

CONTROLE DE TEMPERATURA ROBUSTO PARA SISTEMAS DE SINTERIZAÇÃO SELETIVA A LASER UTILIZANDO FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA IRRACIONAIS

FRANTHIESCOLLY V. DE CARVALHO*, GUSTAVO A. DE ANDRADE*, DANIEL J. PAGANO*, JOSE M. MASCHERONI†

**Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Automação e Sistemas
Florianópolis, Santa Catarina, Brasil*

*†Alkimat Tecnologia Ltda
Abelardo Manoel Peixer, 142, São José, Santa Catarina, Brasil*

eng.franthiescolly@gmail.com, gustavo.artur@ufsc.br, daniel.pagano@ufsc.br,
jose@alkimat.com.br

Abstract— In this paper we study the temperature control problem in 3D printers based on the selective laser sintering technology. The control objective in this system is to maintain the temperature of the powder to be sintered at the reference value in spite of disturbances. To study this problem we consider that the plant is modeled by the heat equation with the control variable (heat flux) at one boundary condition. Since this equation is linear, we use an frequency domain approach in order to guarantee the reference tracking and closed-loop robust stability. More precisely, we show that the transfer function belongs to the Callier-Desoer algebra, which guarantees several properties of the closed-loop system, and in particular, that is possible to ensure robust stability for the infinite dimensional system by designing a controller based on a rational approximation of the original transfer function. To illustrate the effectiveness of the methodology, we present simulation results for the particular case of a PI controller.

Keywords— Selective laser sintering, Process modeling, Temperature control, Robustness, Partial differential equations.

Resumo— Neste trabalho estudamos o problema de controle de temperatura em impressoras 3D baseadas na tecnologia de sinterização seletiva a laser. O objetivo de controle neste sistema é manter a temperatura do pó a ser sinterizado no valor de referência e rejeitar perturbações. Para estudar este problema, consideramos que a planta é modelado pela equação do calor e que a variável de controle (fluxo de calor) está localizada na condição de contorno. Como esta equação é linear, utilizamos uma abordagem no domínio da frequência para garantir seguimento de referência e estabilidade robusta em malha fechada. Mais especificamente, mostramos que a função de transferência pertence à álgebra de Callier-Desoer, que garante diversas propriedades do sistema de malha fechada, e em particular, que é possível garantir estabilidade robusta para o sistema de dimensão infinita através do projeto de um controlador baseado em uma aproximação racional da função de transferência original. Para ilustrar a efetividade da metodologia, apresentamos resultados de simulação para o caso particular de um controlador PI.

Palavras-chave— Sinterização seletiva à laser, Modelagem de processos, Controle de temperatura, Robustez, Equações diferenciais parciais

1 Introdução

A sinterização seletiva a laser (SSL) é uma técnica de prototipagem rápida que utiliza raio laser para fundir, de forma seletiva, materiais em pó. Impressoras 3D baseadas nesta tecnologia consistem de uma plataforma de construção, um sistema de deposição de pó e um laser (veja a Figura 1). Através do sistema de deposição de pó, uma camada do material a ser sinterizado é inserida na plataforma de construção e preaquecida com o laser de preaquecimento. A partir de fontes de dados gerados por computador, o laser de sinterização é guiado sobre a plataforma para fundir o material, transformando-o em um objeto sólido. Uma vez que o pó tenha sido solidificado, a plataforma de construção é rebaixada e mais material em pó é depositado sobre a plataforma. Todo esse processo é repetido até que a última camada tenha sido concluída. O número de camadas depende

do tamanho do objeto e da potência do laser de sinterização.

Esta tecnologia possui diversas aplicações na indústria automobilística, aeroespacial e biomédica (Hagedorn et al., 2010; Kruth et al., 2005; Savalani and Pizarro, 2016). Comparada com métodos de fabricação convencional, como por exemplo fresamento e torneamento, a sinterização seletiva é mais sustentável do ponto de vista ambiental, pois minimiza o uso de ferramentas, resíduos de materiais e fluidos químicos (Telenko and Seepersad, 2012). Além disso, estudos demonstraram que os objetos fabricados com esta tecnologia possuem propriedades mecânicas equivalentes ou superiores àqueles produzidos por métodos de manufatura convencional (Das, 2003).

Embora a SSL tenha um futuro promissor como tecnologia avançada capaz de manufaturar diversos produtos, este processo é complexo e requer que diversas variáveis sejam controladas em

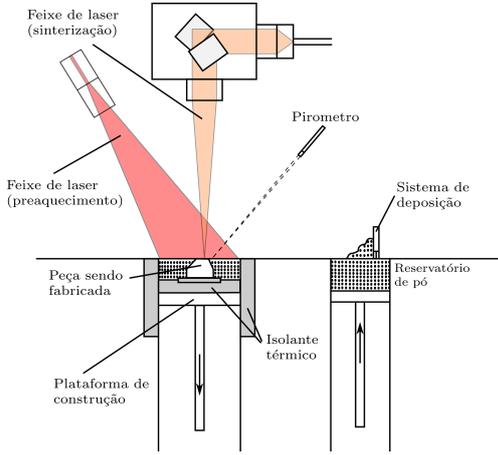


Figura 1: Esquemático de uma máquina de sinterização seletiva a laser.

seus valores ótimos para garantir as propriedades mecânicas adequadas. Caso contrário, o modelo fabricado pode conter rugosidade na superfície, deformação, porosidade e fissuras (Kempen et al., 2014). Diversos resultados na literatura identificaram que variáveis como a potência e velocidade do laser de sinterização, e espessura da camada de pó possuem efeito crucial nas propriedades do objeto final (Das, 2003; Kruth et al., 2005; Telenko and Seepersad, 2012). O pré-aquecimento do pó também fornece benefícios no processo de sinterização (Savalani and Pizarro, 2016). Ajustando a temperatura do pó próxima do seu ponto de fusão irá minimizar a energia térmica induzida pelo laser e conseqüentemente, reduzir o choque térmico que induz deformação e quebra durante a solidificação. Além disso, a molhabilidade do sólido pela fusão da fase líquida é melhorada com o preaquecimento. Entretanto, do ponto de vista da engenharia de controle, ainda não há estudos sobre projetos de controladores automáticos para o processo de preaquecimento em impressoras 3D baseadas no método SSL (Das, 2003). Tal sistema de controle tem como objetivo garantir que a temperatura do pó na plataforma de sinterização se mantenha em um valor de referência desejado. Além disso, este sistema de controle deve possuir propriedades de robustez e garantir estabilidade exponencial em malha fechada. Este trabalho é motivado por este desafio.

Neste trabalho, consideramos que a dinâmica do sistema é representada pela equação do calor em 1 dimensão espacial e que a variável de controle (laser de preaquecimento) está localizada na condição de contorno. Por se tratar de uma equação diferencial parcial (EDP) linear, utilizamos uma abordagem no domínio da frequência: aplicando a transformada de Laplace na equação do calor, calculamos uma função de transferência irracional e aplicamos ferramentas do domínio da frequência para sistemas com dimensão infinita, garantindo

o seguimento de referência e estabilidade robusta em malha fechada. Curiosamente, este sistema pertence à álgebra $\mathcal{B}(\sigma)$ de Callier-Desoer (Callier and Desoer, 1978), que é de grande interesse no contexto de controle. Tipicamente, ela permite garantir algumas propriedades da função de transferência que levam a condições suficientes para estabilidade robusta em malha fechada. Além disso, ela garante a possibilidade de projetar o controlador a partir de uma aproximação racional de baixa ordem da função de transferência original.

Nossos resultados são apresentados, sempre que possível, da maneira mais geral possível, de modo a mostrar o que pode ser efetivamente garantido através de tal abordagem no domínio da frequência. Além disso, apresentamos resultados de simulações para o caso específico de um controlador PI.

O artigo possui a seguinte estrutura. Na Seção 2, descrevemos o modelo matemático do sistema e na Seção 3 apresentamos a função de transferência irracional do sistema e suas propriedades. O projeto do controlador é apresentado na Seção 4, enquanto que os resultados de simulação são apresentados na Seção 5. Por fim, as conclusões e trabalhos futuros são apresentadas na Seção 6.

2 Modelo do sistema e problema de controle

Um modelo matemático completo do processo SSL é dado por EDPs em três dimensões (Lienhard IV and Lienhard V, 2003) e inclui a iteração entre o raio laser e a superfície da camada de pó, os mecanismos de transferência de calor no pó e nas partes solidificadas do material, e a transformação de fase do material. Entretanto, tal modelo possui complexidade matemática elevada e é pouco prático para projeto de controladores (Yuan and Gu, 2015). Portanto, neste trabalho iremos utilizar um modelo simplificado que mantém as principais características da dinâmica da temperatura do sistema, mas torna o problema de controle significativamente mais tratável.

Iremos considerar que a variação da temperatura ocorre somente na direção axial (veja a Figura 1) e que o contato entre as camadas de pó é perfeito. Além disso, assumiremos que as camadas são armazenadas instantaneamente. Portanto, a seguinte equação do calor é suficiente para descrever a dinâmica da temperatura:

$$\rho C_p \frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

na qual $t \in [0, \infty)$ é o tempo, $z \in [0, l(t)]$ é o espaço e T é a temperatura. Note que a coordenada z é variante no tempo, sendo $l(t) \in \mathbb{R}^+$ a função dependente do tempo, constante por partes, que descreve o comprimento de z . Para $t \in [t_{i-1}, t_i]$, temos que $l(t) = l_i$, na qual $l_i = i l_0$, $l_0 \in \mathbb{R}^+$ e

$i = 1, 2, 3, \dots$. A densidade é dada por ρ , C_p é o calor específico e k_0 é a condutividade térmica. Neste trabalho consideramos a poliamida 12 como material de sinterização e suas propriedades térmicas são apresentadas na Tabela 1.

Em $z = l(t)$, consideramos que (1) está sujeita ao fluxo de calor, U , induzido pelo laser de preaquecimento (variável de controle):

$$k_0 \frac{\partial T(t, l(t))}{\partial z} = U(t), \quad (2)$$

A segunda condição de contorno satisfaz o requerimento de que não há perda de calor em $z = 0$:

$$\frac{\partial T(t, 0)}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

A condição inicial de (1)-(3) é dada por

$$T(0, z) = T_0(z), \quad l(0) = l_0, \quad (4)$$

na qual $T_0 \in \mathcal{L}_2([0, l(0)])$ é dado.

Por fim, definimos a saída do sistema como $y(t) = T(t, l(t))$.

Dado $y_{ref} \in \mathbb{R}$, o objetivo de controle de (1)-(4) é garantir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{ref} - y(t) = 0,$$

independente da condição inicial (4). Além disso, o sistema de malha fechada deve ser estável. Neste trabalho, a seguinte definição de estabilidade é adotada:

Definição 1 *Se um sistema mapeia toda entrada U em $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ para uma saída y em $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ e*

$$\sup_{u \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} < \infty$$

então o sistema é estável. Um sistema é dito instável se não é estável.

Para sistemas representados por funções de transferência, a maneira mais fácil de analisar a estabilidade de acordo com a definição acima, é utilizando o seguinte resultado (Curtain and Morris, 2009):

Teorema 1 *Um sistema é linear se e somente se sua função de transferência pertence a*

$$\mathbf{H}_\infty = \{G : \mathbb{C}_0^+ \rightarrow \mathbb{C} : G \text{ analítica e} \\ \sup_{\text{Re}(s) > 0} |G(s)| < \infty\}$$

com norma $\|G\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) > 0} |G(s)|$. Neste caso, dizemos que G é uma função de transferência estável.

Tabela 1: Propriedades térmicas da poliamida 12.

Símbolo	Descrição	Valor
ρ	Densidade	1010 kg/m ³
C_p	Calor específico	1928 J/(kg K)
k_0	Condutividade térmica	0.28 W/(m K)

Devido ao fato de (1)-(4) ser uma representação bastante simplificada do sistema, o controlador também deverá ter propriedades de robustez. Neste trabalho, as incertezas consideradas estarão restringidas à seguinte definição:

Definição 2 *Sejam $G, G_\Delta \in \hat{\mathcal{B}}(0)$ as funções de transferência nominal e perturbada da planta, respectivamente. Então, $\Delta_a \in \hat{\mathcal{B}}(0)$, com $\|\Delta_a\|_\infty < \varepsilon$, é uma incerteza se $G_\Delta = G + \Delta_a$.*

Se $C \in \hat{\mathcal{B}}(0)$ estabiliza G_Δ , dizemos que o par (G, C) possui estabilidade robusta com margem de robustez ε .

Neste sentido, nas próximas seções iremos resolver este problema de controle utilizando uma abordagem no domínio da frequência.

3 Função de transferência de malha aberta

A função de transferência de malha aberta do sistema pode ser obtida aplicando a transformada de Laplace em (1)-(4) e resolvendo a EDO resultante na variável z , parametrizada pela variável de Laplace s . Mais precisamente, usando a relação $\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = s\hat{T}(s, z)$ na qual \hat{T} é a transformada de Laplace de T , temos que

$$k_0 \frac{\partial^2 \hat{T}(s, z)}{\partial z^2} = \rho C_p s \hat{T}(s, z). \quad (5)$$

Resolvendo (5) e utilizando as condições de contorno (2)-(3) obtemos a seguinte solução:

$$\hat{T}(s, z) = \frac{\alpha \cosh\left(\frac{\sqrt{s}z}{\alpha}\right)}{k_0 \sqrt{s} \sinh\left(\frac{\sqrt{s}l_i}{\alpha}\right)} \hat{u}(s) \quad (6)$$

na qual α é a difusividade térmica, com $\alpha^2 = \frac{k_0}{C_p \rho}$, e \hat{u} é a transformada de Laplace de U .

Especificando a transformada de Laplace da saída como $\hat{y}(s) = \hat{T}(s, l_i)$, obtemos a seguinte representação da função de transferência do sistema:

$$\hat{y}(s) = \frac{\alpha \cosh\left(\frac{\sqrt{s}l_i}{\alpha}\right)}{k_0 \sqrt{s} \sinh\left(\frac{\sqrt{s}l_i}{\alpha}\right)} \hat{u}(s). \quad (7)$$

3.1 Pólos e zeros de malha aberta do sistema

Os pólos do sistema são obtidos como a solução da seguinte equação irracional:

$$\sqrt{s} \sinh\left(\frac{\sqrt{s}l_i}{\alpha}\right) = 0.$$

Existe um pólo em zero (o sistema age como um integrador para a variável T com as condições

de contorno consideradas) e os outros pólos verificam a seguinte equação:

$$p_k = -(k\pi\alpha/l_i)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

que são números reais negativos. Note que, devido ao pólo em zero, o sistema (1)-(4) não é estável.

Os zeros de (7) são dados pelos zeros do numerador e são os números reais negativos

$$z_k = -((k\pi + \pi/2)\alpha/l_i)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Na próxima seção iremos estudar algumas propriedades da função de transferência (7) que serão úteis para o projeto do controlador.

3.2 Propriedades da função de transferência

Iremos mostrar na sequência que a função de transferência (7) pertence à álgebra de Callier-Desoer (Callier and Desoer, 1978). O fato de que o sistema pertence à álgebra de Callier-Desoer é de grande interesse no contexto de controle. Tipicamente, isto permite garantir que o sistema de malha fechada é bem definido e conduz a condições suficientes para estabilidade robusta em malha fechada.

Seja $\sigma \in \mathbb{R}$ um número real dado, e $\mathcal{A}(\sigma)$ o conjunto das distribuições tal que

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ \sum_{t_i=0}^{\infty} f_i \delta(t - t_i) + f_a(t), & \text{se } t \geq 0 \end{cases} \quad (9)$$

na qual $f_a(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{L}_1(0, \infty)$, $\delta(\cdot)$ representa a distribuição delta, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots$ e f_i são constantes reais, e $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|e^{-\sigma t_i} < \infty$.

$\hat{\mathcal{A}}(\sigma)$ representa o conjunto de todas as funções $\tilde{f} : \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ que são a transformada de Laplace dos elementos de $\mathcal{A}(\sigma)$; elas são analíticas em $Re(s) > \sigma$ e limitadas em $Re(s) \geq \sigma$, na qual $Re(s)$ representa a parte real de s .

Os conjuntos $\mathcal{A}_-(\sigma)$ e $\hat{\mathcal{A}}_-(\sigma)$ são definidos por

$$\mathcal{A}_-(\sigma) = \bigcup_{\sigma_1 < \sigma} \mathcal{A}(\sigma_1) \quad \text{e} \quad \hat{\mathcal{A}}_-(\sigma) = \bigcup_{\sigma_1 < \sigma} \hat{\mathcal{A}}(\sigma_1).$$

$\hat{\mathcal{A}}_-(\sigma)$ representa o conjunto de elementos $\hat{b} \in \hat{\mathcal{A}}_-(\sigma)$ tal que

$$\inf_{s \in \overline{\mathbb{C}}_\sigma^+, |s| \geq s_o} |\hat{b}(s)| > 0$$

para um dado $s_o > 0$.

O conjunto $\hat{\mathcal{B}}(\sigma)$ consiste de todas as funções $\hat{f} = \hat{a}/\hat{b}$, na qual $\hat{a} \in \hat{\mathcal{A}}_-(\sigma)$ e $\hat{b} \in \hat{\mathcal{A}}_-(\sigma)$. $\hat{\mathcal{B}}(\sigma)$ é uma álgebra, como mostrado em (Callier and Desoer, 1978).

Proposição 1 A função de transferência $G(s)$, definida em (7), pertence a álgebra de Callier-Desoer $\hat{\mathcal{B}}(\sigma)$, com $\sigma > (\pi\alpha/l_i)^2$.

Prova: Usando a expressão dos pólos de G e o teorema dos resíduos, podemos reescrever G como uma soma infinita:

$$G(s) = \frac{\alpha^2}{k_0 l_i s} + \frac{2l_i}{k_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l_i^2 s + (k\pi\alpha)^2}. \quad (10)$$

Então, $G(s)$ é a soma de uma parte de dimensão finita instável e uma parte de dimensão infinita estável pertencente a $\hat{\mathcal{A}}(\sigma)$. Como a parte de dimensão infinita estável possui pólos reais maiores que $\sigma_1 = (\pi\alpha/l_i)^2$, então $G(s) \in \hat{\mathcal{B}}(\sigma)$, com $\sigma > \sigma_1$ (veja exercício 7.6 em (Curtain and Zwart, 1995)). \square

A partir de (10) é fácil ver que G é positiva real. Consequentemente, G pode ser estabilizada por uma lei de controle proporcional $u(s) = -k_p y(s)$ para qualquer ganho k_p positivo (veja o Teorema E.2 em (Curtain and Morris, 2009)). Entretanto, sabemos que com um controlador proporcional não é possível garantir seguimento de referência quando o sistema está sujeito à perturbações ou incertezas. Neste caso, é necessário um controlador de ordem superior.

Antes de apresentar a metodologia de controle proposta neste trabalho, iremos mostrar outra propriedade de (7).

Definição 3 A função de transferência G é própria se para s_o suficientemente grande,

$$\sup_{Re(s) \geq 0 \cap |s| > s_o} |G(s)| < \infty. \quad (9)$$

Se o limite de $G(s)$ no infinito existe e é zero, dizemos que G é estritamente própria.

De fato, a função de transferência (7) é estritamente própria. Escrevendo \sqrt{s} como $\sigma + j\omega$ e $x_1 = l_i/\alpha$, temos que

$$\cosh(\sqrt{s}x_1) = \cosh^2(x_1\omega) - \sin^2(x_1\omega)$$

e

$$\begin{aligned} |\sinh(\sqrt{s}x_1)|^2 &= |\sinh(x_1\sigma + jx_1\omega)|^2 \\ &= |\sinh(x_1\sigma) \cosh(jx_1\omega) + \cosh(x_1\sigma) \sinh(jx_1\omega)|^2 \\ &= |\sinh(x_1\sigma) \cos(x_1\omega) + j \cosh(x_1\sigma) \sin(x_1\omega)|^2 \\ &= \sinh^2(x_1\sigma) \cos^2(x_1\omega) + \cosh^2(x_1\sigma) \sin^2(x_1\omega) \\ &= \sinh^2(\sigma) + \sin^2(\omega). \end{aligned}$$

Então,

$$|G(s)|^2 = \frac{\cosh^2(x_1\sigma) - \sin^2(x_1\omega)}{\sinh^2(x_1\sigma + \sin^2(x_1\omega))}$$

e portanto

$$|G(s)| \leq \left| \frac{\cosh(x_1\sigma)}{\sqrt{s} \sinh(x_1\sigma)} \right| \leq 2 \frac{e^{\sigma(x_1-1)}}{\sqrt{s}}$$

Segue que $G(s) \rightarrow 0$ para $|s| \rightarrow \infty$ e $Re(s) \geq 0$.

4 Projeto do controlador

4.1 Função de transferência de malha fechada

Seja $C(s)$ a transformada de Laplace do controlador de dimensão finita C e $\hat{e}(s) = y_{ref} - y(s)$ a transformada de Laplace do erro de referência. Então,

$$\hat{u}(s) = C(s)\hat{e}(s). \quad (11)$$

Substituindo a lei de controle (11) em (7) obtemos a seguinte função de transferência de malha fechada:

$$y(s) = \frac{G(s)C}{1 + G(s)C(s)} \hat{u}(s).$$

Como G é representada por uma função de transferência irracional, projetar um controlador com garantia de seguimento de referência e estabilidade robusta é uma tarefa complexa. Uma alternativa é aproximar a função de transferência (7) por uma representação racional e realizar o projeto de controle considerando esta aproximação.

4.2 Aproximação modal

Como a função de transferência do sistema possui uma representação em expansão em frações parciais infinita (veja (10)), podemos utilizar uma aproximação para realizar o projeto do controlador. Truncando (10), obtemos a aproximação modal de N -ésima ordem:

$$G_N(s) = \frac{\alpha^2}{k_0 l_i s} + \frac{2l_i}{k_0} \sum_{k=1}^N \frac{1}{l_i^2 s + (k\pi\alpha)^2}. \quad (12)$$

Note que o erro \mathbf{H}_∞ pode ser feito arbitrariamente pequeno se incrementarmos N , pois

$$\|G - G_N\|_\infty \leq \frac{2l_i}{k_0(\pi\alpha)^2} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \quad (13)$$

4.3 Controlador robusto

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que se projetarmos um controlador robusto para a função de transferência truncada (12), então este mesmo controlador garante estabilidade robusta para (7), mas com outra margem de robustez.

Primeiramente, vamos lembrar que a margem de robustez máxima de (7) pode ser calculada utilizando o conceito do valor singular mínimo de

Hankel (Curtain and Zwart, 1995). Se a função de transferência $G \in \hat{\mathcal{B}}(0)$ possui a representação

$$G = G_u + G_s, \quad (14)$$

na qual $G_s \in \hat{\mathcal{A}}_-(0)$ e G_u é uma função de transferência racional estritamente própria com os polos em $\overline{\mathbb{C}}_0^+$, então a margem de robustez máxima satisfaz $\varepsilon \leq \sigma_{min}(G_u^\dagger)$.

É fácil verificar que (7) possui a representação (14). De fato, a partir de (10), temos que $G_u = \frac{\alpha^2}{k_0 l_i s}$ e os termos restantes estão em $\hat{\mathcal{A}}_-(0)$. Portanto, podemos calcular a margem de robustez máxima de (7) a partir do valor singular mínimo de Hankel.

Suponha que desejamos que o controlador robusto, C , garanta que os pólos de malha fechada estejam em \mathbb{C}_β^- para algum $\beta < 0$. Neste caso, dizemos que o sistema de malha fechada possui margem de estabilidade de $-\beta$. Defina $G^\beta(s) = G(s + \beta)$. Então, $G_u^\beta(s) = \frac{\alpha^2}{k_0 l_i (s + \beta)}$, $(G_u^\beta)^\dagger(s) = \frac{\alpha^2}{k_0 l_i} \frac{-1}{s - \beta}$ e a realização de $(G_u^\beta)^\dagger(s)$ é dada por $\Sigma(A, B, C) = (\beta, \alpha^2/(k_0 l_i), 1)$. Os gramianos de controlabilidade e observabilidade são dados por $-\frac{\alpha^2}{k_0 l_i} \frac{1}{2\beta}$ e seu valor singular igual a $-\frac{\alpha^2}{k_0 l_i} \frac{1}{2\beta}$. Portanto, neste caso o sistema possui estabilidade robusta com margem de robustez ε (e margem de estabilidade β) se e somente se $\varepsilon \leq -\frac{\alpha^2}{k_0 l_i} \frac{1}{2\beta}$. Note que aumentando a margem de estabilidade, β , diminui-se a margem de robustez alcançável.

No próximo teorema apresentamos o principal resultado deste trabalho. Mais especificamente, mostramos que dado um controlador C_a (de dimensão finita) que garante a estabilidade robusta de uma aproximação de G , então este controlador também garantirá estabilidade robusta de G .

Teorema 2 *Suponha que $G \in \hat{\mathcal{B}}(0)$ é estritamente própria em $\overline{\mathbb{C}}_0^+$ e sem pólos no eixo imaginário. Suponha que $G_a \in \hat{\mathcal{B}}(0)$ é uma aproximação estritamente própria de G tal que:*

1. $\|G - G_a\|_\infty \leq \delta$, e
2. G e G_a possuem o mesmo número de pólos em $\overline{\mathbb{C}}_0^+$.

Se C_a é um controlador racional que garante estabilidade robusta de G_a com respeito as perturbações da Definição 2, com margem de robustez ε_a , e $\delta < \varepsilon_a$, então C_a garante a estabilidade robusta de G com margem de robustez maior ou igual que $\varepsilon_a - \delta$.

Prova: Note que $G = G_a + G - G_a = G_a + \Delta_a$. Logo, $\|\Delta_a\|_\infty = \|G - G_a\|_\infty \leq \delta < \varepsilon_a$. Então, C_a estabiliza G (veja Lemma 9.3.12 em (Curtain and Zwart, 1995)).

Suponha agora que Δ é uma perturbação para G e seja $G + \Delta = G_a + \Delta_a$, na qual $\Delta_a = \Delta + (G - G_a)$. Segue que $\|\Delta_a\|_\infty = \|\Delta + (G - G_a)\|_\infty < \|\Delta\|_\infty + \delta < \varepsilon_a$. Portanto, $\|\Delta\|_\infty < \varepsilon_a - \delta$. \square

É importante enfatizar que os resultados desta seção não apresentam uma estrutura para o controlador C_a . O resultado apenas garante que se um controlador for projetado por uma aproximação estritamente própria de G tal que as hipóteses do Teorema 2 sejam satisfeitas, então esse controlador irá garantir a estabilidade robusta do sistema de dimensão infinita. Entretanto, uma vez que o projeto do controlador pode ser realizado a partir de uma aproximação racional de G , todas as ferramentas clássicas de projeto de controle tornam-se disponíveis para o sistema. Na próxima seção apresentamos o caso particular do controlador PI.

5 Resultados numéricos

Nesta seção iremos apresentar as simulações numéricas utilizando a metodologia de controle proposta. Consideramos o modelo de três dimensões de (Dong et al., 2009) como planta simulada. Trata-se de um modelo que inclui a iteração entre o raio laser e a superfície da camada de pó, os mecanismos de transferência de calor no pó e nas partes solidificadas do material, e a transformação de fase do material. O leitor interessado deve consultar (Dong et al., 2009) para obter mais detalhes sobre estas equações. Para encontrar a solução numérica do sistema, utilizamos o programa Comsol Multiphysics, que é bem conhecido por resolver EDPs através do método de elementos finitos. A geometria da plataforma de sinterização é dada por um disco com raio de 100 mm e cada camada possui altura de 0.1 mm, ou seja $l_0 = 0.1$ mm. Além disso, assumiremos que a peça que está sendo sinterizada é um cilindro oco de raio externo de 55 mm e raio interno de 50mm. Note que utilizando este modelo como planta, estamos incluindo implicitamente incertezas paramétricas, pois as equações consideradas para o projeto do controlador (veja (1)-(4)) possuem diversas simplificações.

Assuma que $N = 1$. Então, de acordo com o Teorema 2, podemos projetar um controlador de dimensão finita C_a , com margem de robustez de $\varepsilon_a - \delta = \varepsilon + \frac{2l_i}{k_0(\pi\alpha)^2}$, a partir do sistema aproximado $G_1(s) = \frac{\alpha^2}{k_0 l_i s} + \frac{2l_i}{k_0 l_i^2 s + (\pi\alpha)^2}$. Utilizando os parâmetros da Tabela 1, podemos verificar que o controlador PI

$$C_a(s) = \frac{k_p(T_i s + 1)}{T_i s},$$

com $k_p = 0.3$ W/(m² K) e $T_i = 0.5$ s⁻¹, garante a estabilidade de G_1 com margem de robustez $\varepsilon_a = 3.3$. Logo, este controlador também

garante estabilidade robusta para G com margem de robustez $\varepsilon = 0.78$.

As primeiras duas camadas deste cenário numérico são apresentadas na Figura 2. Nesta figura apresentamos a plataforma de sinterização em três instantes de tempo diferentes: em $t = 14$ s (esquerda), em $t = 15.1$ s (centro); e $t = 28.1$ s (direita). Como pode ser observado, o sistema de controle manteve a temperatura próximo do valor desejado, exceto na região sinterizada. O sinal de controle e a saída do sistema podem ser visualizadas na Figura 3. Como pode ser visto no gráfico inferior da Figura 3, a saturação do sinal de controle foi incluída nas simulações. Além disso, uma estratégia anti-windup foi utilizada no termo integral do controlador para melhorar o desempenho do sistema na região da saturação.

É importante enfatizar que os resultados deste trabalho foram comprovados matematicamente somente para a região linear do sistema. No caso da região de saturação, os resultados não tem garantia teórica de estabilidade robusta. Entretanto, as simulações numéricas apresentadas nesta seção mostram que o controlador é capaz de garantir seguimento de referência e estabilidade para este caso.

6 Conclusões

Neste artigo, propomos uma metodologia de controle robusto no domínio da frequência para o problema de controle de temperatura em impressoras 3D baseadas no método SSL. Nossos resultados consideram que a dinâmica do sistema é representada pela equação do calor em uma dimensão e que a variável de controle está localizada na condição de contorno. Usando as propriedades da álgebra de Callier-Desoer, mostramos, de maneira rigorosa, que o projeto do controlador pode ser realizado através de uma aproximação racional da função de transferência original do sistema. Através de resultados de simulações para o caso específico do controlador PI, mostramos que a metodologia é eficiente.

Como trabalhos futuros, iremos investigar o projeto dos ganhos do controlador que garantem a margem de robustez máxima. O trabalho de (Kashima and Yamamoto, 2008) pode ser uma boa abordagem para tratar este problema. Outra direção de trabalhos futuros é a análise de estabilidade robusta na região de saturação. Neste caso, pretendemos usar o método da função descritiva. Por fim, realizaremos teste experimentais em uma impressora 3D para quantificar os benefícios do uso de estratégias de controle automático no processo de sinterização.

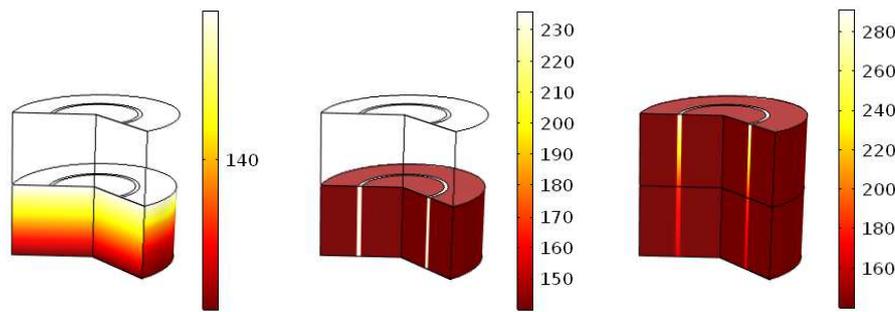


Figura 2: Distribuição da temperatura em três instantes de tempo diferentes. Da esquerda para a direita: distribuição da temperatura em $t = 14\text{s}$; distribuição da temperatura em $t = 15.1\text{ s}$ (após a sinterização da primeira camada de pó); e distribuição da temperatura em $t = 28.1\text{ s}$ (após a sinterização da segunda camada de pó).

Agradecimentos

Trabalho parcialmente financiado através do Projeto CNPq 150410/2017-4.

Referências

- Callier, F. M. and Desoer, C. A. (1978). an algebra of transfer functions for distributed linear time invariant systems, *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **25**: 651–662.
- Curtain, R. F. and Zwart, H. J. (1995). *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Springer Verlag, Berlin.
- Curtain, R. and Morris, K. (2009). transfer functions of distributed parameter systems: A tutorial, *Automatica* **45**: 1101–1116.
- Das, S. (2003). physical aspects of process control in selective laser sintering of metals, *Advanced engineering materials* **5**: 701–711.
- Dong, L., Makradi, A., Ahzi, S. and Remond, Y. (2009). three-dimensional transient finite element analysis of the selective laser sintering pro-

cess, *Journal of Materials Processing Technology* **209**: 700–706.

- Hagedorn, Y.-C., Wilkes, J., Meiners, W., Wissenbach, K. and Poprawe, R. (2010). net shaped high performance oxide ceramic parts by selective laser melting, *Physics Procedia* **5**: 587–594.
- Kashima, K. and Yamamoto, Y. (2008). on standard H_∞ control problems for systems with infinitely many unstable poles, *Systems & Control Letters* **57**: 309–314.
- Kempen, K., Vrancken, B., Buls, S., Thijs, L., Humbeeck, J. V. and Kruth, J.-P. (2014). selective laser melting of crack-free high density M2 high speed steel parts by baseplate preheating, *Journal of Manufacturing Science and Engineering* **136**: 061026–061026–6.
- Kruth, J. P., Mercelis, P., Vaerenbergh, J. V. and Froyen, L. and Rombouts, M. (2005). binding mechanisms in selective laser sintering and selective laser melting, *Rapid Prototyping Journal* **11**: 26–36.
- Lienhard IV, J. H. and Lienhard V, J. H. (2003). *A heat transfer textbook*, Phlogiston Press.
- Savalani, M. M. and Pizarro, J. M. (2016). effect of preheat and layer thickness on selective laser melting (SLM) of magnesium, *Rapid Prototyping Journal* **22**: 115–122.
- Telenko, C. and Seepersad, C. C. (2012). a comparison of the energy efficiency of selective laser sintering and injection molding of nylon parts, *Rapid Prototyping Journal* **18**: 472–481.
- Yuan, P. and Gu, D. (2015). molten pool behaviour and its physical mechanism during selective laser melting of TiC/AISI10Mg nanocomposites: simulations and experiments, *Journal of Physics D: Applied Physics* **48**: 035303 (16pp).

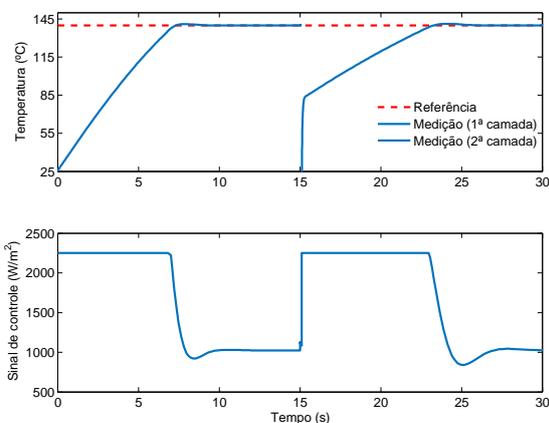


Figura 3: Temperatura medida (gráfico superior) e sinal de controle em função do tempo.