end{gathered} \tag{8}$$

Antes de prosseguirmos, três resultados importantes referentes ao custo garantido $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas afins com comutação são emprestados da literatura. O presente lema, introduzido em (Deaecto et al., 2010), apresenta o resultado para o caso $\mathcal{H}_2$.

Lema 1 *Considere o sistema afim com comutação* (3) *com* $G_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, *e um certo* $x_e \in X_e$ *dado, com seu vetor* $\lambda_0 \in \Lambda$ *associado. Se existirem matrizes* $P = P^T \succ 0$ *e* $Q_i = Q_i^T$, $i \in \mathbb{K}$, *tais que*

$$\begin{gathered} A_i^T P + P A_i + E_i^T E_i + Q_i \prec 0, \quad i \in \mathbb{K} \\ Q_{\lambda_0} \succeq 0 \end{gathered} \tag{9}$$

então a seguinte regra de comutação

$$\sigma(\xi) = \arg\min_{i \in \mathbb{K}} -\xi^T Q_i \xi + 2\xi^T P \ell_i \tag{10}$$

torna o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ *globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido*

$$J_2(\sigma) < \operatorname{tr}\left(H_{\sigma(0)}^T P H_{\sigma(0)}\right) \tag{11}$$

Prova: A prova segue da definição do custo garantido disponível em (Deaecto et al., 2010)

$$\|z_e(t)\|_2^2 < \xi_0^T P \xi_0 \tag{12}$$

que foi obtido para o sistema (3) com $w(t) = 0$ e $\xi(0) = \xi_0$. Note que este sistema com $\xi(0) = H_{\sigma(0)}\psi_k$ é equivalente à (3) sempre que a perturbação impulsiva $w(t) = \delta(t)\psi_k$ for considerada. Dessa forma, através de um procedimento similar ao realizado em (Geromel et al., 2008), tem-se

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) \ &= \sum_{k=1}^{n_w} \|z_{e,k}(t)\|_2^2 < \ \sum_{k=1}^{n_w} \xi^T(0) P \xi(0) \\ &= \ \sum_{k=1}^{n_w} \psi_k^T H_{\sigma(0)}^T P H_{\sigma(0)} \psi_k \\ &= \operatorname{tr}\left(H_{\sigma(0)}^T P H_{\sigma(0)}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Onde $z_{e,k}(t)$ é associado à $w(t) = \delta(t)\psi_k$. A prova está concluída. □

Já o seguinte lema, apresentado em (Deaecto and Santos, 2015), introduz um limitante superior para o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ quando considera-se que a perturbação não pode ser medida.

Lema 2 *Considere o sistema afim com comutação* (3) *e um certo* $x_e \in X_e$ *dado, com seu vetor* $\lambda_0 \in \Lambda$ *associado. Se existirem matrizes* $P = P^T \succ 0$, $Q_i = Q_i^T$, $i \in \mathbb{K}$ *e* $\rho > 0$, *tais que*

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + Q_i & \bullet & \bullet \\ H_i^T P & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \\ Q_{\lambda_0} \succeq 0 \end{gathered} \tag{14}$$

então a regra de comutação (10) *torna o ponto de equilíbrio* $\xi = 0$ *globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido*

$$J_\infty(\sigma) < \rho \tag{15}$$

Prova: A Prova está disponível no Teorema 1 de (Deaecto and Santos, 2015). □

O próximo lema, também introduzido em (Deaecto and Santos, 2015), estabelece um limitante superior para o índice de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ mas agora considerando que a perturbação pode ser medida ou estimada.

Lema 3 *Considere o sistema afim com comutação* (3) *e um certo* $x_e \in X_e$ *dado, com seu vetor* $\lambda_0 \in \Lambda$ *associado. Se existirem matrizes* $P = P^T \succ 0$ *e um escalar* $\rho > 0$, *tais que*

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{0,i} \mathcal{L}_i(\rho, P) \prec 0 \tag{16}$$

com

$$\mathcal{L}_i(\rho, P) = \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + E_i^T E_i & \bullet \\ H_i^T P + G_i^T E_i & -\rho I + G_i^T G_i \end{bmatrix} \tag{17}$$

então a seguinte regra de comutação

$$\sigma(\xi, w) = \arg\min_{i \in \mathbb{K}} \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix}^T \mathcal{L}_i(\rho, P) \begin{bmatrix} \xi \\ w \end{bmatrix} + 2\xi^T P \ell_i \tag{18}$$

torna o ponto de equilíbrio $\xi = 0$ *globalmente assintoticamente estável e assegura o custo garantido*

$$J_\infty(\sigma) < \rho \tag{19}$$

Prova: A Prova está disponível no Teorema 3 de (Deaecto and Santos, 2015). □

Na próxima seção, estes resultados são generalizados para tratar o projeto conjunto de um controlador dinâmico e de uma regra de comutação dependentes da saída medida, de forma a assegurar um custo garantido $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$, o que representa nosso objetivo principal neste artigo.

3 Resultados Principais

Nesta seção nosso objetivo é satisfazer as condições dos Lemas 1 a 3 apresentados na seção anterior para o sistema aumentado (7) levando em conta que o estado $\xi \in \mathbb{R}^{n_x}$ não está disponível para realimentação. Para tanto, considere as variáveis matriciais $\tilde{P}$, $\tilde{P}^{-1}$, $\tilde{Q}_i$ e $\hat{\ell}_i$ cujas estruturas são introduzidas a seguir

$$\tilde{P}=\begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & \hat{Y} \end{bmatrix}, \tilde{P}^{-1}=\begin{bmatrix} X & U \\ U^T & \hat{X} \end{bmatrix}, \tilde{Q}_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i \end{bmatrix} \quad (20)$$
$$\hat{\ell}_i = -V^{-1}Y\ell_i$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, de maneira que as seguintes relações asseguram que $\tilde{P}^{-1}\tilde{P} = I$:

$$\begin{aligned} XY + UV^T = I, \quad XV + U\hat{Y} = 0 \\ U^TY + \hat{X}V^T = 0, \quad U^TV + \hat{X}\hat{Y} = I \end{aligned} \quad (21)$$

A escolha de $\tilde{Q}_i$ e $\hat{\ell}_i$ é fundamental para fazer com que a regra de comutação (10), quando aplicada ao sistema aumentado (7), seja expressa sem a dependência do estado do sistema, ou seja

$$\sigma(\hat{\xi}) = \arg\min_{i\in\mathbb{K}} -\hat{\xi}^T\hat{Q}_i\hat{\xi} + 2\hat{\xi}^TU^{-1}\ell_i \quad (22)$$

onde foi utilizado do fato que $\hat{Y} = -U^{-1}XV$ e $V^T = U^{-1}(I - XY)$.

3.1 Projeto de Controle $\mathcal{H}_2$

Nesta seção será introduzido um teorema que segue da generalização do Lema 1 aplicado no sistema aumentado (7) e garantindo um limitante superior para o índice J_2 definido em (5). É assumido que $G_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{K}$, de forma a tratarmos somente subsistemas estritamente próprios.

Teorema 1 *Considere o sistema afim com comutação* (7) *e um certo $x_e \in X_e$ dado, com seu vetor $\lambda_0 \in \Lambda_N$ associado. Se existirem matrizes simétricas X, Y, S, R_i e matrizes L_i e W_i, para todo $i \in \mathbb{K}$, tais que*

$$R_{\lambda_0} \succeq 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{A_iX+B_iW_i\}+R_i & \bullet \\ E_iX+F_iW_i & -I \end{bmatrix} \prec 0, \ \forall i \in \mathbb{K} \quad (24)$$

$$\mathrm{He}\{YA_i + L_iC_i\} + E_i^TE_i \prec 0, \ \forall i \in \mathbb{K} \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} S & \bullet & \bullet \\ H_j & X & \bullet \\ YH_j + L_jD_j & I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (26)$$

com $j = \sigma(0)$, então a regra de comutação

$$\sigma(\hat{\xi}) = \arg\min_{i\in\mathbb{K}} -\hat{\xi}^T\hat{Q}_i\hat{\xi} + 2\hat{\xi}^TX^{-1}\ell_i \quad (27)$$

em conjunto com o controlador (4)*, cujas matrizes são dadas por*

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= (Y - X^{-1})^{-1}(YA_i + YB_iW_iX^{-1} + \\ &\quad + L_iC_i + A_i^TX^{-1} + E_i^TE_i + E_i^TF_iW_iX^{-1}) \\ \hat{B}_i &= -(Y - X^{-1})^{-1}L_i \\ \hat{C}_i &= W_iX^{-1} \\ \hat{\ell}_i &= (Y - X^{-1})^{-1}Y\ell_i \\ \hat{Q}_i &= X^{-1}R_iX^{-1} \end{aligned} \quad (28)$$

asseguram estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio $x_e \in X_e$ e o custo garantido $\mathcal{H}_2$

$$J_2(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) < \mathrm{tr}\,(S) \quad (29)$$

para o sistema.

Prova: A prova é baseada na demonstração da validade do Lema 1 sempre que as condições do Teorema 1 são satisfeitas. Considere a primeira desigualdade em (9) aplicada ao sistema aumentado (7), multiplicada pela matriz de transformação

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} X & I \\ U^T & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

como mostrado

$$\mathrm{He}\left\{\tilde{\Gamma}^T\tilde{A}_i^T\tilde{P}\tilde{\Gamma}\right\} + \tilde{\Gamma}^T\tilde{E}_i^T\tilde{E}_i\tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma}^T\tilde{Q}_i\tilde{\Gamma} \prec 0 \quad (31)$$

Considerando as matrizes definidas em (20) e denotando $R_i = U\hat{Q}_iU^T$, $L_i = V\hat{B}_i$ e $W_i = \hat{C}_iU^T$ temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}^T\tilde{P}\tilde{A}_i\tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} A_iX+B_iW_i & A_i \\ \mathcal{V}_i & YA_i+L_iC_i \end{bmatrix} \\ \tilde{E}_i\tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} E_iX + F_iW_i & E_i \end{bmatrix} \\ \tilde{\Gamma}^T\tilde{Q}_i\tilde{\Gamma} &= \begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

com $\mathcal{V}_i = YA_iX + YB_iW_i + L_iC_iX + V\hat{A}_iU^T$. Note que substituindo (32) em (31) e escolhendo $\hat{A}_i$ como em (28), o bloco matricial $(2,1)$ obtido após a substituição é nulo e as diagonais principais são exatamente as condições (24) e (25) do teorema. Logo, se elas são satisfeitas, então a primeira desigualdade em (9) é verificada. Além disso, a desigualdade (23) é satisfeita se e somente se $\tilde{Q}_{\lambda_0} \succeq 0$, assim satisfazendo a segunda desigualdade em (9). Escolhendo, sem perda de generalidade, $U = X$ temos de (21) que $V = X^{-1} - Y$, obtendo de (22) a função de comutação (27) e as identidades (28). Observe também que (26) garante $\tilde{P} \succ 0$, já que pode também ser escrita como

$$\begin{bmatrix} S & \bullet \\ \tilde{\Gamma}^T\tilde{P}\tilde{H}_j & \tilde{\Gamma}^T\tilde{P}\tilde{\Gamma} \end{bmatrix} \succ 0 \quad (33)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}^T\tilde{P}\tilde{H}_j = \begin{bmatrix} H_j \\ YH_j+L_jD_j \end{bmatrix}, \ \tilde{\Gamma}^T\tilde{P}\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y \end{bmatrix} \quad (34)$$

Finalmente, multiplicando-se à esquerda da desigualdade acima por $\text{diag}(I, (\tilde{\Gamma}^T)^{-1})$, à direita por sua transposta, e subsequentemente aplicando o complemento de Schur com respeito à $\tilde{P}$, obtemos $S \succ \tilde{H}_j^T \tilde{P} \tilde{H}_j$. Assim, a desigualdade $J_2(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) < \text{tr}\,(S)$ é garantida como no Lema 1. A prova está concluída. □

Comentário 1 *Note que as desigualdades em* (24) *não requerem que as matrizes de malha fechada* $A_i + B_i K_{c,i}$, $i \in \mathbb{K}$, *com* $K_{c,i} = W_i X^{-1}$, *sejam estáveis, visto que as matrizes* R_i *são indefinidas em sinal. Na verdade, as desigualdades* (23) *junto com* (24) *são equivalentes a*

$$\sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_{0,i} \left(\text{He}\left\{ A_{m,i} X \right\} + X E'_{m,i} E_{m,i} X \right) \prec 0 \quad (35)$$

com $A_{m,i} = A_i + B_i K_{c,i}$ *e* $E_{m,i} = E_i + F_i K_{c,i}$ *e, portanto, a combinação convexa das matrizes de malha fechada devem ser Hurwitz como uma condição necessária para a factibilidade. Neste sentido, o resultado aqui apresentado generaliza as condições existentes na literatura, como por exemplo as propostas em (Yoshimura et al., 2013) e (Deaecto, 2016), pois pode assegurar estabilidade assintótica global nos casos em que cada subsistema é não-estabilizável e não existe combinação convexa estável das matrizes* $A_i, \forall i \in \mathbb{K}$. *Em outras palavras, levando em conta os resultados existentes, as condições do Teorema 1 podem assegurar estabilidade nos casos em que a entrada de controle* $u(t)$ *e a função de comutação* $\sigma(t)$ *são ineficazes atuando isoladamente. Por outro lado, as desigualdades* (25) *exigem que as matrizes em malha fechada* $A_i + K_{o,i} C_i$, *com* $K_{o,i} = Y^{-1} L_i$ $\forall i \in \mathbb{K}$ *sejam quadraticamente estáveis. Porém, esta condição não é muito restritiva visto que ela está totalmente desacoplada de* (24), *pois as matrizes de Lyapunov de ambas são diferentes, e os novos ganhos matriciais* $K_{o,i}$ *são dependentes de índice. Finalmente, note que* $\sigma(0)$ *pode ser escolhido de forma a otimizar o índice de desempenho* $\mathcal{H}_2$ *ou pode ser aquele de pior caso, o que possibilita que o projeto do controlador seja robusto quanto à condição inicial* $\sigma(0)$, *veja (Geromel et al., 2008) para maiores detalhes.*

3.2 Projeto de Controle $\mathcal{H}_\infty$

Nesta subseção tratamos da generalização dos Lemas 2 e 3 para o projeto do controlador e da regra de comutação que asseguram um custo garantido $\mathcal{H}_\infty$ de desempenho. Primeiramente, vamos considerar que a perturbação $w(t) \in \mathcal{L}_2$ não pode ser medida e generalizar as condições do Lema 2 para o caso de controle via realimentação de saída.

Teorema 2 *Considere o sistema afim com comutação* (7) *e um certo* $x_e \in X_e$ *dado, com seu vetor* $\lambda_0 \in \Lambda_N$ *associado. Se existirem matrizes simétricas* X, Y, R_i, *matrizes* L_i *e* W_i, $\forall i \in \mathbb{K}$ *e um escalar* $\rho > 0$, *tais que*

$$R_{\lambda_0} \succeq 0 \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} X & \bullet \\ I & Y \end{bmatrix} \succ 0 \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\left\{ A_i X + B_i W_i \right\} + R_i & \bullet & \bullet \\ H_i^T & -\rho I & \bullet \\ E_i X + F_i W_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\left\{ Y A_i + L_i C_i \right\} & \bullet & \bullet \\ H_i^T Y + D_i^T L_i^T & -\rho I & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (39)$$

para todo $i \in \mathbb{K}$, *então a regra de comutação* (27) *em conjunto com o controlador* (4), *cujas matrizes* $\hat{B}_i$, $\hat{C}_i$, $\hat{\ell}_i$ *e* $\hat{Q}_i$ *são dadas em* (28) *e*

$$\begin{aligned} \hat{A}_i = & (Y - X^{-1})^{-1} (Y A_i + Y B_i W_i X^{-1} + \\ & + L_i C_i + A_i^T X^{-1} + E_i^T E_i + \\ & + E_i^T F_i W_i X^{-1} + \mathcal{M}_i (\rho I - G_i^T G_i)^{-1} \mathcal{N}_i \end{aligned} \quad (40)$$

com $\mathcal{M}_i = Y H_i + L_i D_i + E_i^T G_i$ *e* $\mathcal{N}_i = H_i^T X^{-1} + G_i^T E_i + G_i^T F_i W_i X^{-1}$, *asseguram estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio* $x_e \in X_e$ *e o custo garantido* $\mathcal{H}_\infty$

$$J_\infty(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) < \rho \quad (41)$$

para o sistema.

Prova: De maneira similar ao Teorema 1, a prova consiste em demonstrar a validade do Lema 2 para o sistema aumentado (7) quando as condições do Teorema 2 são válidas. Assim, multiplicando à esquerda da primeira desigualdade em (14) por $\text{diag}(\tilde{\Gamma}^T, I, I)$ e à direita pela sua transposta, utilizando as identidades (21) e (34), que por sua vez foram obtidas a partir das matrizes (20) e (30), obtemos

$$\begin{bmatrix} \text{He}\left\{ A_i X + B_i W_i \right\} + R_i & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathcal{V}_i + A_i^T & \text{He}\left\{ Y A_i + L_i C_i \right\} & \bullet & \bullet \\ H_i^T & H_i^T Y + D_i^T L_i^T & -\rho I & \bullet \\ E_i X + F_i W_i & E_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \quad (42)$$

onde $\mathcal{V}_i$, R_i, W_i e L_i foram introduzidos na prova do Teorema 1. Aplicando o complemento de Schur em (42) com respeito às duas últimas linhas e colunas, pode ser verificado que o bloco $(2,1)$ da desigualdade resultante se torna nulo após utilizar $\hat{A}_i$ dado em (40), lembrando que podemos escolher $U = X$ o que implica de (21) em $V = X^{-1} - Y$. Além disso, note que aplicando o complemento de Schur de maneira apropriada aos blocos $(1,1)$ e $(2,2)$ da desigualdade resultante, tem-se que estes são equivalentes às desigualdades (38) e (39),

respectivamente. Consequentemente, a desigualdade (42) é satisfeita, já que ambos os blocos são definidos negativos. Note também que a desigualdade (37) assegura $\tilde{P} \succ 0$. Finalmente, temos que $R_{\lambda_0} \succeq 0$ é satisfeita se e somente se $\tilde{Q}_{\lambda_0} \succeq 0$ e a regra de comutação (27) se origina de (10) após ser feita a escolha de $\hat{\ell}_i$ em (28), como comentado no Teorema 1. Dessa forma, assim como no Lema 2, o limitante superior $J_\infty(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) < \rho$ é verificado, concluindo assim a prova do teorema. □

As mesmas observações sobre abrangência dos resultados realizadas logo após o Teorema 1 são válidas no presente caso. Mais especificamente, o Teorema 2 generaliza os resultados de (Deaecto, 2016) pois leva em conta o projeto simultâneo de duas variáveis de controle. Entretanto, sempre que a entrada externa puder ser medida ou estimada, condições menos conservadoras podem ser obtidas, como apresentado no próximo teorema.

Teorema 3 *Considere o sistema afim com comutação* (7) *e um certo* $x_e \in X_e$ *dado, com seu vetor* $\lambda_0 \in \Lambda_N$ *associado. Se existirem matrizes simétricas* X, Y, R_i, Z_i, *matrizes* J_i, L_i *e* W_i, $\forall i \in \mathbb{K}$ *e* $\rho > 0$, *satisfazendo (37),*

$$\begin{bmatrix} R_{\lambda_0} & \bullet \\ J_{\lambda_0}^T & Z_{\lambda_0} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{43}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{A_iX+B_iW_i\}+R_i & \bullet & \bullet \\ H_i^T + J_i^T & -\rho I+Z_i & \bullet \\ E_iX + F_iW_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\{YA_i + L_iC_i\} & \bullet & \bullet \\ H_i^TY + D_i^TL_i^T & -\rho I + Z_i & \bullet \\ E_i & G_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{45}$$

então a regra de comutação

$$\sigma(\hat{\xi}, w) = \arg\min_{i\in\mathbb{K}} -\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ w \end{bmatrix}^T \mathcal{Q}_i \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ w \end{bmatrix} + 2\hat{\xi}^T X^{-1} \ell_i \tag{46}$$

com

$$\mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} X^{-1}R_iX^{-1} & \bullet \\ J_i^TX^{-1} & Z_i \end{bmatrix} \tag{47}$$

em conjunto com o controlador (4)*, cujas matrizes* $\hat{B}_i$, $\hat{C}_i$ *e* $\hat{\ell}_i$ *são dadas em* (28) *e*

$$\begin{aligned} \hat{A}_i = &(Y - X^{-1})^{-1}(YA_i + YB_iW_iX^{-1} + \\ &+ L_iC_i + A_i^TX^{-1} + E_i^TE_i + \\ &+ E_i^TF_iW_iX^{-1} + \mathcal{M}_i(\rho I - G_i^TG_i - Z_i)^{-1}\mathcal{N}_i \end{aligned} \tag{48}$$

com $\mathcal{M}_i = YH_i + L_iD_i + E_i^TG_i$ *e* $\mathcal{N}_i = H_i^TX^{-1} + J_i^TX^{-1} + G_i^TE_i + G_i^TF_iW_iX^{-1}$*, asseguram estabilidade assintótica global do ponto de equilíbrio* $x_e \in X_e$ *e o custo garantido* (41) *para o sistema.*

Prova: Para demonstrar que o Lema 3 é satisfeito sempre que as condições do Teorema 3 são verificadas, vamos primeiramente definir a matriz estruturada

$$\tilde{Q}_{a,i} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_i & \tilde{\bar{Q}}_i \\ \tilde{\bar{Q}}_i^T & Z_i \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{Q}_i & \bar{Q}_i \\ \hline 0 & \bar{Q}_i^T & Z_i \end{array}\right] \tag{49}$$

Observe que as desigualdades (16) aplicadas ao sistema aumentado (7) são equivalentes à desigualdade $\tilde{Q}_{a,\lambda_0} \succeq 0$ junto com

$$\tilde{\mathcal{L}}_i(\rho, \tilde{P}) + \tilde{Q}_{a,i} \prec 0, \quad \forall i \in \mathbb{K} \tag{50}$$

com $\hat{Q}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $\bar{Q}_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$ e $Z_i \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$, veja (Geromel and Deaecto, 2014) para maiores detalhes. Como ficará evidente, a estrutura imposta para $\tilde{Q}_{a,i}$ é fundamental para que a função de comutação seja independente do estado $\xi \in \mathbb{R}^{n_x}$ que está indisponível. Reescrevendo (50) como

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}\left\{\tilde{P}\tilde{A}_i\right\}+\tilde{Q}_i & \bullet & \bullet \\ \tilde{H}_i^T\tilde{P}+\tilde{\bar{Q}}_i^T & -\rho I+Z_i & \bullet \\ \tilde{E}_i & \tilde{G}_i & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{51}$$

multiplicando esta desigualdade à esquerda por $\mathrm{diag}(\tilde{\Gamma}^T, I, I)$ e à direita pela sua transposta e utilizando as identidades (21) e (34), obtemos a desigualdade (42), mas modificada com $H_i^T + J_i^T \to H_i^T$ em $(3,1)$ e $-\rho I + Z_i \to -\rho I$ em $(3,3)$, que decorre de $\tilde{\bar{Q}}_i^T\tilde{\Gamma} = [J_i^T \;\; 0]$ com $J_i^T = \bar{Q}_i^TU^T$. Seguindo procedimento idêntico ao realizado na prova do Teorema 2, temos que após aplicar sucessivamente o complemento de Schur com relação às duas últimas linhas e colunas desta desigualdade modificada, e considerando as matrizes $\mathcal{V}_i$, R_i, W_i, L_i introduzidas na prova do Teorema 1 com a escolha $U = X$, a matriz $\hat{A}_i$ dada em (48) faz com que o elemento $(2,1)$ da LMI resultante seja nulo e as desigualdades (44) e (45) asseguram que a sua diagonal principal seja definida negativa, portanto, as condições do Lema 3 são satisfeitas. Finalmente, a regra de comutação (46) é obtida do fato de que

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{\xi}, w) &= \arg\min_{i\in\mathbb{K}} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ w \end{bmatrix}^T \tilde{\mathcal{L}}_i(\rho, \tilde{P}) \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ w \end{bmatrix} + 2\tilde{\xi}^T\tilde{P}\tilde{\ell}_i \\ &= \arg\min_{i\in\mathbb{K}} -\begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ w \end{bmatrix}^T \tilde{Q}_{a,i} \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ w \end{bmatrix} + 2\tilde{\xi}^T\tilde{P}\tilde{\ell}_i \\ &= \arg\min_{i\in\mathbb{K}} -\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ w \end{bmatrix}^T \mathcal{Q}_i \begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ w \end{bmatrix} + 2\hat{\xi}^TX^{-1}\ell_i \end{aligned}$$

que decorre da estrutura da matriz $\tilde{Q}_{a,i}$ definida em (49) e da escolha de $\hat{\ell}_i$ em (28). A prova está concluída. □

Este teorema é uma generalização dos resultados de (Deaecto, 2015) de forma a contemplar o projeto conjunto de duas estruturas de controle, enquanto que na referência (Deaecto, 2015), apenas o projeto de uma regra de comutação foi levado em consideração. Como mencionado em (Gahinet and

Apkarian, 1994), deve-se salientar que a otimização de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ em problemas descritos em termos de LMIs pode levar a soluções com matrizes mal-condicionadas. Para contornar este problema, em ambos os Teoremas 2 e 3, podemos fornecer $\rho > 0$ fixo e minimizar $\operatorname{tr}\left((Y - X^{-1})^{-1}\right)$ já que este termo aparece nas matrizes dinâmicas $\hat{A}_i,\ \forall i \in \mathbb{K}$ do controlador. Isto pode ser feito resolvendo o problema de otimização

$$\inf_{\Psi} \operatorname{tr}(\mathcal{S}) \tag{52}$$

$$\text{sujeito a : } \begin{bmatrix} \mathcal{S} & \bullet & \bullet \\ I & Y & \bullet \\ 0 & I & X \end{bmatrix} \succ 0 \tag{53}$$

e às condições apresentadas nos Teoremas 2 ou 3, em que Ψ é o conjunto de todas as soluções factíveis. De fato, aplicando o complemento de Schur sucessivamente com relação às duas últimas linhas e colunas de (53), obtemos $\mathcal{S} \succ (Y - X^{-1})^{-1}$ e, portanto, $\inf_\Psi \operatorname{tr}(\mathcal{S})$ proporciona um melhor condicionamento das matrizes do problema.

4 Exemplos

Para ilustrar a importância da metodologia proposta, é apresentado um exemplo composto de três subsistemas instáveis, definidos pelas matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$b_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$B_i = [10 \quad 10 \quad 0]^T$, $H_i = E_i = I$, $G_i = 0$ e $F_i^T = D_i = [1 \quad 1 \quad 1]$. Observe que os pares (A_i, B_i) são não controláveis, para todo i em $\mathbb{K}$, e não existe $\lambda \in \Lambda$, tal que A_λ seja Hurwitz. Dessa maneira, somente a ação conjunta de uma entrada de controle e de uma regra de comutação adequada são capazes de estabilizar o sistema. Foi escolhido o ponto de equilíbrio $x_e = [0.636 \quad -0.517 \quad 0.237]^T \in X_e$ que está associado à $\lambda_0 = [0.2 \quad 0.3 \quad 0.5]^T$.

4.1 Controle $\mathcal{H}_2$

Resolvidas as condições do Teorema 1, para $j = \sigma(0) = 3$ obtivemos um custo garantido $J_2(\sigma, \mathcal{C}_\sigma) < 18.6502$, assim como as matrizes $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{\ell}_i),\ i \in \{1, 2, 3\}$, do controlador (4) e $\hat{Q}_i,\ i \in \{1, 2, 3\}$, importantes para implementar a função de comutação (22). Iniciando o sistema do ponto $\tilde{\xi}_0 = \tilde{H}_3 \psi_1$, a Figura 1 apresenta as trajetórias dos estados, a entrada de controle, assim como a regra de comutação. Observe que, a partir de $t \approx 0.13$ segundos o sistema passa a evoluir sobre modos deslizantes. Por simulação numérica, obtivemos um custo verdadeiro $J_2 = 2.348 < 18.6502$.

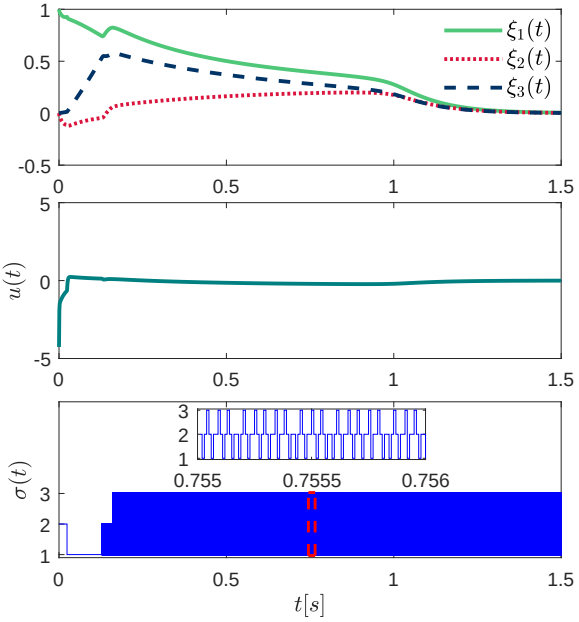

Figura 1: Trajetórias dos estados do sistema, esforço de controle e regra de comutação.

4.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

Agora resolvemos as condições do Teorema 2 pelo problema de otimização (52) para $\rho = 166.772$, arbitrariamente próximo do custo ótimo garantido. Obtivemos as matrizes $(\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{\ell}_i)$ e $\hat{Q}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, importantes para implementar o controlador (4) e a função de comutação (22). Aplicando a perturbação $w(t) = [0 \quad 5 \quad 0]^T$ no intervalo $0.5 \leq t \leq 1.5$ segundos, e nula caso contrário, obtivemos as trajetórias dos estados do sistema, entrada de controle e regra de comutação, apresentadas na Figura 2. Observe que os estados do

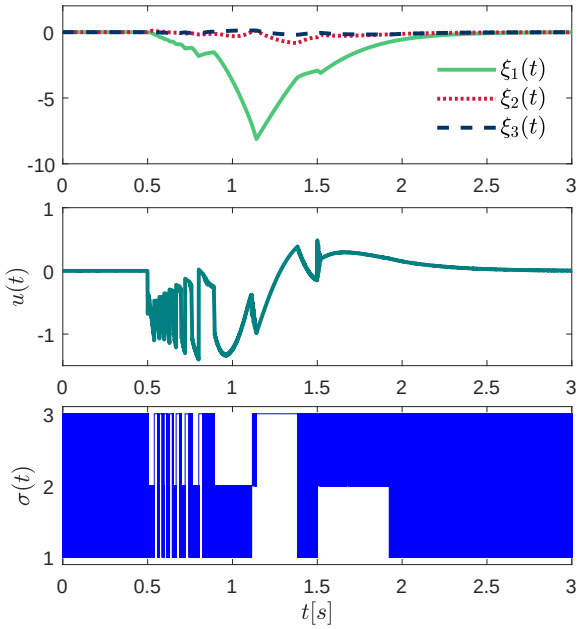

Figura 2: Trajetórias dos estados do sistema, esforço de controle e regra de comutação.

sistema evoluem para a origem, como era esperado, o que implica no estado x evoluindo para x_e. Para

fins de comparação, aplicando as condições do Teorema 3 obtivemos um custo garantido $\rho = 38.682$, valor 76.8% menor do que aquele para o Teorema 2. Este exemplo demonstra a efetividade e a relevância da técnica proposta.

5 Conclusão

Neste artigo foram propostas condições LMIs para o projeto conjunto de um controlador dinâmico de ordem completa e de uma função de comutação dependentes da saída medida para sistemas afins com comutação a tempo contínuo. O projeto leva em conta a otimização de índices de desempenho $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$. No que se refere ao segundo, foram propostas duas funções de comutação, sendo uma dependente apenas da saída e a outra dependente também da entrada. Um exemplo acadêmico ilustra a validade e a eficácia da metodologia proposta.

Agradecimentos

Este projeto de pesquisa é apoiado pelo "Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)", processo nº 306911/2015-9" e pela "Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)", processos nº 2016/18673-0 e 2017/20343-0.

Referências

Bolzern, P. and Spinelli, W. (2004). Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point, *Proceedings of the IEEE American Control Conference, 2004.*, Vol. 5, pp. 3890–3895.

Cardim, R., Teixeira, M., Assuncao, E. and Covacic, M. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter, *IEEE Trans. on Industrial Electronics* **56**(9): 3505–3513.

Deaecto, G. S. (2015). Output-input dependent switching function design for switched affine systems with $\mathcal{H}_\infty$ performance, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4891–4896.

Deaecto, G. S. (2016). Dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of continuous-time switched affine systems, *Automatica* **71**: 44–49.

Deaecto, G. S., Geromel, J. C. and Daafouz, J. (2011). Dynamic output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control of switched linear systems, *Automatica* **47**(8): 1713–1720.

Deaecto, G. S., Geromel, J., Garcia, F. and Pomilio, J. (2010). Switched affine systems control design with application to DC–DC converters, *IET Con. The. & App.* **4**(7): 1201–1210.

Deaecto, G. S. and Santos, G. C. (2015). State feedback $\mathcal{H}_\infty$ control design of continuous-time switched affine systems, *IET Con. The. & App.* **9**: 1511–1516.

Egidio, L. N., Daiha, H. R., Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2017). DC motor speed control via buck-boost converter through a state dependent limited frequency switching rule, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2072–2077.

Egidio, Lucas N. e Deaecto, G. S. (2016). Controle $\mathcal{H}_2$ via Realimentação de Saída de Sistemas Afins com Comutação a Tempo Contínuo, *Congresso Brasileiro de Automática - CBA* .

Gahinet, P. and Apkarian, P. (1994). A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **4**(4): 421–448.

Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**: 720–733.

Geromel, J. C. and Deaecto, G. S. (2014). Stability analysis of Lur'e-type switched systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **59**(11): 3046–3050.

Geromel, J. C., Deaecto, G. S. and Daafouz, J. (2013). Suboptimal Switching Control Consistency Analysis for Switched Linear Systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **58**(7): 1857–1861.

Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*, Springer-Verlag, New York.

Scharlau, C. C., de Oliveira, M. C., Trofino, A. and Dezuo, T. J. (2014). Switching rule design for affine switched systems using a max-type composition rule, *Sys. & Cont. Lett.* **68**: 1–8.

Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM review* **49**(4): 545–592.

Sun, Z. (2006). *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer London.

Trofino, A., Scharlau, C. C., Dezuo, T. J. and de Oliveira, M. C. (2012). Switching rule design for affine switched systems with $\mathcal{H}_\infty$ performance, *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1923–1928.

Yoshimura, V. L., Assunção, E., da Silva, E. R. P., Teixeira, M. C. M. and Mainardi Júnior, E. I. (2013). Observer-based control design for switched affine systems and applications to DC–DC converters, *Journal of Control, Automation and Electrical Sys.* **24**(4): 535–543.