### BUSCA EXTREMAL COM ATRASOS VARIANTES NO TEMPO

TIAGO ROUX OLIVEIRA\*, GEORGE CARNEIRO SANTOS\*

\*Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil

Email: tiagoroux@uerj.br, georgecs89@gmail.com

Abstract— This paper presents a gradient predictor-feedback extremum seeking algorithm to cope with locally quadratic static maps under time-varying delays. Dealing with non constant delays has a strong impact in the predictor design in terms of the associated transport partial differential equation (PDE) with variable convection speed as well as the conditions imposed on the delay regarding its arbitrary duration but bounded variation. A new predictor design with a perturbation-based estimate of the unknown Hessian of the map must be introduced to accommodate this variable nature of the delays, which can arise both in actuation and sensing paths. Local exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point are rigorously detailed. This result is achieved by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. Numerical simulations are given to illustrate the effectiveness of the proposed predictor-based extremum seeking control for time-varying delay compensation.

Keywords— Extremum seeking, Adaptive control, Time delays, Backstepping, Averaging theory, Infinite-dimensional systems

Resumo— Este artigo apresenta um algoritmo de busca extremal do tipo gradiente baseado em preditores para lidar com mapeamentos estáticos quadráticos na presença de atrasos variantes no tempo. O tratamento de atrasos não-constantes tem um impacto forte no projeto do preditor em termos da equação diferencial parcial associada ao atraso de transporte com velocidade de convecção variável assim como nas condições impostas considerando atrasos de duração arbitrária mas com taxas de variação limitada. Um novo projeto de preditor utilizando estimativas baseadas em perturbação para a Hessiana desconhecida do mapeamento é introduzido para acomodar a natureza variável do atraso, que pode surgir tanto nos sinais de atuação (entrada) quanto de medição (saída). A estabilidade exponencial local do sistema em malha fechada e a convergência assintótica para uma vizinhança pequena do ponto de extremo desconhecido são rigorosamente demonstradas. Esse resultado é alcançado utilizando-se a transformação backstepping e a teoria de averaging para sistemas de dimensão infinita. Simulações numéricas são apresentadas para ilustrar a efetividade do controlador extremal baseado em preditores para compensação de atrasos variantes no tempo.

Palavras-chave— Busca extremal, Controle adaptativo, Atrasos, Backstepping, Teoria da média, Sistemas de dimensão infinita

## 1 Introdução

Controle extremal, ou simplesmente busca extremal (Extremum Seeking - ES), é um método de controle adaptativo que não se enquadra no paradigma clássico baseado em modelo, onde o problema de se estabilizar o erro entre alguma trajetória de referência e a saída medida da planta com parametrização conhecida é geralmente considerado. A busca extremal é uma abordagem de otimização em tempo real que não requer qualquer conhecimento explícito da dinâmica da planta ou do mapa estático a ser otimizado, visto que apenas o conhecimento da existência de pelo menos um único ponto de extremo (máximo ou mínimo) é assumido (Krstić and Wang, 2000). Utilizando-se perturbações senoidais (dithers), a estimação do gradiente e da Hessiana do mapeamento não-linear são obtidos tal que a convergência para o ponto de extremo desconhecido assim como a prova de estabilidade local do sistema em malha fechada possam ser garantidas.

Durante os últimos anos, tem havido um número muito grande de contribuições teóricas assim como diversas aplicações considerando ES (Ghaffari et al., 2012), (Frihauf et al., 2013), (Nešić, 2009), (Khong et al., 2013), (Tan et al., 2008), (Titica et al., 2003), (Ren et al., 2012), para citar alguns. Entretanto, na maioria das áreas de engenharia, os sinais dos sensores e atuadores estão contaminados ou suscetíveis à atraso. Dependendo do cenário, esses atrasos podem ser: pequenos/grandes, constantes/variáveis, determinísticos/estocásticos ou conhecidos/desconhecidos

(Krstic, 2009), (Bekiaris-Liberis and Krstic, 2013), (Bresch-Pietri and Petit, 2014).

Em (Oliveira and Krstić, 2015a), foi mostrado que um pequeno atraso constante poderia instabilizar o sistema realimentado utilizando-se o método de ES do tipo gradiente (escalar) convencional. Nesta mesma publicação uma solução para o problema foi dada tomando-se duas medidas: (a) a compensação do atraso nos sinais de dither aditivo ou multiplicativo; e (b) a inclusão na malha do ES de um preditor utilizando uma estimativa (baseada nos sinais médios) para a Hessiana desconhecida do mapeamento de interesse. Posteriormente, generalizações foram realizadas para: o método mais rápido de ES do tipo Newton (Oliveira and Krstić, 2015b), a maximização da sensibilidade do mapeamento e suas derivadas (Rušiti et al., 2016), o caso multivariável de ES com atrasos de saída (ou mesmo atraso nos diferentes canais de entrada) (Oliveira et al., 2015) e o caso multivariável sujeito à múltiplos e distintos atrasos de entrada (Oliveira et al., 2017). Toda a fundamentação teórica criada nestas referências foi construída assumindo-se que os atrasos eram conhecidos e constantes.

A contribuição deste artigo é estender os nossos resultados prévios de buscal extremal baseada em preditores para incluir *atrasos variantes no tempo*, obtendo-se resultados originais com respeito a literatura existente e melhorando o desempenho de sistemas de controle extremal sob uma classe mais ampla de atrasos no tempo. Todos os passos necessários são produzidos para provar a estabilidade de mapeamentos localmente quadráticos através da transformação *backstepping* (Krstic, 2009) e da teoria da média (*averaging*) em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002), considerando o sistema completo que é infinito-dimensional devido ao atraso. Uma discussão criteriosa considerando a aplicabilidade de resultados anteriores para *averaging* em equações diferenciais funcionais (*functional differential equations* – FDEs) também é preparada, identificandose limitações e possíveis obstáculos no caso de atrasos não-constantes. Por fim, resultados de simulação validam a aplicabilidade do algoritmo de ES proposto.

### 2 Preliminares

A norma  $L_2$  de um vetor de estado X(t) de dimensão finita de uma equação diferencial ordinária (EDO) é denotada por barras simples, |X(t)|. Em contraste, as normas de funções espaciais (de x) são denotadas por barras duplas. Por padrão,  $\|\cdot\|$  denota a norma espacial  $L_2[0,D]$ , *i.e.*,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2[0,D]}$ . Como a variável de estado u(x,t) da equação diferencial parcial (EDP) é uma função de dois argumentos, deve-se dar ênfase que levando em conta a norma de uma das variáveis faz-se à norma uma função da outra variável, como adotado em (Krstic, 2009). Por exemplo, a norma  $L_2[0,D]$  de u(x,t) em  $x \in [0,D]$  é ||u(t)|| = $\left(\int_0^D u^2(x,t)dx\right)^{1/2}$ . As derivadas parciais de u(x,t)são denotadas por  $u_t(x,t)$  e  $u_x(x,t)$  ou, ocasionalmente, por  $\partial_t u_{\rm av}(x,t)$  e  $\partial_x u_{\rm av}(x,t)$  para se referir ao operador do seu sinal médio  $u_{av}(x,t)$ .

Agora, considerando um sistema não linear genérico  $\dot{x}=f(t,x,\varepsilon)$ , onde  $x\in\mathbb{R}^n$ ,  $f(t,x,\varepsilon)$  é periódico em t com período T, isto é,  $f(t+T,x,\varepsilon)=f(t,x,\varepsilon)$ . Então, para  $\varepsilon>0$  suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por  $\dot{x}_{\rm av}=f_{\rm av}(x_{\rm av})$ , com  $f_{\rm av}(x)=\frac{1}{T}\int_0^T f(\tau,x_{\rm av},0)d\tau$ , onde  $x_{\rm av}(t)$  denota a versão média do estado x(t) (Khalil, 2002).

Como definido em (Khalil, 2002), uma função vetorial  $f(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}^n$  é dita de ordem  $\mathscr{O}(\varepsilon)$  dentro do intervalo  $[t_1,t_2]$  se existem constantes positivas k e  $\varepsilon^*$  tais que  $|f(t,\varepsilon)| \leq k\varepsilon \quad \forall \varepsilon \in [0,\varepsilon^*]$  e  $\forall t \in [t_1,t_2]$ . Em alguns casos seremos capazes de fornecer estimativas para as constantes k e  $\varepsilon^*$  e portanto quantificar a correspondente aproximação  $\mathscr{O}(\varepsilon)$ . Caso contrário, estaremos satisfeitos por  $\mathscr{O}(\varepsilon)$  sendo uma "ordem da relação de magnitude", válida para " $\varepsilon$  suficientemente pequeno".

## 3 Formulação do Problema

O controle por busca extremal escalar considera aplicações em que o objetivo é maximizar (ou minimizar) a saída  $y \in \mathbb{R}$  de um mapeamento estático não-linear desconhecido  $Q(\theta)$  fazendo-se variar a entrada  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Aqui, adicionalmente assumimos que existem atrasos variantes no tempo e conhecidos  $D(t) \geq 0$  no caminho de atuação ou medição do sistema de tal

modo que a saída medida é dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t - D(t))). \tag{1}$$

Para maior clareza de notação, será suposto que o nosso sistema tem atraso apenas de saída conforme o diagrama de blocos da Figura 1. No entanto, os resultados deste trabalho podem ser diretamente estendidos para o caso de atrasos de entrada, uma vez que qualquer atraso de entrada pode ser movido para a saída do mapeamento estático.

Quando os atrasos de entrada  $D_{in}(t)$  e os atrasos de saída  $D_{out}(t)$  ocorrem simultaneamente, estes também podem ser manipulados assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado será  $D(t) = D_{in}(t) + D_{out}(t)$ , com  $D_{in}(t)$ ,  $D_{out}(t) \ge 0$ .

## 3.1 Mapeamentos Localmente Quadráticos

Sem perda de generalidade, considera-se o problema de busca por um máximo  $y^*$  que é atingido quando  $\theta$  é feito igual a  $\theta^*$ . Por uma questão de simplicidade, assume-se que o mapeamento não-linear é ao menos localmente quadrático na vizinhança de  $\theta^*$ , isto é,

$$Q(\theta) = y^* + \frac{H}{2}(\theta - \theta^*)^2,$$
 (2)

onde as constantes  $\theta^* \in \mathbb{R}$  e  $y^* \in \mathbb{R}$  são desconhecidas e o escalar H < 0 é a Hessiana. Aplicando-se (2) em (1), obtém-se o *mapeamento quadrático estático com atraso variante no tempo* de interesse:

$$y(t) = y^* + \frac{H}{2}(\theta(t - D(t)) - \theta^*)^2.$$
 (3)

# 3.2 Condições sobre o Atraso Variante no Tempo

Para um melhor entendimento, a seguir estão as *hipóteses básicas* sobre o atraso variante no tempo considerando:

- (a) A função de atraso D(t) é estritamente positiva (condição técnica que garante que o espaço de estados da dinâmica de entrada pode ser definido);
- (**b**) A função de atraso D(t) é uniformemente limitada por cima;
- (c) A variável do atraso  $\dot{D}(t)$  é estritamente menor do que 1, isto é, o atraso pode aumentar a uma taxa inferior a 1;
- (d) A taxa de variação do atraso  $\dot{D}(t)$  é uniformemente limitada por baixo (por uma constante finita possivelmente negativa), isto é, o atraso pode diminuir a uma taxa uniformemente limitada;
- (e) A função de atraso D(t) não é periódica em  $\Pi=\frac{2\pi}{\varpi}$  tal que  $D_{\rm av}(t)=D(t)$ .

A partir das funções continuamente diferenciáveis do *tempo de atraso*  $\phi(t)$  e do *tempo de predição*  $\phi^{-1}(t)$ , definidas como

$$\phi(t) := t - D(t),\tag{4}$$

$$\phi^{-1}(t) := t + D(t), \tag{5}$$

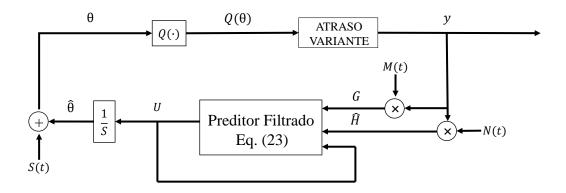


Figura 1: Diagrama de blocos básico do sistema de controle extremal com atrasos variantes no tempo.

e satisfazendo as condições

$$\phi(t) \le t$$
,  $\frac{d}{dt}\phi(t) \ge 0$ ,  $t \ge 0$ , (6)

podemos assumir a seguinte hipótese.

Hipótese 1: O atraso de saída variante no tempo D(t) satisfaz

$$-\infty < \underline{d} < \dot{D}(t) < \overline{d} < 1, \tag{7}$$

onde d e  $\overline{d}$  são constantes.

Isto é uma consequência direta de (4) e (5). Além disso, da *Hipótese 1* conclui-se que  $\phi(t)$  é estritamente crescente. Note que  $\phi^{-1}(t)$  é a função inversa de  $\phi(t)$ .

### 3.3 Sinais do Sistema

Seja  $\hat{\theta}$  a estimativa de  $\theta^*$  e

$$\tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta^* \tag{8}$$

o *erro de estimativa*. Da Figura 1, a *dinâmica do erro* pode ser escrita como

$$\tilde{\theta}(t - D(t)) = U(t - D(t)). \tag{9}$$

Adicionalmente,

$$G(t) = M(t)y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(t), \quad (10)$$

onde os sinais de perturbação periódica são dados por

$$S(t) = a\sin(\omega(t+D(t))), \quad M(t) = \frac{2}{a}\sin(\omega t), \quad (11)$$

com pertubações diferentes de zero, amplitudes dependentes de a e com frequência  $\omega$ .

O sinal

$$\hat{H}(t) = N(t)y(t) \tag{12}$$

é aplicado para obter a estimativa da Hessiana H, onde o sinal de demodulação N(t) é dado por

$$N(t) = -\frac{8}{a^2}\cos(2\omega t). \tag{13}$$

Em (Ghaffari et al., 2012), foi provado que

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma) y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega, \tag{14}$$

se o mapeamento quadrático como em (2) for considerado. Em outras palavras, sua versão média é  $\hat{H}_{av} = (Ny)_{av} = H$ .

#### 4 Preditor com estimativa de Hessiana

Usando a análise da média, podemos verificar que a versão média do sinal G(t) em (10) é dada por

$$G_{\rm av}(t) = H\tilde{\theta}_{\rm av}(t - D(t)). \tag{15}$$

De (9), as seguintes equações podem ser obtidas

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t - D(t)) = U_{av}(t - D(t)), \qquad (16)$$

$$\dot{G}_{\rm av}(t) = HU_{\rm av}(t - D(t)), \qquad (17)$$

onde  $U_{\mathrm{av}} \in \mathbb{R}$  é o resultado do controle médio para  $U \in \mathbb{R}$ .

A ideia básica é compensar o atraso por realimentação do estado futuro G(t+D(t)), ou  $G_{\rm av}(t+D(t))$  no sistema médio equivalente. Dado qualquer ganho estabilizante k>0 para o sistema sem atraso, desejase ter uma lei de controle

$$U_{\text{av}}(t) = kG_{\text{av}}(t + D(t)), \quad \forall t \ge 0, \tag{18}$$

que utiliza valores futuros do estado. Entretanto, aplicando a fórmula de variação das constantes para (17) pode-se expressar o estado futuro como

$$G_{\text{av}}(t+D(t)) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^{t} \frac{U_{\text{av}}(\sigma)}{\phi'(\phi^{-1}(\sigma))} d\sigma,$$
 (19)

em termos do sinal de controle médio  $U_{\rm av}$  na janela passada [t-D(t),t]. Isso resulta na seguinte lei de realimentação,  $\forall t \geq 0$ :

$$U_{\rm av}(t) = k \left[ G_{\rm av}(t) + H \int_{t-D(t)}^{t} \frac{U_{\rm av}(\sigma)}{\phi'(\phi^{-1}(\sigma))} d\sigma \right], (20)$$

onde  $\phi'(\cdot)$  denota a derivada de  $\phi(\cdot)$ .

Por isso, de (19) e (20), a lei de realimentação (18) pode ser obtida e consequentemente,

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t) = kG_{av}(t + D(t)), \quad \forall t \ge 0.$$
 (21)

Portanto, de (15), tém-se

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\theta}_{\mathrm{av}}(t)}{\mathrm{d}t} = kH\tilde{\theta}_{\mathrm{av}}(t), \quad \forall t \ge D(t), \tag{22}$$

com um equilíbrio  $\tilde{\theta}_{\rm av}^e = 0$  exponencialmente atrativo, desde que k > 0 no projeto da lei de controle e H < 0 por hipótese.

Na próxima seção, será mostrado que o objetivo do controle é também alcançado com a seguinte versão filtrada do preditor (Krstic, 2008) com dimensão infinita e estimativas baseadas na média dos sinais:

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D(t)}^{t} \frac{U(\sigma)}{\phi'(\phi^{-1}(\sigma))} d\sigma \right] \right\}, \tag{23}$$

onde c>0 é suficientemente grande. Esta filtragem passa-baixas no preditor (23) é particularmente necessária na análise de estabilidade quando o teorema da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990) é invocado. O preditor (23) é baseado na média porque  $\hat{H}(t)$  é atualizado de acordo com a estimativa (12) da Hessiana H, usando a propriedade da média (14).

# 5 Implementação / Aproximação Numérica do Preditor para Atrasos Variantes no Tempo

Aparentemente é difícil implementar numericamente o preditor (23). Assim, no que segue mostraremos dois métodos para simplificar essa implementação.

## 5.1 Primeiro Método

Considerando as equações (17) e (4) podemos escrever

$$\dot{G}_{\rm av}(t) = HU_{\rm av}(\phi(t)). \tag{24}$$

Além disso, pode-se definir a predição do estado no momento quando o controle atual terá um efeito sobre o estado

$$P_{\rm av}(t) = G_{\rm av}(t + D(\tau(t))),$$
 (25)

onde o tempo de predição é definido como

$$\tau(t) = t + D(\tau(t)). \tag{26}$$

Agora, para utilizarmos (26) em vez de t, em (24) obtém-se

$$\dot{G}_{\rm av}(\tau(t)) = HU_{\rm av}(t),\tag{27}$$

e reescrevendo (27) chega-se em:

$$\frac{dG_{\rm av}(\tau(t))}{dt} = HU_{\rm av}(t)\frac{d\tau(t)}{dt}.$$
 (28)

Além disso, derivando-se a equação (26), encontramos

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = 1 + D'(\tau(t))\frac{d\tau(t)}{dt},\tag{29}$$

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{1}{1 - D'(\tau(t))}. (30)$$

Então, (25) pode ser reescrito como

$$\frac{dP_{\rm av}(t)}{dt} = HU_{\rm av}(t) \frac{1}{1 - D'(\tau(t))}.$$
 (31)

Integrando-se (29) e (31) para todo  $t - D(t) \le \xi \le t$ , obtém-se o seguinte preditor (Bekiaris-Liberis and Krstic, 2013)

$$P_{\text{av}}(t) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^{t} U_{\text{av}}(\xi) \frac{1}{1-D'(\sigma(\xi))} d\xi,$$
 (32)

$$\tau(t) = t + \int_{t-D(t)}^{t} \frac{1}{1 - D'(\tau(\xi))} d\xi.$$
 (33)

Finalmente, a lei de controle do preditor é dada por

$$U(t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_{t-D(t)}^{t} U(\xi) \frac{1}{1-D'(\tau(\xi))} d\xi \right] \right\}.$$
(34)

Através da regra de integração ponto a ponto podemos calcular (34) numericamente, como descrito a seguir.

Computação do sinal preditor: Ao simular o controlador baseado no preditor (32)-(34), para cada passo de tempo discretizado a ODE (equação diferencial ordinária) do sistema (24) deve ser resolvida (usando, por exemplo, o método de Euler) e o tamanho do atraso deve ser computado (como a parte inteira de  $N(i) = \frac{D(i)}{\rho}$ , denominado  $\overline{N}(i)$ , onde  $\rho$  é o passo de tempo). O preditor é então calculado integrando-se simultaneamente as duas relações integrais (32) e (33) para cada passo de tempo, usando um esquema de integração numérica. Por exemplo, com a regra de integração, tem-se

$$P(i) = G(i) + \rho \hat{H}(i) \sum_{k=i-\overline{N}(i)}^{i-1} U(k) \frac{1}{1 - D'(\tau(k))}, \quad (35)$$

$$\tau(i) = i + \rho \sum_{k=i-\overline{N}(i)}^{i-1} \frac{1}{1 - D'(\tau(k))}.$$
 (36)

## 5.2 Segundo Método

Em (Bresch-Pietri and Petit, 2014) considera-se o seguinte preditor

$$U_{\text{av}}(t) = k \left[ G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^{t} U_{\text{av}}(s) ds \right], \qquad (37)$$

para sistemas do tipo  $\dot{G}_{av} = HU_{av}(t - D(t))$ , onde H foi originalmente assumido constante.

Observe que este controlador (37) não corresponde exatamente ao estado do sistema predito em um horizonte de tempo D(t). De fato, usando a fórmula de variação das constantes, tém-se  $\forall t \geq 0$ :

$$G_{\text{av}}(t+D(t)) = G_{\text{av}}(t) + H \int_{t-D(t)}^{t} U_{\text{av}}(s+D(t)-D(s)) ds.$$
 (38)

No entanto, a integral nesta predição pode não ser implementável porque não é necessariamente causal (em detalhes, este é o caso quando existe  $s \in [t-D(t),t]$  de tal modo que  $s-D(s) \ge t-D(t)$ , isto é, quando o atraso D(t) é repentinamente grande e o sinal recebido no tempo t é mais antigo do que os recebidos anteriormente) enquanto o empregado em (37) sempre será causal.

Além disso, mesmo que pudéssemos implementar esta predição, a integral envolvida poderia ser aproximada pela usada em (37) se  $D(t)-D(s)\approx 0$  para a maior parte do tempo t, isto é, sob o pressuposto de que as variações do atraso  $\dot{D}(t)$  são suficientemente pequenas na média. Como esta suposição é a que é requerida no nosso teorema principal para compensar fortemente o atraso, nós preferimos utilizar a forma de predição (37), que é sempre causal e mais fácil de implementar.

A implementação do preditor proposto, inicia-se por dividir a integral (37) em duas partes, conforme a equação a seguir

$$\int_{t-D(t)}^{t} U_{\text{av}}(s)ds = \int_{t-D(t)}^{0} U_{\text{av}}(s)ds + \int_{0}^{t} U_{\text{av}}(s)ds,$$

$$\int_{t-D(t)}^{t} U_{\text{av}}(s)ds = -\int_{0}^{t-D(t)} U_{\text{av}}(s)ds + \int_{0}^{t} U_{\text{av}}(s)ds.$$
(40)

Resolvendo para integral a seguir

$$\int_0^{t-D(t)} U_{\rm av}(s) ds,\tag{41}$$

levando-se em conta,

$$s = t - D(t), \tag{42}$$

$$ds = dt - \dot{D}dt, \tag{43}$$

obtém-se t = D(t) para s = 0 e t = t para s = t - D(t). Substituindo-se as condições acima, nos limites de integração da equação (41), teremos

$$\int_{D(t)}^{t} U_{\text{av}}(t - D(t)) \left[ dt - \dot{D}dt \right]$$
 (44)

$$= \int_{D(t)}^{t} (1 - \dot{D}) U_{\text{av}}(t - D(t)) dt$$
 (45)

$$= \int_{0}^{t} (1 - \dot{D}) U_{\text{av}}(t - D(t)) dt, \tag{46}$$

sendo válido se as condições  $\dot{D} \le 1$  e  $1 - \dot{D} \ge 0$  forem satisfeitas e considerando que

$$U_{\text{av}}(t - D(t)) = 0 \quad t \in [0, D(t)].$$
 (47)

Assim sendo, a versão não-média (37) poderia ser reescrita como:

$$U(t) = K \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_0^t (1 - \dot{D}(\sigma)) U(\sigma - D(\sigma)) d\sigma \right]. \tag{48}$$

Deste modo, em vez de implementarmos (23), poderíamos simplesmente adotar a versão filtrada de (48).

### 6 Análise de Estabilidade

Introduzindo uma escolha não-óbvia para o estado da equação de transporte (Krstic, 2009, Capítulo 6)

$$u(x,t) = U(\phi(t + x(\phi^{-1}(t) - t))), \tag{49}$$

tém-se os seguintes valores nas condições de contorno

$$u(0,t) = U(\phi(t)), \tag{50}$$

$$u(1,t) = U(t). \tag{51}$$

Isso resulta no seguinte sistema

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}\left(t-D\right) = u\left(0,t\right),\tag{52}$$

$$u_t(x,t) = \pi(x,t) u_x(x,t), \quad x \in [0,1],$$
 (53)

$$u(1,t) = U(t), \tag{54}$$

onde a velocidade de propagação da equação de transporte é dada por

$$\pi(x,t) = \frac{1 + x \left(\frac{d(\phi^{-1}(t))}{dt} - 1\right)}{\phi^{-1}(t) - t}.$$
 (55)

A equação (55) é obtida simplesmente calculando-se  $\frac{u_t(x,t)}{u_x(x,t)}$  considerando u(x,t) em (49). Assim sendo, podemos assumir a seguinte condição.

<u>Hipótese 2</u>: A função (55) é estritamente positiva e uniformemente limitada por cima e por baixo por constantes finitas. Adicionalmente, assume-se  $\pi(x,t)$  não-periódico em  $\Pi = 2\pi/\omega$ , então pode-se concluir que  $\pi_{\rm av}(x,t) = \pi(x,t)$ .

Além disso, têm-se

$$\pi(0,t) = \frac{1}{\phi^{-1}(t) - t} \ge \pi_0^*,\tag{56}$$

onde

$$\pi_0 = \frac{1}{\sup_{\delta \ge \phi^{-1}(0)} (\delta - \phi(\delta))}.$$
 (57)

Dessa forma, pode-se escrever ainda

$$\phi^{-1}(t) - t > 0, \tag{58}$$

o que implica que a função do *tempo de atraso* (4) e do *tempo de predição* (5) são positivas e uniformemente limitadas.

Agora, reescrevendo a lei de controle (23) em termos de u(x,t) tém-se

$$u(1,t) = \frac{c}{s+c} \left\{ k \left[ G(t) + \hat{H}(t) \int_0^1 u(\sigma,t) (\phi^{-1}(t) - t) d\sigma \right] \right\}. \tag{59}$$

Além disso, assumindo-se a seguinte condição inicial

$$u_0(x) = u(x,0) = U(\phi(\phi^{-1}(0)x)), \quad x \in [0,1], \quad (60)$$

onde  $\tilde{\theta}_0 = \tilde{\theta}(-D(0))$  e utilizando a seguinte mudança de variáveis

$$\tilde{\vartheta}(t) = \tilde{\theta}(t - D(t)), \quad \tilde{\vartheta}_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D(t)), \quad (61)$$

a versão média do sistema (52) - (54) pode ser escrita como

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0,t), \tag{62}$$

$$\partial_t u_{\rm av}(x,t) = \pi(x,t)\partial_x u_{\rm av}(x,t),$$
 (63)

$$u_{\rm av}(1,t) = U_{\rm av}(t), \tag{64}$$

ou ainda

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = u_{av}(0,t), \tag{65}$$

$$\partial_t u_{\text{av}}(x,t) = \pi(x,t)\partial_x u_{\text{av}}(x,t), \quad x \in [0,1], \tag{66}$$

 $\frac{du_{\rm av}(1,t)}{dt} = -cu_{\rm av}(1,t)$ 

Deste modo, o seguinte resultado para o sistema médio pode ser enunciado.

**Teorema 1:** Considere o sistema em malha fechada que consiste na planta (62)-(64) e o controlador (59) e que a *Hipóteses 1 e 2* sejam asseguradas. Existem constantes positivas  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\mu$  (independentes de  $\phi$ ) tal que o sistema em malha fechada (62)-(64) é localmente exponencialmente estável e todas as soluções satisfazem,  $\forall t \geq 0$ :

$$\left[ \left| \tilde{\theta}_{av}(\phi(t)) \right|^{2} + \left[ U_{av}(t) \right]^{2} + \int_{\phi(t)}^{t} U_{av}^{2}(\xi) d\xi \right] \leq \frac{\alpha_{1}}{\alpha_{2}} e^{-\mu t} \left[ \left| \tilde{\theta}_{av}(\phi(0)) \right|^{2} + \left[ U_{av}(0) \right]^{2} + \int_{\phi(0)}^{0} U_{av}^{2}(\xi) d\xi \right] (68)$$

Prova: Considere a transformação backstepping

$$w(x,t) = u_{\text{av}}(x,t)$$
$$-kH \left[ \tilde{\vartheta}_{\text{av}}(t) + \int_0^x u_{\text{av}}(\sigma,t) \left( \phi^{-1}(t) - t \right) d\sigma \right] \quad (69)$$

que mapeia o sistema (65)-(68) no sistema alvo

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_{av}(t) = kH\,\tilde{\vartheta}_{av}(t) + w(0,t),$$
 (70)

$$w_t(x,t) = \pi(x,t)w_x(x,t), \quad x \in [0,1],$$
 (71)

$$w(1,t) = -\frac{1}{c}\partial_t u_{\text{av}}(1,t). \tag{72}$$

O sistema (70)-(72) é a configuração em cascata

$$w \to \tilde{\vartheta}_{av}$$
. (73)

Considere agora w(1,t). É fácil perceber que

$$w_t(1,t) = \partial_t u_{\text{av}}(1,t) - kHu_{\text{av}}(1,t),$$
 (74)

onde  $\partial_t u_{av}(1,t) = \dot{U}_{av}(t)$ . O inverso de (69) é dado por

$$u_{\text{av}}(x,t) = w(x,t) + kHe^{kHx(\phi^{-1}(t)-t)}\tilde{\mathfrak{D}}_{\text{av}}(t) + kH\int_{0}^{x} e^{kH(x-\sigma)(\phi^{-1}(t)-t)}u_{\text{av}}(\sigma,t)(\phi^{-1}(t)-t)d\sigma.$$
(75)

Substituindo-se (72) e (75) em (74), obtém-se  $w_t(1,t) = -cw(1,t) - kHw(1,t) - k^2H^2e^{kH(\phi^{-1}(t)-t)}\tilde{\vartheta}_{av} - k^2H^2\int_0^1 e^{kH(1-\sigma)(\phi^{-1}(t)-t)}u_{av}(\sigma,t)(\phi^{-1}(t)-t)d\sigma.$ (76)

Considere o seguinte funcional de Lyapunov-Krasovskii

$$V(t) = \frac{\tilde{\mathfrak{D}}_{av}^2(t)}{2} + \frac{a}{2} \int_0^1 (1+x)w^2(x,t)dx + \frac{1}{2}w^2(1,t), (77)$$

onde o parâmetro a > 0 será escolhido posteriormente.

A partir da *Hipótese 1*, o termo de velocidade de propagação satisfaz  $0 < \pi(x,t) < \bar{\Pi}$ , onde  $\bar{\Pi}$  é uma constante positiva. Assim sendo, tém-se

$$\dot{V}(t) \leq kH\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0,t) 
+ \frac{a\bar{\Pi}}{2} \int_{0}^{1} (1+x)2w(x,t)w_{t}(x,t)dx 
+ w(1,t)w_{t}(1,t) 
\leq kH\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t) + \tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0,t) + a\bar{\Pi}w^{2}(1,t) 
- \frac{a\bar{\Pi}}{2}w^{2}(0,t) - \frac{a\bar{\Pi}}{2} \int_{0}^{1} w^{2}(x,t)dx 
+ w(1,t)w_{t}(1,t)$$
(78)

Desenvolvendo a desigualdade de Young

$$\tilde{\vartheta}_{av}(t)w(0,t) \leq \left|\tilde{\vartheta}_{av}(t)\right| \left|w(0,t)\right|, \tag{79}$$

$$\leq \frac{\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t)}{2a\overline{\Pi}} + \frac{a\overline{\Pi}w^{2}(0,t)}{2} \tag{80}$$

$$\leq \frac{-kH\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t)}{2} + \frac{a\overline{\Pi}w^{2}(0,t)}{2} \tag{81}$$

Relembrando que k > 0 e H < 0, escolhe-se

$$a = -\frac{1}{kH\bar{\Pi}},\tag{82}$$

e aplicando a desigualdade de Young no segundo termo do lado direito de (78), obtém-se:

$$\dot{V}(t) \leq kH\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t) - kH\frac{\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t)}{2} - \frac{a\bar{\Pi}}{2} \int_{0}^{1} w^{2}(x,t)dx 
+ w(1,t) \left[ w_{t}(1,t) + a\bar{\Pi}w(1,t) \right] 
\leq -\frac{1}{2a\bar{\Pi}}\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t) - \frac{a\bar{\Pi}}{2} \int_{0}^{1} w^{2}(x,t)dx 
+ w(1,t) \left[ w_{t}(1,t) + a\bar{\Pi}w(1,t) \right].$$
(83)

Agora, considere (78) juntamente com (76). Completando-se os quadrados e usando as desigualdades de Cauchy-Schwartz e Young para escrevermos  $|w(1,t)| \left\| k^2 H^2 e^{kH(1-\sigma)} \right\| \|w(t)\| \leq \frac{a\bar{\Pi}}{4} \|w(t)\|^2 + \frac{1}{a\bar{\Pi}} \left\| k^2 H^2 e^{kH(1-\sigma)} \right\|^2 w^2(1,t)$ , obtém-se

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4a\bar{\Pi}}\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t) - \frac{a\bar{\Pi}}{4} \int_{0}^{1} w^{2}(x,t)dx 
+ a\bar{\Pi} \left| k^{2}H^{2}e^{kH} \right|^{2} w^{2}(1,t) 
+ \frac{1}{a\bar{\Pi}} \left\| k^{2}H^{2}e^{kH(1-\sigma)} \right\|^{2} w^{2}(1,t) 
+ \left[ a\bar{\Pi} - kH \right] w^{2}(1,t) - cw^{2}(1,t). \tag{84}$$

De (83), chega-se a

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{4a\bar{\Pi}}\tilde{\vartheta}_{av}^{2}(t) - \frac{a\bar{\Pi}}{8} \int_{0}^{1} (1+x)w^{2}(x,t)dx - (c-c^{*})w^{2}(1,t), \tag{85}$$

onde

$$c^{*} = a\bar{\Pi} - kH + a\bar{\Pi} \left| k^{2}H^{2}e^{kH} \right|^{2} + \frac{1}{a\bar{\Pi}} \left\| K^{2}H^{2}e^{kH(1-\sigma)} \right\|^{2}.$$
 (86)

Consequentemente, de (85), se c é escolhido tal que  $c > c^*$ , obtém-se

$$\dot{V}(t) \le -\mu V(t),\tag{87}$$

para algum  $\mu > 0$ . Portanto, o sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido da norma completa

$$\left(\left|\tilde{\mathfrak{V}}_{\rm av}^2(t)\right|^2 + \int_0^1 w^2(x,t)dx + w^2(1,t)\right)^{1/2},\qquad(88)$$

isto é, nas variáveis transformadas  $(\vartheta_{av}, w)$ .

A partir de  $\left(\left|\tilde{\vartheta}_{\rm av}^2(t)\right|^2+\int_0^1u_{\rm av}^2(x,t)dx+u_{\rm av}^2(1,t)\right)^{1/2}$  obtém-se a estabilidade exponencial no sentido da norma  $L_2$  das variáveis originais  $\tilde{\theta}_{\rm av}$  e  $u_{\rm av}$ , e portanto será necessário mostrar que existe números positivos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tal que

$$\alpha_1 \Psi(t) \le V(t) \le \alpha_2 \Psi(t),$$
 (89)

onde  $\Psi(t) = \left|\tilde{\vartheta}_{av}^2(t)\right|^2 + \int_0^1 u_{av}^2(x,t) dx + u_{av}^2(1,t)$ , ou equivalentemente,

$$\Psi(t) = |\tilde{\theta}_{av}(t - D(t))|^2 + \int_{t - D(t)}^{t} U_{av}^2(\tau) d\tau + U_{av}^2(t).$$
(90)

Isso é fácil de se estabelecer usando (69),(75),(77) e empregando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, como na prova do Teorema 2.1 em (Krstic, 2009). Consequentemente, a partir de (87), obtém-se

$$\Psi(t) \le \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \tag{91}$$

que é equivalente à designaldade (68).

No Teorema 1 foi provado que o sistema da média em malha fechada (52) - (54) com a PDE de transporte para representação de atraso é também exponencialmente estável. Em (Oliveira and Krstić, 2015b) e (Oliveira et al., 2017) foram aplicados os resultados do Teorema da Média para atrasos constantes. Contudo, para atrasos variantes no tempo não existe nenhum teorema da média adequado, tal como (Hale and Lunel, 1990) e (Lehman, 2002). Se algum teorema da média compatível existisse, então seria possível estabelecer o seguinte resultado para atrasos variantes no tempo.

**Resultado:** Existe  $c^* > 0$  tal que,  $\forall c \geq c^*$ ,  $\exists w^*(c) > 0$  tal que,  $\forall \omega > \omega^*$ , o sistema em malha fechada atrasado (23) e (52), com G(t) em (15),

 $\tilde{\theta}(t-D(t)), U(\sigma), \ \forall \sigma \in [t-D(t),t], \ tem \ uma \ única solução periódica localmente exponencialmente estável em t no período <math>\Pi = 2\pi/\omega$ , denotado por  $\tilde{\theta}^\Pi(t-D(t)), U^\Pi(\sigma), \ \forall \sigma \in [t-D(t),t], \ satisfazendo, \ \forall t \geq 0$ :

$$\left(\left|\tilde{\mathbf{G}}^{\Pi}(t-D(t))\right|^{2} + \left[U^{\Pi}(t)\right]^{2} + \int_{t-D(t)}^{t} \left[U^{\Pi}(\tau)\right]^{2} d\tau\right)^{1/2} \leq \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right). \tag{92}$$

Além disso,

$$\limsup_{t \to +\infty} |\theta(t) - \theta^*| = \mathcal{O}(a + 1/\omega), \quad (93)$$

$$\limsup_{t \to +\infty} |y(t) - y^*| = \mathcal{O}(a^2 + 1/\omega^2). \quad (94)$$

A convergência assintótica para vizinhança do extremo no caso de atraso variante no tempo é análoga àquela apresentada em (Oliveira et al., 2017) para o caso de atraso constante, realizando-se pequenas alterações omitidas aqui (Veja Passo 8 da prova do Teorema 1).

## 7 Resultados de Simulação

Considere o mapeamento não-linear quadrático

$$Q(\theta) = 5 - 0.1(\theta - 2)^2 \tag{95}$$

que está subjeito à um atraso de saída  $D(t) = 2\sin(\omega_0 t) + D_0$  segundos, com  $\omega_0 = 0.1$  rad/s e  $D_0 = 5$ . De acordo com (95), o ponto de extremo é  $(\theta^*, y^*) = (2, 5)$  e a Hessiana do mapeamento estático é H = -0.2. A seguir, simulações númericas da estratégia de controle extremal proposta baseada no preditor (23) são apresentadas, onde  $\hat{H}$  é dado por (12) e c = 20. Os demais parâmetros foram escolhidos como: a = 0.2,  $\omega = 10.5$ , k = 0.2 e  $\theta(0) = -5$ .

Na Figura 2, o sinal de saída y(t) é mostrado convergindo para  $y^*=5$ . A Figura 3 apresenta a estimativa  $\hat{H}(t)$  da Hessiana desconhecida H. Finalmente, na Figura 4 temos o comportamento cosenoidal do atraso variante no tempo considerado, e o correspondente perfil de sua derivada  $\dot{D}(t)=-0.2\sin(0.1t)$  na Figura 5, satisfazendo a Hipótese~1.

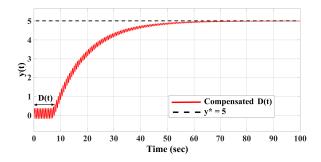


Figura 2: Saída y(t) na presença do atraso  $D(t) = 2\cos(0.1t) + 5$  seg, utilizando a compensação por preditor para atrasos variantes no tempo dada em (23).

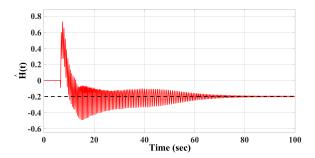


Figura 3: Convergência da estimativa  $\hat{H}(t)$  para a Hessiana desconhecida H=-0.2.

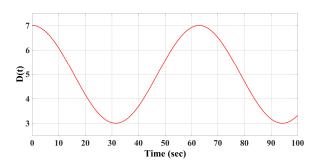


Figura 4: Atraso variante no tempo  $D(t) = 2\cos(0.1t) + 5$  em segundos.

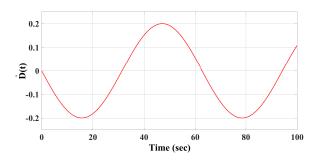


Figura 5: Derivada do atraso variante no tempo  $\dot{D}(t) = -0.2 \sin(0.1t)$ .

# 8 Conclusões

Neste artigo foi desenvolvido um novo projeto de preditor para o algoritmo de busca extremal do tipo gradiente de modo a compensar atrasos arbitrariamente longos e variantes no tempo no sinal de saída de um mapeamento escalar estático com parâmetros desconhecidos. A lei de controle de dimensão infinita é construída com uma estimativa para a Hessiana do mapeamento não-linear localmente quadrático, obtida a partir dos mesmos sinais de excitação periódica usualmente aplicados no controle extremal clássico. Foi apresentado o passo-a-passo da prova de convergência exponencial local para uma vizinhança pequena do ponto de extremo, utilizando-se como ferramentas de análise a transformação *backstepping* e a teoria de *averaging* para sistemas de dimensão infinita.

### Referências

- Bekiaris-Liberis, N. and Krstic, M. (2013). *Nonlinear control under nonconstant delays*, SIAM.
- Bresch-Pietri, D. and Petit, N. (2014). Robust compensation of a chattering time-varying input delay, *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 457–462.
- Frihauf, P., Krstić, M. and Basar, T. (2013). Finite-horizon LQ control for unknown discrete-time linear systems via extremum seeking, *European Journal of Control* **19**: 399–407.
- Ghaffari, A., Krstić, M. and Nesić, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking, *Automatica* **48**(8): 1759–1767.
- Hale, J. K. and Lunel, S. M. V. (1990). Averaging in infinite dimensions, *Journal of Integral Equations and Appli*cations 2: 463–494.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Khong, S. Z., Nesić, D., Tan, Y. and Manzie, C. (2013). Unified frameworks for sampled-data extremum seeking control: Global optimisation and multi-unit systems, *Automatica* 49(9): 2720–2733.
- Krstic, M. (2008). Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: inverse optimality and robustness to delay mismatch, *Automatica* **44**: 2930–2935.
- Krstic, M. (2009). Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems, *Birkhauser*.
- Krstić, M. and Wang, H. H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems, *Automatica* 36(4): 595–601.
- Lehman, B. (2002). The influence of delays when averaging slow and fast oscillating systems: overview., *IMA Journal of Mathematical Control & Information* **19**: 201–215.
- Nešić, D. (2009). Extremum seeking control: Convergence analysis, *European Journal of Control* **15**: 331–347.
- Oliveira, T. R. and Krstić, M. (2015a). Gradient extremum seeking with delays, *IFAC Workshop on Time Delay Systems* pp. 227–232.
- Oliveira, T. R. and Krstić, M. (2015b). Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays, *IFAC-PapersOnLine* **48**(12): 304–309.
- Oliveira, T. R., Krstić, M. and Tsubakino, D. (2015). Multiparameter extremum seeking with output delays, *American Control Conference* pp. 152–158.
- Oliveira, T. R., Krstić, M. and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(4): 1911–1926.
- Ren, B., Frihauf, P., Rafac, R. J. and Krstić, M. (2012). Laser pulse shaping via extremum seeking, *Control Engine-ering Practice* **20**(7): 674–683.
- Rušiti, D., Oliveira, T. R., Mills, G. and Krstić, M. (2016). Newton-based extremum seeking of higher derivatives for delay systems, *IEEE 55th Conference on Decision* and Control pp. 1249–1254.
- Tan, Y., Nesić, D. and Mareels, I. (2008). On the choice of dither in extremum seeking systems: A case study, *Automatica* **44**(5): 1446–1450.
- Titica, M., Dochain, D. and Guay, M. (2003). Adaptive extremum seeking control of fed-batch bioreactors, *European Journal of Control* **9**: 618–631.