

Controle Epidemiológico da COVID-19 através da Teoria de Sistemas a Estrutura Variável e Modos Deslizantes^{*}

Débora Marques Lopes Santos^{*}
Victor Hugo Pereira Rodrigues^{**} Tiago Roux Oliveira^{*}

^{*} Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ),
Rio de Janeiro, RJ 20550-900, Brasil
(e-mail: deboramlsantos@gmail.com e tiagoroux@uerj.br)

^{**} Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ),
Rio de Janeiro, RJ 21941-972, Brasil
(e-mail: rodrigues.vhp@gmail.com)

Abstract: The epidemic caused by the recent coronavirus (COVID-19) has attracted the attention of several research areas. Many publications try to obtain answers regarding the dynamics of the spread of the infection since the results of its dissemination have been catastrophic. A systematic method for the analysis and control of the COVID-19 dynamics is an immediate necessity. This work proposes a new mathematical SIRDQ model considering (closed-loop) control laws for the government actions in order to reduce the periods of quarantine and lock-down, thus mitigating the consequences caused by the outbreak. The proposed control laws guarantee the regulation of the basic number of reproduction to a desired value, which is directly related to the propagation of the epidemic model. We consider control strategies based on variable structure systems and sliding modes due to its robustness with respect to parametric uncertainties and nonlinear disturbances in the plant, such as those found in any epidemiological model. The stability analysis of the closed-loop system is rigorously presented. Simulations show that the employed control strategies assure better levels of isolation to be adopted.

Resumo: A epidemia causada pelo recente coronavírus (COVID-19) tem atraído a atenção de diversas áreas de pesquisa. Muitas publicações tentam obter respostas quanto à dinâmica de propagação da infecção uma vez que os resultados da sua disseminação têm sido catastróficos. Um método sistemático para a análise e controle da dinâmica da COVID-19 é uma necessidade imediata. Este trabalho propõe um novo modelo matemático SIRDQ considerando leis de controle (em malha fechada) para as ações governamentais de modo a reduzir os períodos de quarentena, atenuando-se assim as consequências causadas pelo surto da COVID-19. As leis de controle propostas garantem a regulação do número básico de reprodução para um valor desejado, que está diretamente relacionado com a dinâmica de propagação do modelo epidêmico. Considera-se estratégias de controle baseadas na teoria de sistemas a estrutura variável e modos deslizantes devido à sua robustez com relação a incertezas paramétricas e perturbações não-lineares na planta, assim como àquelas encontradas em qualquer modelo epidemiológico. A análise de estabilidade do sistema em malha-fechada é rigorosamente apresentada. Simulações mostram que as estratégias de controle empregadas asseguram melhores níveis de isolamento a serem adotados.

Keywords: COVID-19, Epidemiological Dynamics, Sliding Mode Control, Output Feedback

Palavras-chaves: COVID-19, Dinâmica Epidemiológica, Controle por Modos Deslizantes, Realimentação de Saída

1. INTRODUÇÃO

Em 31 de dezembro de 2019, a Organização Mundial da Saúde (OMS) foi informada de casos de pneumonia de

^{*} O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

causa desconhecida na cidade de Wuhan, China. Um novo coronavírus, que pertence a uma grande família de vírus que causam doenças que vão desde o resfriado comum até doenças mais graves foi identificado como a causa pelas autoridades chinesas em 7 de janeiro de 2020 e foi temporariamente denominado “2019-nCoV” (WHO, 2020).

Com uma capacidade de propagação inacreditável e, conseqüentemente, um rápido aumento do número de casos, o vírus se espalhou para a maioria dos países do mundo.

Por isso, em 11 de março de 2020, a OMS declarou que o surto poderia ser caracterizado como uma pandemia.

A COVID-19 tem avançado rapidamente pelo país, com transmissão comunitária declarada em todo o território nacional (J. R. Cavalcante, 2020). Neste contexto, a cidade do Rio de Janeiro é um dos maiores centros urbanos do país e a segunda cidade com maior número de casos (J. R. Cavalcante, 2020), com 9.566 óbitos confirmados pela doença. O primeiro caso de COVID-19 no município do Rio de Janeiro foi registrado em 6 de março de 2020, apenas 11 dias após o primeiro caso do Brasil (J. R. Cavalcante, 2020). Desde então, a prefeitura do Rio de Janeiro tem disponibilizado dados de casos e óbitos confirmados de SARS-CoV-2, por local de residência, de acesso aberto. Esses dados são disponibilizados considerando casos confirmados, recuperados e infectados, por dia e por média móvel dos últimos 7 dias (PCRJ, 2020).

As Figuras 1 e 2 demonstram esses dados, considerando o período de propagação da epidemia de 28 de março de 2020 à 03 de agosto de 2020.

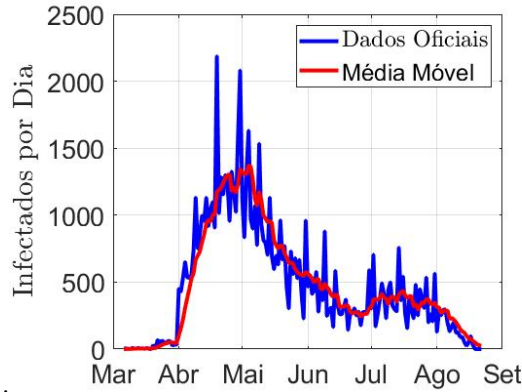


Figura 1. Casos confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro

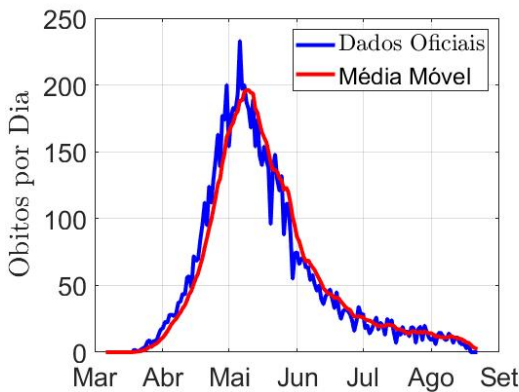


Figura 2. Óbitos confirmados da COVID-19, no município do Rio de Janeiro

Neste cenário de pandemia, o tratamento da doença e a sua prevenção exigem recursos sociais e médicos que geralmente são insuficientes. Até o presente momento, não existe vacina contra esse vírus ou medicamentos eficazes para a cura. Por sua vez, os sistemas de saúde ficam cada vez mais sobrecarregados, na tentativa de mitigar as consequências, evitando complicações e resultados ainda mais

graves (Pazos, 2020). Embora medidas como quarentena e isolamento social sejam possibilidades de controle em situações de pandemia, o seu prolongamento pode ser prejudicial à economia do país. Em decorrência disso, estudos sobre a dinâmica e possíveis estratégias de controle podem ser de grande interesse para a comunidade científica e para a sociedade como um todo.

Em busca de analisar a dinâmica do surto de COVID-19, o objetivo deste artigo é propor um novo modelo denominado SIRDQ (*Susceptible, Infected, Recovered, Dead and Quarantined*) inspirados em (Kermack and McKendrick, 1927) e (Gaff and Schaefer, 2009), introduzindo algoritmos de controle por modos deslizantes (*Sliding Mode Control* – SMC) em malha fechada, capazes de regular o número básico de reprodução do vírus. Para fins práticos, serão utilizados os dados característicos da cidade do Rio de Janeiro. Uma análise de estabilidade é realizada, por meio da teoria de Lyapunov, considerando incertezas paramétricas na modelagem e distúrbios externos imprevistos.

Assim sendo, este artigo está organizado da seguinte forma. O modelo matemático SIRDQ assim como sua análise são discutidos na Seção 2. A Seção 3 apresenta o projeto SMC para controlar o surto de COVID-19. Os resultados e simulações são apresentados na Seção 4. Por fim, a Seção 5 apresenta conclusões.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Um passo decisivo na modelagem e análise dinâmica das epidemias foi a introdução da abordagem compartimental *Susceptible, Infectious and Removed* (SIR). Segundo os próprios autores, (Kermack and McKendrick, 1927), a dinâmica epidemiológica pode ser explicada da seguinte forma: uma ou mais pessoas **Infectadas** são introduzidas em uma comunidade de indivíduos, mais ou menos **Suscetíveis** à doença em questão. A doença se espalha de afetado para não afetado por meio do contato. Cada pessoa infectada percorre o curso da doença e, finalmente, é **Removida** do número dos enfermos, por recuperação ou por falecimento.

O modelo SIR clássico, como apresentado em (Kermack and McKendrick, 1927), limita-se ao caso em que todos os membros da comunidade são inicialmente igualmente suscetíveis à doença em um cenário onde apenas a chamada imunização de rebanho é cabível. Em outras palavras, todos os membros da comunidade podem ser contaminados e não são consideradas intervenções com o intuito de atenuar as consequências do surto epidemiológico como, por exemplo, administração de medicamentos que diminuam o número de mortes dos acometidos, vacinação que confira imunidade a população ou isolamento social que garanta a não-disseminação do agente causador da doença.

Do ponto de vista matemático, o modelo SIR é um sistema dinâmico não-linear de terceira ordem dado por,

$$\dot{S}(t) = -\frac{\alpha}{N} S(t)I(t), \quad (1)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\alpha}{N} S(t)I(t) - \lambda I(t), \quad (2)$$

$$\dot{R}(t) = \lambda I(t), \quad (3)$$

nas quais a variável $t \in \mathbb{R}^+$ representa o instante de tempo, $S(t) \in \mathbb{R}$, $I(t) \in \mathbb{R}$ e $R(t) \in \mathbb{R}$ são variáveis

de estado representando, respectivamente, os números de pessoas Suscetíveis, Infectadas e Removidas, $\alpha > 0$ a taxa constante de propagação da doença, $\lambda > 0$ a taxa constante com a qual os indivíduos passam de infectados para removidos do quadro epidêmico e N o número total de indivíduos.

Apesar da vasta utilização do modelo SIR (1)–(3), do ponto de vista de engenharia seu emprego é limitado a análise e predição do comportamento epidemiológico uma vez que intervenções como vacinas e isolamento social, medidas que diminuem o contágio e encurtam a duração do surto, não são contempladas. Mesmo assim, não é difícil encontrar na literatura contribuições que se afastam da realidade ao assumirem uma pequena alteração em (1)–(3) por meio da troca de α por

$$\alpha(t) = \alpha_0 - u(t), \quad (4)$$

onde a contante $\alpha_0 > 0$ e $u(t) \in [0, 1]$ representa o sinal de controle, no contexto, a ação governamental (nível de isolamento social ou de vacinação da população). Por mais simples e tentadora que pareça tal mudança, há uma contradição nesta abordagem que torna os resultados questionáveis. Mais precisamente, o comportamento do número básico de reprodução R_0 .

O número básico de reprodução (R_0), também chamado de razão ou taxa de reprodução básica ou taxa reprodutiva básica, é uma métrica epidemiológica usada para descrever a contagiosidade ou transmissibilidade de agentes infecciosos (Delamater et al., 2019). Interpretado como o número esperado de infecções secundárias decorrentes de um único indivíduo durante todo o seu período infeccioso (Heffernan et al., 2005), é definido matematicamente como a taxa de variação instantânea de casos com relação aos removidos (Keeling and Grenfell, 2000), *i.e.*,

$$R_0(t) := \frac{d(I(t) + R(t))}{dR(t)} = \frac{\dot{I}(t) + \dot{R}(t)}{\dot{R}(t)}. \quad (5)$$

Por exemplo, para (1)–(3) tem-se o número básico de reprodução dado por

$$R_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda} \frac{S(t)}{N}. \quad (6)$$

Desta forma, é possível reescrever (1)–(3) como

$$\dot{S}(t) = -\lambda R_0(t) I(t), \quad (7)$$

$$\dot{I}(t) = \lambda R_0(t) I(t) - \lambda I(t), \quad (8)$$

$$\dot{R}(t) = \lambda I(t). \quad (9)$$

Note que se α considerado variante, como em (4),

$$R_0(t) = \frac{(\alpha_0 - u(t))}{\lambda} \frac{S(t)}{N}. \quad (10)$$

Portanto, assumir (4) e ao mesmo tempo considerar o número básico de reprodução ($R_0(t)$) como uma constante é de fato um equívoco do ponto de vista de controle tanto quanto do ponto de vista da identificação e predições a partir do modelo SIR. Perpassando essa discussão, assumindo que de fato a taxa de contaminação possa ser considerada como (4), depara-se com outro problema, a falta de memória da variável $R_0(t)$. A hipótese de (4) está atrelada com possibilidade de $R_0(t)$ variar infinitesimalmente de seu valor máximo ($\max\{R_0(t)\} = \frac{\alpha_0}{\lambda}$) ao mínimo ($\min\{R_0(t)\} = 0$), de maneira recíproca, o que de fato é algo inviável.

Motivado por tais limitações, e inspirado pelas contribuições de (Kermack and McKendrick, 1927) e (Gaff and Schaefer, 2009), neste artigo considera-se um modelo compartimental de tipo *Susceptible, Infected, Recovered, Dead and Quarantined* (SIRDQ) no qual

$$\dot{S}(t) = -\frac{\alpha}{N} S(t) I(t) + \frac{\beta}{N} S(t) Q(t) - u S(t), \quad (11)$$

$$\dot{I}(t) = \frac{\alpha}{N} S(t) I(t) - \lambda_1 I(t) - \lambda_2 I(t), \quad (12)$$

$$\dot{R}(t) = -\lambda_1 I(t), \quad (13)$$

$$\dot{D}(t) = -\lambda_2 I(t), \quad (14)$$

$$\dot{Q}(t) = -\frac{\beta}{N} S(t) Q(t) + u S(t), \quad (15)$$

nas quais $S(t) \in \mathbb{R}$, $I(t) \in \mathbb{R}$, $R(t) \in \mathbb{R}$, $D(t) \in \mathbb{R}$ e $Q(t) \in \mathbb{R}$ são variáveis de estado que representam, respectivamente, os números de pessoas Suscetíveis, Infectadas, Recuperadas, Mortas e em Quarentena, $u \in [0, 1]$ consiste na ação governamental não-farmacêutica, nível de isolamento social, enquanto $\alpha > 0$ é a taxa constante de propagação da doença, $\beta > 0$ é a taxa constante com a qual pessoas abandonam a quarentena, $\lambda_1 > 0$ a taxa constante com a qual os indivíduos passam de infectados para recuperados, $\lambda_2 > 0$ a taxa constante com a qual os indivíduos passam de infectados para mortos e

$$N = S(t) + I(t) + R(t) + D(t) + Q(t) \quad (16)$$

representa o número total de indivíduos.

Note que (11)–(15) permite que se leve em conta aspectos importantes deixados de lado na modelagem SIR. O modelo SIRDQ considera a ação governamental u que força o isolamento social, por meio da quarentena, atenuando as consequência do surto, infectados, sequelas e óbitos. Ao mesmo tempo, tal modelagem contempla o fenômeno de queda de adesão à quarentena por meio do termo não-linear $\frac{\beta}{N} S(t) Q(t)$. Em cenários onde ações farmacológicas não estão disponíveis, a não adesão à quarentena tem efeito direto no prolongamento do surto e queda da economia. Além dos que de fato não podem se isolar devido a questões financeiras e/ou enfermidades, infelizmente, muitas vezes a não-adesão à quarentena é fomentada por figuras públicas que insistem no negacionismo científico e apostam em teorias da conspiração.

Finalmente, de acordo com (Keeling and Grenfell, 2000), o número básico de reprodução $R_0(t)$ do modelo SIRDQ é definido por

$$R_0(t) := \frac{\dot{I} + \dot{R} + \dot{D}}{\dot{R} + \dot{D}} = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \frac{S(t)}{N}, \quad (17)$$

cujas derivada temporal satisfaz

$$\dot{R}_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[-\alpha \frac{S(t)}{N} \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{S(t)}{N} \frac{Q(t)}{N} - u \frac{S(t)}{N} \right]. \quad (18)$$

O potencial de uma epidemia é baseado na magnitude do valor de $R_0(t)$. Espera-se que um surto continue se $R_0(t) > 1$ e termine se $R_0(t) < 1$. Então, com a intenção de frear o surto epidemiológico, o objetivo de controle é definido como a regulação $R_0(t)$ em um valor de referência $R_0^{\text{ref}} \in]0, 1[$. Ou seja, procura-se projetar u tal que o erro de regulação

$$\tilde{R}_0(t) := R_0(t) - R_0^{\text{ref}}, \quad (19)$$

com dinâmica

$$\dot{\tilde{R}}_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[-\alpha \frac{S(t)}{N} \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{S(t)}{N} \frac{Q(t)}{N} - u \frac{S(t)}{N} \right], \quad (20)$$

seja levado para zero. Para alcançar este objetivo, na próxima seção duas estratégias de controle baseadas em modos deslizantes serão apresentadas.

Ao longo do artigo, as seguintes hipóteses são consideradas:

- (H1)** Durante os primeiros estágios de uma epidemia, em uma grande população, o número de pessoas suscetíveis pode ser considerado constante, já que qualquer alteração é pequena em comparação ao número total de indivíduos N (Kermack and McKendrick, 1927).

Para efeito de análise, utiliza-se a hipótese para simplificação da dinâmica de $\tilde{R}_0(t)$ dada por (20). O argumento de que a população é grande o suficiente para que o número de indivíduos suscetíveis seja considerado constante durante o período inicial da epidemia ($S(t)/N \approx 1$) aliado a rápida resposta dos controladores por modos deslizantes, com a justificativa de que estes são empregados desde o início do surto, permite que se reescreva (20) como

$$\dot{\tilde{R}}_0(t) = \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[-\alpha \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{Q(t)}{N} - u \right]. \quad (21)$$

- (H2)** Os parâmetros α , β , λ_1 e λ_2 em (11)-(15) são incertos, no entanto seus limitantes positivos são conhecidos, de tal forma que:

$$\underline{\alpha} < \alpha < \bar{\alpha}, \quad \underline{\beta} < \beta < \bar{\beta}, \quad (22)$$

$$\underline{\lambda}_1 < \lambda_1 < \bar{\lambda}_1 \quad \text{e} \quad \underline{\lambda}_2 < \lambda_2 < \bar{\lambda}_2. \quad (23)$$

- (H3)** A variável $R_0(t)$ em (17) é uma saída da planta (11)–(15), *i. e.*, está disponível para realimentação.

Note que é plausível a hipótese uma vez que, na prática, dados são divulgados e ações governamentais são tomadas com intervalo de amostragem $h = 1$ [dia] (Aström and Wittenmark, 1997). Dessa forma, o número básico de reprodução em (17) pode ser extraído diariamente a partir dos dados através de uma equação a diferenças recursiva dada por

$$\hat{R}_0(t) := \frac{I(t) - I(t-1) + R(t) - R(t-1) + D(t) - D(t-1)}{R(t) - R(t-1) + D(t) - D(t-1)}, \quad (24)$$

onde $t \in \mathbb{N}$ representa o dia em questão.

3. CONTROLE POR MODOS DESLIZANTES

A teoria de controle por modos deslizantes é considerada uma das principais estratégias para lidar com sistemas incertos. O modo deslizante clássico, também chamado de primeira ordem, é capaz de levar a saída de um dado

sistema dinâmico para zero em tempo finito e mantê-la nesta situação de maneira precisa e robusta através de um sinal de controle por chaveamento em alta frequência (Utkin, 1992). Tal chaveamento por vezes é um fenômeno não-desejado e é de costume a utilização de um filtro passa-baixas no projeto para que se alcance uma boa estimativa do controle equivalente. O controle equivalente seria um sinal contínuo que representaria o mínimo do esforço de controle capaz de manter o modo deslizante mas que, no entanto, só existe teoricamente.

A lei de controle à estrutura variável

$$u = \begin{cases} \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \delta, & \text{se } \tilde{R}_0(t) > 0 \\ \underline{\alpha} + \underline{\beta} - \delta, & \text{se } \tilde{R}_0(t) < 0 \end{cases}, \quad (25)$$

onde $\delta > 0$ é uma constante suficientemente pequena que satisfaz $\delta + \bar{\alpha} < \underline{\beta}$, é utilizada com a finalidade de assegurar que a superfície de deslizamento $\tilde{R}_0(t) = 0$ é alcançada em tempo finito.

Teorema 1. Considere o sistema epidemiológico SIRDQ (11)-(15) com dinâmica do número básico de reprodução $R_0(t)$ dada por (18), erro de regulação $\tilde{R}_0(t)$ em (19), e lei de controle u em (25). Se todas as hipóteses (H1)–(H3) são satisfeitas, então a superfície de deslizamento $\tilde{R}_0(t) = 0$ é alcançada em tempo finito.

Prova. Considere a seguinte função de energia

$$V = \tilde{R}_0^2(t), \quad (26)$$

cujas derivada temporal é dada por

$$\dot{V} = 2\tilde{R}_0(t)\dot{\tilde{R}}_0(t). \quad (27)$$

Substituindo (21) em (27),

$$\dot{V} = 2\tilde{R}_0(t) \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[-\alpha \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{Q(t)}{N} - u \right]. \quad (28)$$

Se $\tilde{R}_0(t) > 0$, substituindo (25), a equação (28) torna-se

$$\dot{V} = 2|\tilde{R}_0(t)| \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[-\alpha \frac{I(t)}{N} + \beta \frac{Q(t)}{N} - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \delta \right]. \quad (29)$$

De (16) pode-se concluir que $\frac{I(t)}{N} < 1$ e $\frac{Q(t)}{N} < 1$. Portanto,

$$\dot{V} < 2|\tilde{R}_0(t)| \frac{\alpha}{\lambda_1 + \lambda_2} [\alpha + \beta - \bar{\alpha} - \bar{\beta} - \delta]. \quad (30)$$

Aplicando-se os majorantes (22) em (30), chega-se a

$$\dot{V} < -2 \frac{\alpha \delta}{\lambda_1 + \lambda_2} |\tilde{R}_0(t)|. \quad (31)$$

Se $\tilde{R}_0(t) < 0$, seguindo os mesmos passos, é fácil verificar que (31) também é satisfeita, ou seja, a desigualdade (31) é satisfeita $\forall \tilde{R}_0(t) \in \mathbb{R} - \{0\}$. Note que, com (26), é possível que se reescreva a desigualdade (31) como

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -2 \frac{\alpha \delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{V} \\ &< -2 \frac{\bar{\alpha} \delta}{\lambda_1 + \lambda_2} \sqrt{V}. \end{aligned} \quad (32)$$

Definindo-se a variável auxiliar $\tilde{V} := \sqrt{V}$ verifica-se que esta satisfaz a equação diferencial $\dot{\tilde{V}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{V}}{\sqrt{V}}$ e, portanto,

$$\dot{\tilde{V}} = 2\tilde{V}\sqrt{V}. \quad (33)$$

Então, ao substituir (33) no lado esquerdo da desigualdade (32), chega-se a

$$\dot{\bar{V}} < -\frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2}. \quad (34)$$

Invocando o Lema da Comparação (Khalil, 2002, p. 102), um limite superior $\bar{V}$ para $\bar{V}$ é assegurado pela solução do sistema dinâmico

$$\dot{\bar{V}} = -\frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad (35)$$

desde que a condição inicial seja escolhida como $\bar{V}(0) = \bar{V}(0) = |\bar{R}_0(0)|$. A solução desta equação diferencial é

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= \bar{V}(0) - \frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} t \\ &= |\bar{R}_0(0)| - \frac{\bar{\alpha}\delta}{\lambda_1 + \lambda_2} t, \end{aligned} \quad (36)$$

Então, existe um instante de tempo finito $t_f = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)|\bar{R}_0(0)|}{\bar{\alpha}\delta}$ tal que $\bar{V}(t_f) = 0$. Já que $\bar{V}(t) > \hat{V}(t) = |\hat{R}_0(t)|$, pode-se afirmar que existe um tempo finito $t_s \in [0, t_f]$ tal que o modo deslizante ocorre e, portanto, a superfície de deslizamento $\hat{R}_0(t) = 0$ é alcançada. $\square$

4. SIMULAÇÃO

Nesta seção serão apresentados os resultados de simulação obtidos para o sistema em malha fechada constituído pela planta (11)-(15), saída $R_0(t)$ em (17) e a lei de controle (25). As constantes do modelo são $\alpha = 0,5464$, $\beta = 0,4417$, $\lambda_1 = 0,1$ e $\lambda_2 = 0,032$, o valor de referência é $R_0^{\text{ref}} = 0,5$, e as constantes do controlador são $\underline{\alpha} = 0,1$, $\bar{\alpha} = 0,6$, $\underline{\beta} = 0,08$, $\bar{\beta} = 0,5$ e $\delta = 0,002$. Com intuito de se aproximar da realidade, escolheu-se a cidade do Rio de Janeiro como exemplo e, dessa forma, $N = 6718903$ indivíduos segundo o último senso do IBGE e baseando-se em dados fornecidos pela Prefeitura da Cidade, as condições iniciais são $I(0) = 4$, $R(0) = 0$, $D(0) = 0$, $Q(0) = 0$, logo, $S(0) = N - I(0) - R(0) = 0 - D(0) - Q(0) = 6718899$ indivíduos.

Embora a abordagem pareça se afastar da realidade devido ao chaveamento em alta frequência do nível de isolamento u , é possível encontrar um sinal contínuo que se aproxima do controle equivalente $u_{eq}(t)$ usando o controle equivalente estendido (Utkin, 1978). De acordo com essa teoria, uma aproximação $u_{av}(t)$ para $u_{eq}(t)$ é obtida filtrando-se o sinal u . Neste contexto, a dinâmica do $u_{av}(t)$ é dada por

$$\tau \dot{u}_{av}(t) = -u_{av}(t) + u, \quad (37)$$

onde τ é uma constante. Quanto menor o valor de τ , mais $u_{av}(t)$ se aproxima de $u_{eq}(t)$. Note que se $\tau = 0$, $u_{av}(t) = u$.

A Figura 3 mostra o comportamento do sistema de malha fechada para diversos valores de τ . Quanto menor τ mais rápido o objetivo de controle é alcançado, ver Figura 3(b). Supondo que deseje-se manter o R_0 próximo igual a 0,5 (Figura 3(c)), todas as estratégias convergirem para um isolamento de aproximadamente 40%, Figura 3(a). No entanto, as Figuras 3(e) e 3(g) deixam claro que para se evitar um número alto de infectados e mortos é imprescindível, no início da epidemia, a adesão de um alto nível de isolamento social. O número básico reprodução $R_0(t)$ está diretamente relacionado com a quantidade de indivíduos suscetíveis $S(t)$, ver equações (6), (10) e (17), portanto,

para que haja uma redução no nível de transmissão da doença, como ainda não há uma vacina, é necessário que uma grande parte da população se mantenha em quarentena, ver Figuras 3(d) e 3(h).

Na Figura 4 mostra o resultado obtido quando o sinal $R_0(t)$ não está disponível e para a construção do erro de regulação utiliza-se $\hat{R}_0(t)$ em (24), ou seja, o erro de regulação torna-se $\hat{R}_0(t) = \hat{R}_0(t) - R_0^{\text{ref}}$. O erro de regulação alcança uma vizinhança da origem, Figuras 4(b) e 4(c), no entanto a falta de informações precisas agrava significativamente o quadro epidemiológico com aumento do número de infectados e mortos, ver Figuras 4(e) e 4(g).

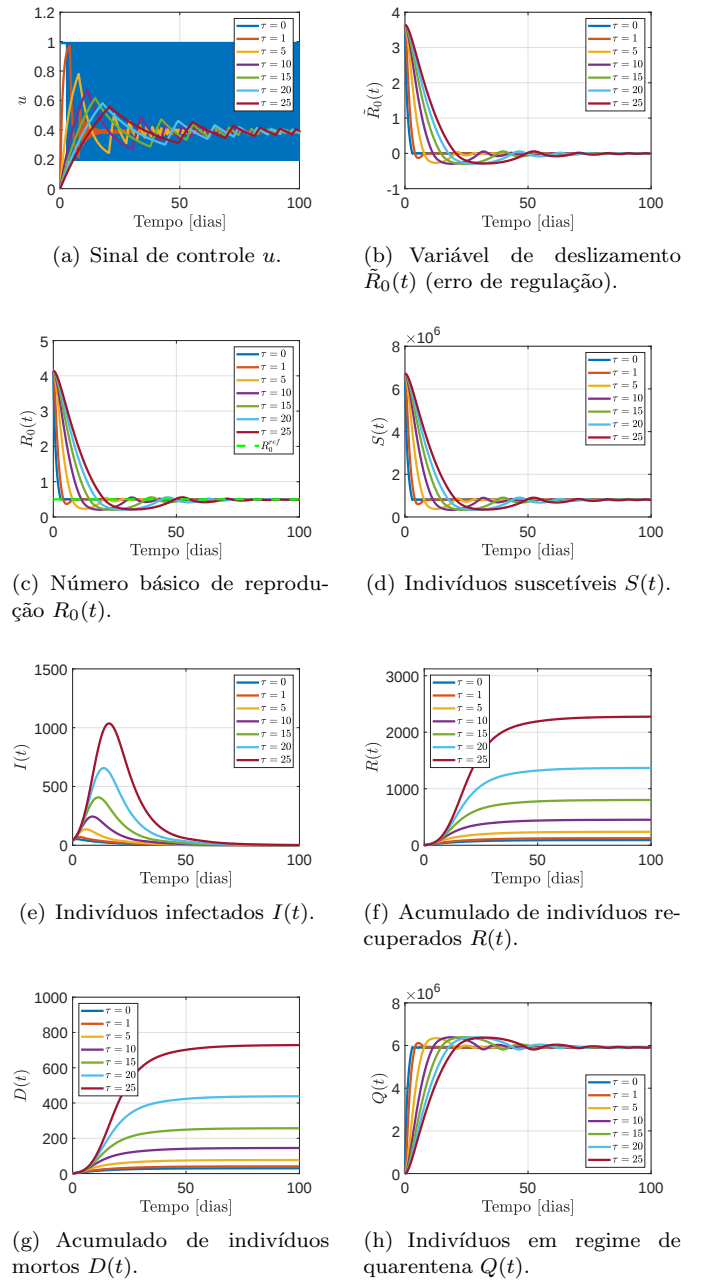


Figura 3. Resultados de simulação obtidos para o sistema em malha fechada quando a lei de controle é (37) com erro de regulação $\hat{R}_0(t) = R_0(t) - R_0^{\text{ref}}$.

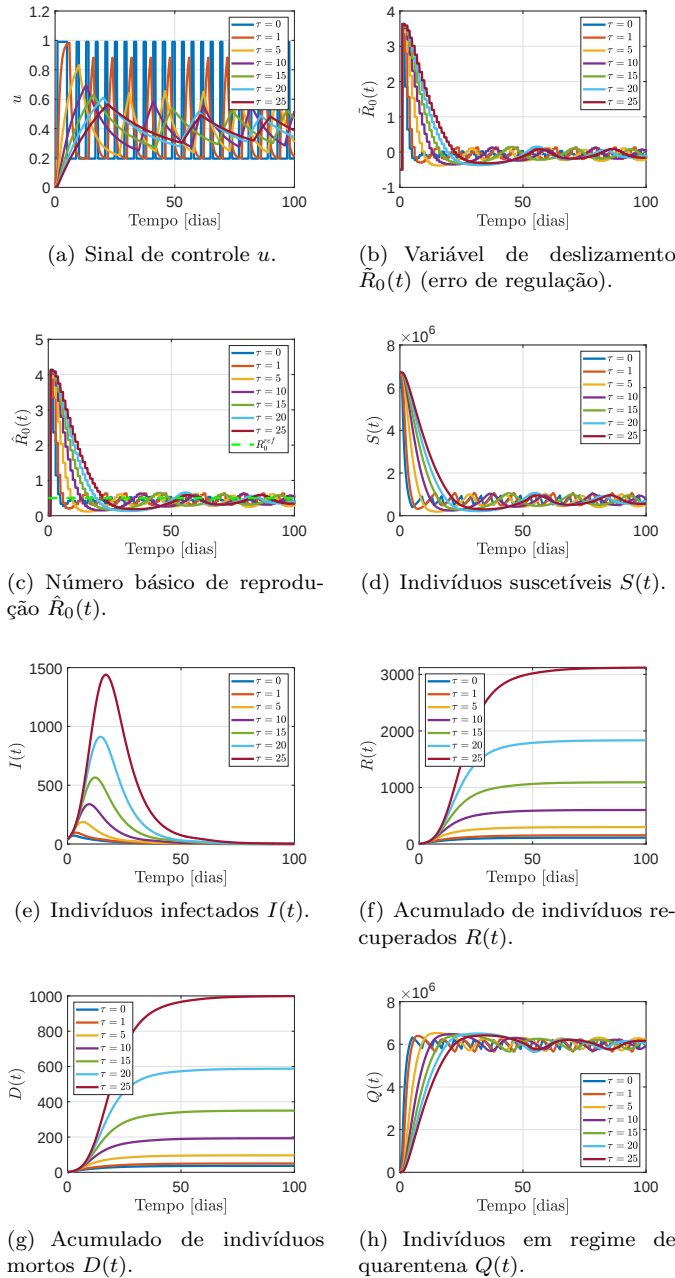


Figura 4. Resultados de simulação obtidos para o sistema em malha fechada quando a lei de controle é (37) com erro de regulação $\tilde{R}_0(t) = \hat{R}_0(t) - R_0^{\text{ref}}$.

5. CONCLUSÃO

Epidemias de doenças infecciosas como a COVID-19 têm sido recorrentes ao longo da história e podem causar grandes problemas para a população afetada, como saturação da rede hospitalar, crise econômica, etc. Nesse contexto, os modelos matemáticos podem ser ferramentas valiosas, pois são capazes de fornecer estimativas para possíveis cenários de propagação da doença, ajudando a delimitar casos limítrofes e situações intermediárias que sejam plausíveis. Além disso, modelos dinâmicos combinados com técnicas de controle moderno permitem elaborar estratégias otimizadas para introdução e relaxamento das medidas de mitigação da epidemia. Informações como essas são essen-

ciais para ajudar as autoridades a tomar decisões sobre a alocação de recursos limitados quando de uma epidemia.

Do ponto de vista de controle, este é um problema desafiador, uma vez que o processo é representado por um modelo não-linear, com parâmetros incertos ou mesmo variantes no tempo em alguns casos da literatura. Este artigo propôs um novo modelo matemático SIRDQ que considerou a ação governamental por meio da quarentena de modo a diminuir o número de infectados e óbitos. Além disso, leis de controle por modos deslizantes foram propostas, garantindo a regulação do número básico de reprodução R_0 em valores menores que a unidade de modo a levar matematicamente à extinção da epidemia. Os resultados de simulação ilustram que as estratégias de controle utilizadas se mostraram potencialmente eficientes no processo de regulação do R_0 e, por consequência, resultando em melhores (menores) níveis de isolamento a serem adotados pela população.

REFERÊNCIAS

- Aström, K.J. and Wittenmark, B. (1997). *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*. Dover, Mineola, NY.
- Delamater, P.L., Street, E.J., Leslie, T.F., Yang, Y.T., and Jacobsen, K.H. (2019). Complexity of the basic reproduction number (r_0). *Emerging Infectious Diseases Journal*, 25, 1–4.
- Gaff, H. and Schaefer, E. (2009). Optimal control applied to vaccination and treatment strategies for various epidemiological models. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 6, 469–492.
- Heffernan, J.M., Smith, R.J., and Wahl, L.M. (2005). Perspectives on the basic reproductive ratio. *Journal of The Royal Society Interface*, 2, 281–293.
- J. R. Cavalcante, A.J.L.A. (2020). Covid-19 no município do rio de janeiro: análise espacial da ocorrência dos primeiros casos e óbitos confirmados. *Scielo Analytics*, 29, 1–10.
- Keeling, M.J. and Grenfell, B.T. (2000). Individual-based perspectives on r_0 . *Journal of Theoretical Biology*, 203, 51–61.
- Kermack, W.O. and McKendrick, A.G. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London*, 115, 700–721.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Pazos, F. (2020). A control approach to the covid-19 disease using a seihdr dynamical model. *medRxiv*, 1–23. doi:10.1101/2020.05.27.20115295.
- PCRJ (2020). Prefeitura da cidade do rio de janeiro.painel rio covid-19. URL <https://experience.arcgis.com/experience/38efc69787a34659c931568bd9e2cc4>.
- Utkin, V.I. (1978). *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. MIR Publishers, Moscou.
- Utkin, V.I. (1992). *Sliding Modes in Control and Optimization*. Springer, Berlin.
- WHO (2020). World health organization. who announces covid-19 outbreak a pandemic. URL <https://www.euro.who.int/en/health-topics/health-emergencies/coronavirus-covid-19/news/news/2020/3/who-announces-covid-19-outbreak-a-pandemic>.