

Controladores LQR-*gain scheduling* para sistemas LPV com incertezas politópicas

Rodrigo P. Caun* Edvaldo Assunção**
Marcelo C. M. Teixeira**

* *Coordenação de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, PR, (e-mail: rodrigocaun@utfpr.edu.br).*

** *Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, SP (e-mail: edvaldo.assuncao@unesp.br, marcelo.minhoto@unesp.br)*

Abstract: In this work we investigate the action of time-varying parametric uncertainties in all matrices of a linear time-continuous system and, therefore, a linear parameter-varying state feedback gain and quadratically stabilizing is proposed. The method is based on the Quadratic Linear Regulator (LQR) and can be seen as a simpler alternative to other conventional literature approaches via Parameter-Dependent Lyapunov Functions (PDLF), since the gain matrix is not dependent on the inversion of a literal matrix. The algorithm is based on relaxed LMI formulations of the LQR-based LPV problem in order to reduce the conservatism of the Common Quadratic Lyapunov function (CQLF). Finally, practical analyzes on active suspension illustrate the efficiency of the proposal in the presence of time-varying failures in actuators.

Resumo: Neste trabalho é investigado a ação de incertezas paramétricas variantes no tempo em todas as matrizes de um sistema linear contínuo no tempo e, portanto, um ganho de realimentação de estados linear variante com parâmetros (LPV) e quadraticamente estabilizante é proposto. O método é baseado no regulador linear quadrático (LQR) e pode ser visto como uma alternativa de projeto mais simples que outras abordagens convencionais da literatura via funções de Lyapunov dependentes de parâmetros (PDLF), pois a matriz de ganhos não depende da inversão de uma matriz literal. O algoritmo é baseado em formulações LMIs relaxadas do problema LPV-baseado no LQR, afim de reduzir o conservadorismo da função de Lyapunov quadrática comum (CQLF). Finalmente, análises práticas em uma suspensão ativa ilustram a eficiência da proposta na presença de falhas variantes no tempo em atuadores.

Keywords: LQR; LMI; LPV control; Common quadratic Lyapunov function; Structural failures; Active suspension.

Palavras-chaves: LQR; LMI; Controle LPV; Função de Lyapunov quadrática comum; Falhas estruturais; Suspensão ativa.

1. INTRODUÇÃO

O regulador linear quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* - LQR) é uma técnica *off-line* de regulação ótima que remonta suas influências desde a década de 1940 (Kalman (1960a,b)). Em linhas gerais, a lei de controle está associada a minimização de um critério quadrático, que utiliza funções de energia com respeito as variáveis de estado e controle, tal que a planta controlada seja uniformemente e assintoticamente estável (Das et al. (2015)). Mais recentemente, tem-se reconhecido a importância de aplicações a sistemas lineares com parâmetros incertos invariantes no tempo que, notoriamente, impulsionou o controle LQR com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs) à problemas de escala industrial (Ge et al. (2002); Ko et al. (2006); Koroishi et al. (2016); Fard and Aldeen (2016)).

Visto que o controle LQR-baseado em LMI (do inglês, LMI-based-LQR – LQR-LMI) não é um método recente,

existe na literatura científica uma linha (bem definida) de interesse à projetos de controladores robustos por estabilidade quadrática (veja, entre outros, Pakshin and Peaucelle (2009); Menhour et al. (2014); Niel et al. (2017); Almeida et al. (2017); Beteto et al. (2018)). Outro ponto de convergência entre as propostas é o uso de domínios politópicos à sistemas lineares invariantes no tempo (do inglês, *Linear Time-Invariant* - LTI). Por outro lado, o estudo da estabilização de sistemas mais gerais, i.e. lineares variantes com parâmetros (do inglês, *Linear Parameter-Varying* - LPV), por incertezas paramétricas invariantes no tempo e ganho estático, não garantem condições desejáveis de desempenho e estabilidade (Montagner et al. (2004)).

Uma alternativa é a síntese de controladores LQR com dependência afim de parâmetros, conhecido na literatura por LQR-*gain scheduling*. Atualmente, apenas alguns trabalhos discutem a formulação LMI do controlador LQR com ganho escalonado, os quais se dividem na escolha da classe da função de Lyapunov no cálculo da matriz de realimentação de estados, i.e.: (a) função de Lyapu-

nov quadrática comum (do inglês, *Common Quadratic Lyapunov Function* - CQLF) (Alcala et al. (2017, 2018, 2019); Trapiello et al. (2019)) e (b) função de Lyapunov dependente de parâmetros (*Parameter-Dependent Lyapunov Function* - PDLF) (Aktas et al. (2016); Liu et al. (2017)). É importante ressaltar que na proposição (b) o ganho de realimentação de estados depende da inversão da matriz de Lyapunov que é literal. Um problema intrínseco refere-se a complexidade de inversão desta matriz, que pode crescer em função da ordem do sistema (Wu (2001)). Neste contexto, a estabilidade quadrática pode ser mais interessante, dado que não há a inversão de uma matriz literal no cálculo do ganho escalonado, embora seja uma proposta muito conservadora. Outras aplicações do LQR-*gain scheduling* por realimentação da saída podem ser vistas em (Nikolakopoulos et al. (2005); Veselý and Ilka (2017)).

Neste trabalho, novas condições de estabilidade quadrática do controle LQR-*gain scheduling* são dadas na forma de LMIs. A novidade está na descrição do sistema em malha fechada, pois todas as matrizes pertencem ao conjunto de variáveis *scheduling* e, portanto, nossa proposta é vista como um caso mais geral das abordagens em literatura. Além disso, o conservadorismo da função de Lyapunov quadrática é reduzido pelo uso do Lema de Finsler ao custo do aumento das variáveis e linhas de LMIs. Por fim, o modelo de um quarto de carro da Quanser[®] é usado no estudo da suspensão ativa, tal que condições simuladas de falhas variantes no tempo no atuador atestam a eficiência da proposta.

O artigo está organizado da seguinte forma. A declaração do problema e uma breve revisão de sistemas LPV em domínios politópicos de incerteza são apresentados na Seção 2. Na Seção 3 são dadas condições LMIs suficientes para a existência de um controlador LQR-LPV por realimentação de estados. Na Seção 4, resultados práticos são obtidos pela implementação dos controladores no módulo de uma suspensão ativa e a conclusão na Seção 5 finaliza o trabalho.

A notação adotada neste artigo considera que para uma matriz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, X' denota a sua transposição, X^{-1} denota a sua inversão e $X > 0$ ($X \geq 0$) implica que X é (semi-) definida positiva. Considera-se, ainda, que 0 e I denotam matrizes de elementos nulos e identidade, respectivamente, com dimensões apropriadas. Note ainda que “*” representa termos inferidos da simetria.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte sistema linear com parâmetros variantes no tempo:

$$\dot{x}(t) = A(\varsigma(t))x(t) + B(\varsigma(t))u(t), \quad x(0), \quad (1a)$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}^{1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (1b)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ são, respectivamente, o estado, a entrada de controle e a saída regulada. O par $\{\mathcal{Q}, \mathcal{R}\}$ são matrizes de ponderação disponíveis. As matrizes $A(\varsigma(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $B(\varsigma(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ pertencem ao politopo Ω_P , na seguinte forma

$$\Omega_P = \left\{ [A(\varsigma(t)), B(\varsigma(t))] = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varsigma_i(t) [A_i, B_i], \varsigma(t) \in \Sigma \right\}, \quad (2a)$$

$$\Sigma = \left\{ \varsigma(t) \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \varsigma_i(t) = 1, \varsigma_i(t) \geq 0 \right\}, \quad (2b)$$

e, portanto, são parametrizadas em função do vetor de parâmetros variantes no tempo $\varsigma(t)$, $\forall t \geq 0$. O projeto do LQR-*gain scheduling* para o problema tratado aqui pode ser resumido por:

Problema 1. Para um dado estado inicial $x(0)$, projete uma lei de controle de realimentação de estados dependente de parâmetros ($u(t) = -K(\varsigma(t))x(t)$) que (a) estabilize o sistema (1) e (b) minimize um limitante superior μ para o índice de desempenho quadrático,

$$\mathcal{J}_\infty = \max_{\varsigma(t) \in \Sigma} \int_0^\infty \{x(t)' \mathcal{Q} x(t) + u(t)' \mathcal{R} u(t)\} dt < \mu, \quad (3)$$

com $\mathcal{Q} > 0$ e $\mathcal{R} > 0$ de dimensões apropriadas.

3. RESULTADO PRINCIPAL

Nesta seção é proposto o estudo do problema de estabilização quadrática por ganho escalonado, como discutido por (Montagner et al. (2004)). É importante enfatizar que esta proposta é considerada mais conservadora em relação aos resultados de (Montagner and Peres (2004)), em que o ganho de realimentação de estados depende da inversão da matriz de Lyapunov dependente de parâmetros, que é literal. Entretanto, um problema intrínseco de (Montagner and Peres (2004)) refere-se a complexidade de inversão desta matriz de Lyapunov, que pode crescer em função da ordem do sistema (Wu (2001)). Portanto, no próximo teorema nós propomos um ganho de realimentação de estados LPV quadraticamente estabilizante, que representa uma alternativa mais simples de projeto em relação a (Montagner and Peres (2004)). A técnica é baseada no controle LMI do problema LQR discutido em (Caun et al. (2018)). As restrições LMIs escolhidas são derivadas da formulação pelo Lema de Finsler, afim de diminuir o conservadorismo do uso da função de Lyapunov quadrática comum.

Teorema 1. Considere o sistema (1).

- (a) **Otimização.** Assuma que para uma dado estado fixo $x(0)$ exista um custo garantido inferior a μ e taxa de decaimento maior ou igual a α , se para um dado $b > 0$, existirem matrizes $Y \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Z_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $\mathcal{W} = \mathcal{W}' > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que, para todo $i = 1, \dots, \mathcal{N}$, as seguintes LMIs são verificadas

$$\begin{aligned} & \min_{\mu, \mathcal{W}, Z_i, Y} \mu \\ & \text{Sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} A_i Y + Y' A_i' + B_i Z_i + Z_i' B_i' + 2\alpha \mathcal{W} \\ \mathcal{W} - Y' + b A_i Y + b B_i Z_i \\ Y \\ Z_i \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} * & * & * \\ -bY - bY' & * & * \\ 0 & -\mathcal{Q}^{-1} & * \\ 0 & 0 & -\mathcal{R}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (4)$$

Por simplicidade, os termos simétricos e demais elementos serão omitidos, pois são repetições das formulações expostas. Logo, a desigualdade (16) é alcançada.

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} A(\zeta)Y + Y'A(\zeta)' + \\ B(\zeta)Z(\zeta) + Z(\zeta)'B(\zeta)' + 2\alpha W \\ W - Y' + bA(\zeta)Y + bB(\zeta)Z(\zeta) \\ Y \\ Z(\zeta) \end{array} \right) & * \\ & -bY - bY' \\ & 0 \\ & 0 \\ * & * \\ * & * \\ -Q^{-1} & * \\ 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

Note que a desigualdade anterior representa as condições da Proposição 4.1 de (Caun et al. (2018)), cujas matrizes $A(\zeta(t))$ e $B(\zeta(t))$ pertencem ao politopo Ω_P , tal que $\zeta(t)$ é o parâmetro variante no tempo pertencente ao simplex unitário. A partir deste ponto, a prova das desigualdades (6) e (16) podem ser obtidas do Teorema 4.1 em (Caun et al. (2018)), em sentido oposto.

A prova do Teorema 1 está completa. \square

Em termos do processamento computacional, o Teorema 1 pode ser resolvido em tempo polinomial. Neste caso, o número de LMIs (\mathcal{L}) é interpretado como a soma de uma progressão aritmética (em relação às desigualdades (4) e (5)) que contém \mathcal{N} termos, no qual o primeiro termo inclui uma LMI e o último termo \mathcal{N} LMIs e, por fim, as desigualdades (6) e $W > 0$ são adicionadas. Diante ao exposto, a expressão $\mathcal{L} = 2 + \frac{(\mathcal{N}+1)\mathcal{N}}{2}$ é alcançada.

4. APLICAÇÃO PRÁTICA

Nesta seção é apresentado uma aplicação prática na suspensão ativa da Quanser[®]. O pacote computacional LMIlab e a interface YALMIP (Löfberg (2004)), em ambiente Matlab, foram usados para o cômputo da solução do problema de otimização. Devido o modelo LPV dinâmico da suspensão ativa ter apenas a matriz de entradas dependente do conjunto de variáveis *scheduling*, não envolveremos análises comparativas com a literatura LQR-*gain scheduling* existente. Isto se deve ao fato que, no melhor conhecimento dos autores, não foram feitas tentativas de estabilizar sistemas LPV que contenham o par de matrizes $\{A(\zeta(t)), B(\zeta(t))\}$. Por outro lado, é possível obter resultados comparativos por ganho robusto do controle LQR-baseado em LMI.

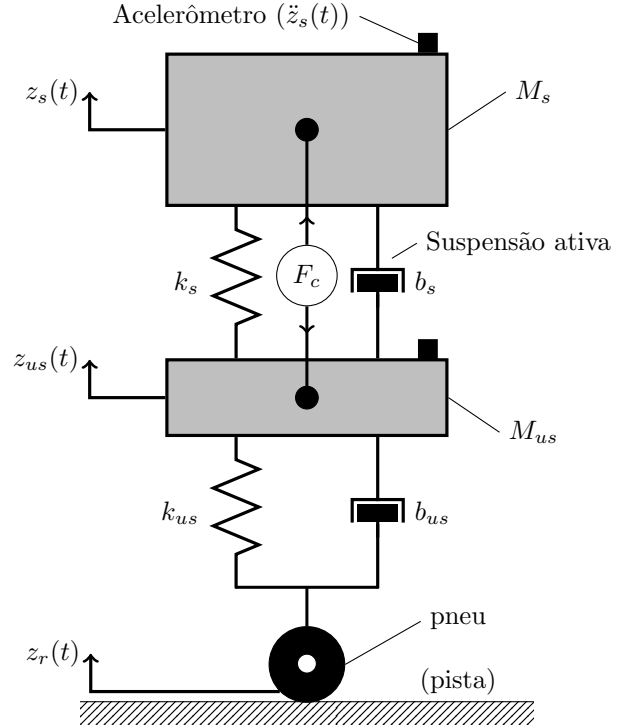
4.1 Sistema de suspensão ativa Quanser[®]

Considere o modelo esquemático da Figura 1 da suspensão ativa de um veículo descrito em (Beteto et al. (2018)). A proposta é projetar um controlador que atue na força de controle $F_c(t)$, tal que as vibrações causadas por irregularidades da pista sejam minimizadas. Observe que o Teorema 1 é baseado no controle LQR-LMI que contém a estrutura para desenvolver um controlador LPV do tipo proporcional-derivativo e, portanto, são previstos erros de regime permanente. Estes erros também se justificam devido ao uso frequente da suspensão ativa ao longo dos anos, que aumentou o atrito mecânico das partes móveis. Esse fato pode ser detectado através do sinal $z_s(t)$ nos testes

de malha aberta do sistema. Também é lembrado que o objetivo principal é manter um movimento suave para a carroceria do veículo, conforme descrito pelo fabricante.

A referência $z_r(t)$ foi escolhida para produzir um sinal de onda quadrada de amplitude 0,02m, frequência de $\frac{1}{3}$ Hz com largura de pulso de 50%. Em função das características de fabricação da suspensão, o vetor de estados iniciais é assumido nulo. As matrizes de ponderação são as sugeridas pelo fabricante i.e. $Q = \text{diag}(450 \ 30 \ 5 \ 0,01)$ e $R = 0,01$. Por fim, o parâmetro de relaxação escolhido é $b = 10^{-3}$ (vide Caun et al. (2018) para maiores detalhes) e a taxa de decaimento α é desconsiderada das análises.

Figura 1. Modelo esquemático da suspensão ativa.



Fonte: Adaptado de (Beteto et al. (2018)).

No modelo físico da suspensão ativa existe uma massa de carga útil removível, constituída por duas unidades de peso idênticas, compondo a massa M_s . Logo, a massa M_s pode assumir o valor de 1,455kg (sem as duas unidades de peso) ou de 2,45kg (com as duas unidades de peso). Em vista destas informações, o modelo dinâmico de Quanser (2009) pode ser representado pela equação de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s+b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t), \quad (17a)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 1 \ 0] x(t) + w(t), \quad (17b)$$

com

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}, u(t) = F_c,$$

note que $y(t) = z_s(t)$ é a saída medida, $w(t) = z_r(t)$ a perturbação e $z_{us}(t)$ a coordenada do pneu. Os valores nominais das constantes são encontrados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros da suspensão ativa.

Símbolo	Valor	Descrição
M_s	2,45	Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)
M_{us}	1	Massa do conjunto do pneu (kg)
k_s	900	Constante de rigidez da mola (N/m)
k_{us}	2500	Constante de rigidez da mola (N/m)
b_s	7,5	Coefficiente de amortecimento (Ns/m)
b_{us}	5	Coefficiente de amortecimento (Ns/m)

Neste experimento, a perda de potência no atuador é variante ao longo do tempo e a massa de carga útil removível (M_s) é considerada constante. Esta falha estrutural é representada no modelo por uma função $k_{falha}(t)$. Considerando o canal de falha do atuador para o controlador, tem-se $u(t)_{falha} = k_{falha}(t)F_c(t)$. Note que a suspensão ativa não possui sensores aptos a medir a variação da força $F_c(t)$, tampouco apresenta dispositivos capazes de alterar a condição de desempenho do atuador. Logo, uma situação de parâmetro variante no tempo é criada em ambiente Matlab/Simulink através de um bloco *function*. Neste ambiente o sinal de controle é assumido ser uma função senoidal com ponto de *bias* em 85% de $F_c(t)$ (N), cujo intervalo de variação é $[70, 100]\%$ tal que $u(t)_{falha} = -(0,85 + 0,15\text{sen}(2\pi ft + \pi/2))K(\zeta(t))x(t)$. A partir dessas informações, politopos de 2 vértices são formados, i.e.

(a) Caso 1: $M_s = 1,455$ Kg.

- Vértice 1: 100% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,154 & 0 & 5,154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,687 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 2: 70% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,56 & -5,154 & 0 & 5,154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,481 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

(a) Caso 2: $M_s = 2,45$ Kg.

- Vértice 1: 100% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,408 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- Vértice 2: 70% de potência na força de controle $F_c(t)$:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,34 & -3,061 & 0 & 3,061 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,286 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

As Figuras 2 e 3 ilustram testes práticos da variação paramétrica dada por $\zeta(t) = 0,5 + 0,5\text{sen}(2\pi ft + \pi/2)$

e frequência de $f = \frac{1}{18}$ Hz, cujos valores de $K(\zeta(t))$ ao longo do tempo são calculados por:

(i) Proposta do Teorema 1 sob a condição de $M_s = 2,45$ Kg,

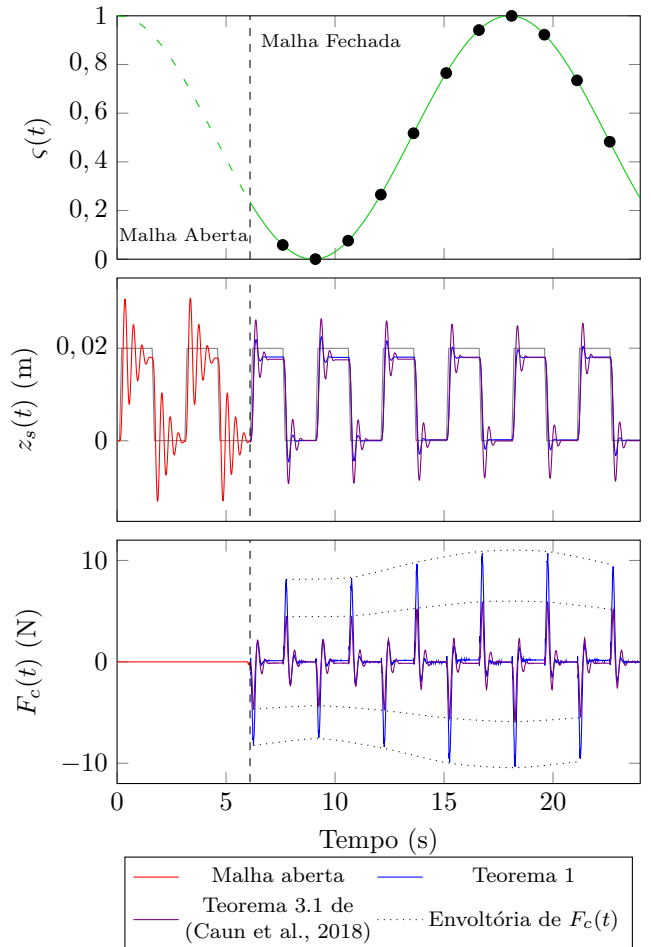
$$K(\zeta(t)) = \zeta(t)[189,65 \ 81,57 \ 92,47 \ 6,90] \\ + (1 - \zeta(t))[155,56 \ 66,83 \ 76,00 \ 5,67].$$

(ii) Proposta do Teorema 1 sob a condição de $M_s = 1,455$ Kg,

$$K(\zeta(t)) = \zeta(t)[272,39 \ 80,13 \ 136,89 \ 10,16] \\ + (1 - \zeta(t))[224,62 \ 65,62 \ 114,66 \ 8,36].$$

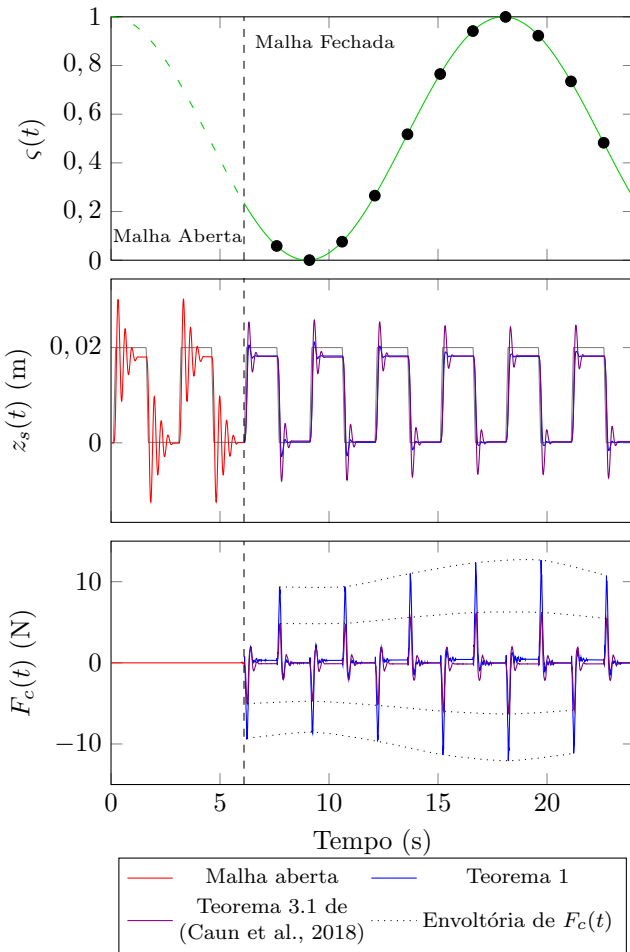
Além disso, propõe-se contrastar o comportamento temporal via Teorema 3.1 de (Caun et al., 2018), que se baseia no controle LMI do problema LQR robusto, de forma a elucidar as vantagens do Teorema 1 em relação à falhas estruturais variantes no tempo. Neste caso, o projeto de ganho robusto considerou um politopo formado pelos vértices dos casos (a) e (b), do qual obteve-se $K = [-32,5157 \ 27,3028 \ -85,0217 \ -3,2284]$, com $\|K\| = 95,0885$. Verifica-se, portanto, que o Teorema 1 garante níveis de rejeição de $w(t)$ em ambas as condições de M_s , tal que o Teorema 3.1 de (Caun et al., 2018), embora seja robusto às incertezas invariantes no tempo definidas pela massa do corpo (M_s) e a falha estrutural (k_{falha}), não alcançou desempenho frente à imposição de $k_{falha}(t)$.

Figura 2. Aplicação prática na condição de $M_s = 2,45$ kg.



Note ainda que, em ambas as figuras, existe uma característica de modulação do sinal de controle devido a variação temporal $\zeta(t)$ no ganho do canal de saída do sinal $u(t)_{falha}$. Este efeito é visualizado no deslocamento de $z_s(t)$ através das variações do transitório, tal que níveis baixos de $\zeta(t)$ (i.e., no intervalo de 6s à 12s) implicam em uma depreciação do desempenho do controlador. Outra particularidade refere-se ao projeto baseado na condição mais leve de M_s , que inferiu um melhor desempenho em relação a situação de massa total (com a carga útil removível). Este fato se justifica devido a menor oscilação da suspensão ativa (na ausência da carga útil) e a maior intensidade de sinal de controle. Por fim, as marcações no sinal $\zeta(t)$ referem-se aos valores instantâneos que atuam na força $F_c(t)$ (que varia continuamente ao longo do tempo) durante a mudança de amplitude da referência $z_r(t)$.

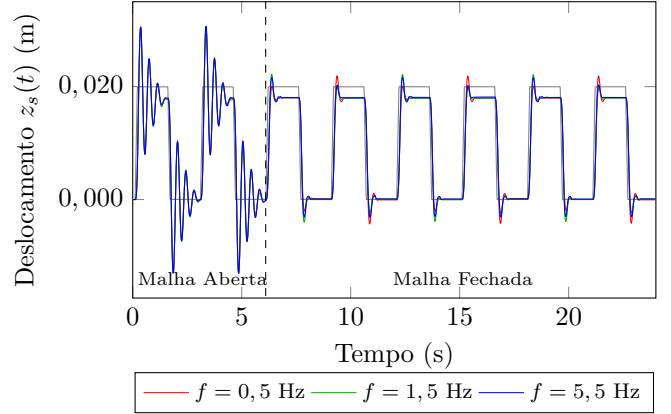
Figura 3. Aplicação prática na condição de $M_s = 1,455\text{kg}$.



Um efeito desejável em projetos *gain scheduling* é garantir o desempenho do sistema de controle na presença de variações da frequência em $\zeta(t)$. Para tanto, a Figura 4 ilustra o sinal $z_s(t)$ para três casos. É notório, nesta implementação prática, que o controle atua de forma efetiva, destacando diferentes pontos de operação de $\zeta(t)$, conforme a frequência.

Além destes testes, procedeu-se as implementações de $f = 15,5\text{Hz}$ e $f = 50,5\text{Hz}$. Em vista disso, observou-se que apesar do transitório de $z_s(t)$ não apresentar os efeitos

Figura 4. Análise da influência da frequência via Teorema 1 na condição de $M_s = 2,45\text{kg}$.



da modulação, sua presença pode ser constatada na força $F_c(t)$ ao custo da adição de ruídos no sinal do atuador. Esta dessensibilização no deslocamento é natural uma vez que a suspensão ativa apresenta uma operação segura de resposta em frequência limitada a 12Hz.

5. CONCLUSÕES

O principal resultado deste trabalho foi obter uma lei de controle *gain scheduling* do problema LQR baseado em LMIs. A estabilidade quadrática foi o critério utilizado na síntese do controlador, em que a matriz auxiliar dependente de modo afim nos parâmetros fornece o grau de liberdade necessário para o projeto de controle LPV. Esta abordagem é mais conservadora em relação ao uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e, portanto, para garantir um relaxamento matricial foi utilizado restrições LMIs obtidas pelo Lema de Finsler. A taxa de decaimento é uma especificação de projeto opcional, que permite atribuir um tempo de estabelecimento sem aumento do custo computacional. A aplicação prática no sistema de suspensão ativa permitiu um estudo prático da ação do parâmetro variante no tempo e do cálculo da matriz $K(\zeta(t))$. Por fim, nossa proposta se mostrou eficaz frente as variações da frequência de $\zeta(t)$. Em uma perspectiva de trabalhos futuros, há um otimismo na extensão destes resultados para os casos de (a) funções de Lyapunov dependentes de parâmetros e (b) modelos de incertezas combinadas, os quais estão sob investigação dos autores.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi parcialmente financiado pelas agências CAPES, CNPq e FAPESP.

REFERÊNCIAS

- Aktas, A., Sever, M., and Yazici, H. (2016). Gain scheduling LQR control of linear parameter varying overhead crane. *National Conference on Electrical, Electronics and Biomedical Engineering*, 232 – 236.
- Alcala, E., Puig, V.; Quevedo, J., Escobet, T., and Comasolivas, R. (2018). Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control Engineering Practice*, 73, 1 – 12.

- Alcala, E., Puig, V., and Quevedo, J. (2019). LPV-MPC control for autonomous vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 52(28), 106 – 113. 3rd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems LPVS.
- Alcala, E., Puig, V., Quevedo, J., and Escobet, T. (2017). Gain scheduling LPV control scheme for autonomous guidance problem using a dynamic modelling approach. *IET Research Journals*, 1 – 10.
- Almeida, J., Mendonca, T., Rocha, P., and Rodrigues, L. (2017). Controller design for neuromuscular blockade level tracking based on optimal control. *Control Engineering Practice*, 59, 151 – 158.
- Beteto, M.A.L., Assunção, E., Teixeira, M.C.M., Silva, E.R.P., Buzachero, L.F.S., and Caun, R.P. (2018). New design of robust LQR-state derivative controllers via LMIs. *9th IFAC Symposium on Robust Control Design and 2nd IFAC Workshop on Linear Parameter Varying Systems*, 1, 612 – 617.
- Caun, R.P., Assunção, E., Teixeira, M.C.M., and Caun, A.P. (2018). LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. *Cogent Engineering*, 5(1), 1 – 27.
- Das, S., Pan, I., and Das, S. (2015). Multi-objective LQR with optimum weight selection to design FOPID controllers for delayed fractional order processes. *ISA Transactions*, 58, 35 – 49.
- Fard, M. and Aldeen, M. (2016). Robust control design for a boost converter in a photovoltaic system. *IEEE 7th International Symposium on Power Electronics for Distributed Generation Systems*, 1 – 9.
- Ge, M., Chiu, M., and Wang, O. (2002). Robust PID controller design via LMI approach. *Journal of Process Control*, 12(1), 3 – 13.
- Kalman, R.E. (1960a). Contributions to the theory of optimal control. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 5, 102 – 119.
- Kalman, R.E. (1960b). On the general theory of control systems. *Proc. First Internat. Congress Automat. Contr.*, 481 – 491.
- Ko, H.S., Dumont, G.A., Jatskevich, J., and Moshref, A. (2006). A new LMI representation of LQR based voltage control of grid-connected wind farm. *American Control Conference*, 851 – 856.
- Koroishi, E.H., Lara-Molina, F.A., Borges, A.S., and Stefan Jr., V. (2016). Robust control in rotating machinery using linear matrix inequalities. *Journal of Vibration and Control*, 22(17), 3767 – 3778.
- Liu, Z., Theilliol, D., Gu, F., He, Y., Yang, L., and Han, J. (2017). State feedback controller design for affine parameter-dependent LPV systems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 9760 – 9765. 20th IFAC World Congress.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proceedings in IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 284 – 289.
- Menhour, L., Charara, A., and Lechner, D. (2014). Switched LQR/ \mathcal{H}_∞ steering vehicle control to detect critical driving situations. *Control Engineering Practice*, 24, 1 – 14.
- Montagner, V.F., Leite, V.J.S., de Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2004). Controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estados linear variante com parâmetros: Uma abordagem LMI. *Anais do Congresso Brasileiro de Automática*, 1 – 6.
- Montagner, V.F. and Peres, P.L.D. (2004). State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, 2004 – 2009.
- Niel, F., Seuret, A., Zaccarian, L., and Fagley, C. (2017). Robust LQR control for stall flutter suppression: A polytopic approach. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 11367 – 11372.
- Nikolakopoulos, G., Panousopoulou, A., Tzes, A., and Lygeros, J. (2005). Multi-hopping induced gain scheduling for wireless networked controlled systems. *44th IEEE Conference on Decision and Control*, 470 – 475.
- Pakshin, P. and Peaucelle, D. (2009). LQR parametrization of static output feedback gains for linear systems with Markovian switching and related robust stabilization and passification problems. *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, 1157 – 1162.
- Quanser (2009). *Active Suspension Control Laboratory - Instructor Manual*. Ontario, Canada.
- Trapiello, C., Puig, V., and Morcego, B. (2019). Position-heading quadrotor control using lpv techniques. *IET Control Theory Applications*, 13(6), 783–794.
- Vesely, V. and Ilka, A. (2017). Generalized robust gain-scheduled PID controller design for affine LPV systems with polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, 105, 6 – 13.
- Wu, F. (2001). A generalized LPV system analysis and control synthesis framework. *International Journal of Control*, 74(7), 745–759.