

Controladores de Ordem Fracionária: Análise Comparativa entre os Controladores CRONE de Primeira Geração e PID de Ordem Fracionária

Cristiano Osinski* Allan Ferrari* Carlos Gouvea da Silva*
Gideon Villar Leandro* Gustavo H. C. Oliveira*

* Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do
Paraná, PR, e-mail: cristiano.osinski@ufpr.br,
allanckferrari87@gmail.com, carlosalexandregouvea@gmail.com,
gede@eletrica.ufpr.br, gustavo@eletrica.ufpr.br

Abstract: In recent years, fractional order calculation has gained a lot of attention, especially in the field of dynamic systems theory and the design of control systems due to more precise control modeling and improvement possibilities. Fractional order controllers allow you to expand the possible control actions, so that the designer has a wider range of choice for your project. However, degrees of freedom are accompanied by a complexity in the synthesis. Within this perspective, this work proposes a comparison between fractional order PID controllers, whole order PID controllers and a first generation CRONE controller. In the comparative analysis, it was observed that the FOPID and CRONE controllers presented a satisfactory and similar performance, while the PID controller did not achieve the desired performance.

Resumo: Nos últimos anos, o cálculo de ordem fracionária ganhou muita atenção, especialmente no campo da teoria de sistemas dinâmicos e do projeto de sistemas de controle devido a possibilidades mais precisas de modelagem e aprimoramento de controle. Os controladores de ordem fracionária permitem expandir as possíveis ações de controle, para que o projetista tenha uma gama mais ampla de possibilidades de escolha para seu projeto. No entanto, os graus de liberdade são acompanhados com uma complexidade na síntese. Dentro dessa perspectiva, esse trabalho propõe uma comparação entre os controladores PID de ordem fracionária, PID de ordem inteira e um controlador CRONE de primeira geração. Na análise comparativa, observou-se que os controladores FOPID e CRONE apresentaram um desempenho satisfatório e semelhante, enquanto o controlador PID não alcançou o desempenho desejado.

Keywords: Fractional order calculus; CRONE controller; FOPID controller.

Palavras-chaves: Cálculo de ordem fracionária; Controlador CRONE; Controlador FOPID.

1. INTRODUÇÃO

O mundo industrial está atualmente experimentando um enorme desenvolvimento tecnológico, sob o efeito da concorrência e necessidades cada vez mais exigentes do ponto de vista tanto de qualidade quanto de desempenho. Esse progresso tecnológico e industrial deve-se, em grande parte, ao salto qualitativo experimentado pelas ferramentas de *software* e *hardware*, principalmente pelo surgimento de microprocessadores mais potentes, que possibilitou a aplicação de métodos e técnicas considerados, até pouco tempo atrás, como puramente teóricas. Isso também se deve ao desenvolvimento de pesquisas básicas em vários campos, como análise numérica e teoria de sistemas. Tudo isso tornou possível implementar métodos e abordagens, até então, muito complexas em aplicações de modelagem e controle de sistemas. Neste contexto, destaca-se o Cálculo de Ordem Fracionária que estende a derivação e a inte-

gração tradicionais a ordens não inteiras, teoria esta que surgiu no século XVII. Atualmente, possui grande popularidade entre pesquisadores tanto das ciências básicas como das engenharias. Hoje, diversas aplicações práticas podem ser encontradas na indústria e em sistemas complexos (Saxena, 2019; Krijnen et al., 2018; Essa et al., 2017).

As primeiras propostas de se utilizar o operador de ordem fracionária para sistemas de controle automático se deram através dos trabalhos de Tustin et al. (1958), Manabe (1960), Oustaloup (1981) e Axtell and Bise (1990). Em consonância com a ideia de usar controladores de ordem fracionária para o controle de sistemas dinâmicos, Oustaloup (1991a,b) desenvolveu o chamado controlador CRONE (abreviação de *Commande Robuste d'Ordre Non Entier*), que é uma metodologia de controle para o projeto de controladores robustos com realimentação de saída.

Como um método pertencente à classe de controladores robustos, o CRONE assume a presença de incertezas no modelo do processo, e o conhecimento a respeito des-

* Reconhecimento do suporte financeiro deve vir nesta nota de rodapé.

tas incertezas é utilizado no projeto dos parâmetros do controlador. Ao passar dos anos esse controlador evoluiu e passou a contar com três gerações, que são chamadas de CRONE de primeira, segunda e terceira geração. A metodologia CRONE foi desenvolvida para uma grande variedade de plantas, como lineares de fase não mínima (Lanusse, 1994), com atraso de tempo (Lanusse et al., 2008), plantas instáveis ou não amortecidas (Oustaloup et al., 1995). Esta metodologia também foi estendida para plantas multivariáveis (Lanusse et al., 2000; Gruel et al., 2009). Além disso, o CRONE tem muitas aplicações industriais, especialmente para veículos elétricos (Termous et al., 2018), controle de braços robóticos (Derbel et al., 2019) e plantas térmicas (Moreau et al., 2018).

Seguindo uma perspectiva semelhante, Podlubny (1994), propôs uma generalização do controlador PID, que é chamado de controlador $PI^\lambda D^\mu$ por envolver um integrador de ordem λ e um diferenciador de ordem μ . Este trabalho foi consolidado e expandido em Podlubny et al. (1997) e Podlubny (1999). Podlubny mostrou que, devido aos seus dois parâmetros extras, o controlador PID de ordem fracionária (FOPID) apresenta um desempenho superior aos controladores PID clássicos, visto que esse controlador possui mais liberdade de ajuste e, portanto, possui uma região mais ampla de parâmetros que estabilizam a planta sob controle. O controlador FOPID é muito utilizado em plantas com atraso de tempo (Muresan et al., 2015; Pan et al., 2011; Feliu-Batlle et al., 2009), plantas com não linearidades (Barbosa et al., 2007) e com plantas de alta ordem (Shah and Agashe, 2013; Das et al., 2011). No entanto, os graus adicionais de liberdade, ou seja, ordens variadas de integração e diferenciação, são acompanhados com alguma complexidade na síntese.

Tendo em vista os benefícios que os controladores de ordem fracionária podem trazer a um sistema de controle, esse trabalho visa fazer uma comparação entre os controladores CRONE de primeira geração, PID de ordem fracionária e PID de ordem inteira. O objetivo desse trabalho é apontar algumas vantagens e desvantagens de cada controlador.

O trabalho está dividido em seis seções. Na primeira seção contextualizou-se o tema do trabalho, assim como, apresentou-se os objetivos do artigo. A seção 2 é uma visão geral da teoria do cálculo fracionário. Na seção 3, apresenta-se o controlador PID de ordem fracionária. Já na seção 4 apresenta-se o controlador CRONE de primeira geração. Na seção 5, tem-se as simulações e resultados. Por fim, no capítulo 6, as conclusões serão apresentadas.

2. CÁLCULO DE ORDEM FRACIONÁRIA

O cálculo de ordem fracionária é um tópico com mais de 300 anos, teve sua origem em uma carta escrita por Leibniz ao seu amigo l'Hospital em 1695. Nessa carta, o significado de uma derivada de ordem meio é proposto e discutido. Entretanto foi apenas no início do século XIX que a generalização da diferenciação para ordens reais ou complexas foi formalizada com os trabalhos de Liouville (1832), Letnikov (1868) e Riemann (1876).

Portanto, o cálculo de ordem fracionária é uma generalização de integração e diferenciação para operadores de

ordem não inteira ${}_a\mathcal{D}_t^\alpha$, onde a e t denotam os limites da operação e α denota a ordem fracionária tal que:

$${}_a\mathcal{D}_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \Re(\alpha) > 0 \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde geralmente assume-se que $\alpha \in \Re$, mas também pode ser um número complexo (Chen et al., 2009b). Existem várias definições do operador fracionário, porém as consideradas de maior relevância foram desenvolvidas por Riemann-Liouville (RL), Caputo e Grünwald-Letnikov (GL). Estas definições são melhor detalhadas nos trabalhos de Oldham and Spanier (1974); Miller and Ross (1993); Petráš (2011); Podlubny (1999).

A escolha mais precisa do operador fracionário dependerá do problema abordado, por exemplo, a definição de Caputo é mais conveniente quando são estudadas equações diferenciais com condições iniciais (Chen and Holm, 2003) e que a definição de Grünwald-Letnikov (Hartley and Lorenzo, 1998; Lorenzo and Hartley, 2000) é a mais conveniente quando trabalha-se com problemas numéricos. A definição utilizada neste trabalho é a de Caputo por ser amplamente usada em projetos de sistemas de controle de ordem fracionária (Monje et al., 2010; Caponetto, 2010; Das and Suganthan, 2011; Pan and Das, 2016). Essa definição é dada por:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2)$$

onde, n é um inteiro que satisfaz a condição $n-1 < \alpha < n$, α é um número real e a e t são o limite de integração. Sua respectiva transformada de Laplace é dada por:

$$L[D^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (3)$$

onde: $(m-1 \leq \alpha < m)$.

Um sistema dinâmico de tempo contínuo de ordem fracionária pode ser expresso por uma equação diferencial fracionária da seguinte forma Monje et al. (2010):

$$a_n \mathcal{D}^{\alpha_n} y(t) + a_{n-1} \mathcal{D}^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + a_0 \mathcal{D}^{\alpha_0} y(t) = \quad (4) \\ b_m \mathcal{D}^{\beta_m} u(t) + b_{m-1} \mathcal{D}^{\beta_{m-1}} u(t) + \dots + b_0 \mathcal{D}^{\beta_0} u(t).$$

O sistema é dito de ordem proporcional se na equação (4) todas as ordens de derivação são múltiplos inteiros de uma ordem de base γ tal que $\alpha_k, \beta_k = k\gamma, \gamma \in \mathbb{R}^+$. O sistema pode ser expresso como:

$$\sum_{k=0}^n a_k \mathcal{D}^{k\gamma} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k \mathcal{D}^{k\gamma} u(t). \quad (5)$$

Se na equação (5) a ordem é $\gamma = 1/q, q \in \mathbb{Z}_+$, o sistema será de ordem racional.

Aplicando a transformada de Laplace na equação (4) com condições iniciais zero, a representação de entrada-saída do sistema de ordem fracionária pode ser obtida na forma de uma função de transferência.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}. \quad (6)$$

No caso de um sistema com ordem proporcional γ , a função de transferência de tempo contínuo é dada por:

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (s^\gamma)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (s^\gamma)^k}. \quad (7)$$

Levando em consideração $\lambda = s^\gamma$, a função da equação (5) pode ser vista como uma função pseudo-racional $H(\lambda)$:

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^m b_k (\lambda)^k}{\sum_{k=0}^n a_k (\lambda)^k}. \quad (8)$$

Com base no conceito da função pseudo-racional, uma representação no espaço de estados pode ser estabelecida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D^\gamma x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (9)$$

O modelo de espaço de estados permite a representação de sistemas de ordem fracionária de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). A seguinte equação pode ser usada para converter a representação do espaço de estados em uma função de transferência:

$$G(s) = C(s^\gamma I - A)^{-1} B + D, \quad (10)$$

onde I é uma matriz identidade. Quando controladores de ordem fracionária precisam ser implementados ou simulações precisam ser executadas, os controladores de ordem fracionária geralmente são substituídos por funções de transferência de ordem inteira com um comportamento próximo o suficiente do desejado, mas muito mais fácil de manusear (Monje et al., 2010). Um dos métodos mais utilizados para essa aproximação é o filtro de Oustaloup (Oustaloup et al., 2000), conforme equação abaixo:

$$C_R(s) = \prod_1^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}}, \quad (11)$$

onde, $\omega'_1 = \sqrt{\eta} \omega_1$, $\omega_l = \alpha \omega'_1$, $\omega'_{i+1} = \alpha \eta \omega'_i$, $\omega_{i+1} = \alpha \eta \omega_i$, N é o número de polos e zeros e:

$$\alpha = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{n}{N}}, \quad (12)$$

$$\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{\frac{1-n}{N}}. \quad (13)$$

3. CONTROLADOR PID DE ORDEM FRACIONÁRIA

Dentro da configuração usual de sistemas de controle com realimentação unitária (figura 1), o conhecido controlador PID em sua forma paralela é definido pela equação (14):

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (14)$$

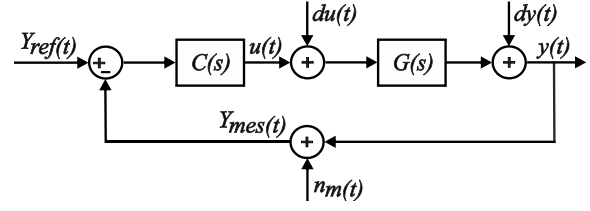


Figura 1. Sistema de controle em malha fechada, com sinais de referência e perturbação usuais.

Na figura 1, $G(s)$ é a função de transferência do processo, $u(t)$ é o sinal de controle, $y(t)$ a saída a ser controlada e $y_{mes}(t)$ sua medida; $C(s)$ é o controlador linear que fornece o esforço de controle $u(t)$; $Y_{ref}(t)$ é o valor de referência (desejado) da saída $y(t)$; $du(t)$ é um distúrbio na entrada da planta; $dy(t)$ é um distúrbio na saída da planta; $n_m(t)$ é um ruído de medição, normalmente, um sinal de alta frequência.

Na equação (14), substituindo s por s elevado a potências não inteiras, chega-se à generalização do controlador PID clássico denominada de FOPID (do inglês *Fractional Order PID*). Assim, o PID paralelo da equação (14) se torna um $PI^\lambda D^\mu$ definido por:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu, \quad (15)$$

sendo λ e $\mu \in \mathbb{R}$. Esse controlador $PI^\lambda D^\mu$ foi proposto pela primeira vez por Podlubny (1994). O interesse deste controlador é justificado por possuir maior flexibilidade de projeto, uma vez que traz dois parâmetros adicionais de projeto, λ e μ . O PID tradicional é obtido quando ambos são iguais a 1. Alguns trabalhos, como Monge et al, (2004); Cervera et al, (2006); Valério, (2013) são dedicados a esta classe de controladores e explicam como usar essa flexibilidade para resolver problemas de controle, mesmo que frequentemente, apenas parte integral ou derivativa seja usada (portanto, apenas um PI^λ ou PD^μ). Da figura 2, pode-se afirmar que todas as famílias do controlador PID clássico podem ser derivadas da equação (15).

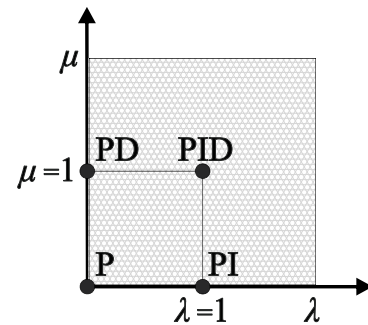


Figura 2. Plano controlador FOPID.

Considere uma comparação entre um PID clássico e um de ordem fracionária no domínio da frequência fornecida na figura 3 por meio de um diagrama de Bode. Como pode ser observado, a introdução de ordens fracionárias para as parcelas integral e derivativa do controlador PID altera sua condição tradicional em baixa e alta frequência, que é

a declividade de $\pm 20 \text{ dB/dec}$ associada a um ângulo de $\pm 90^\circ$.

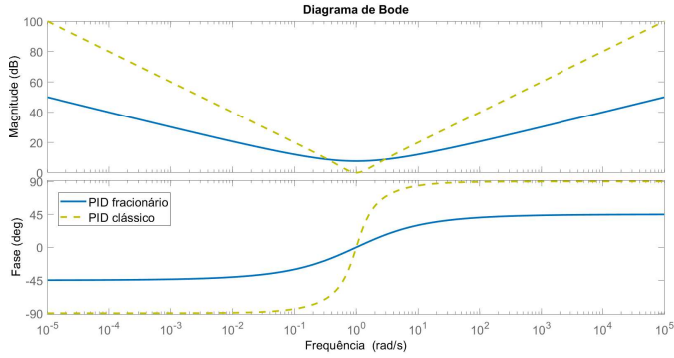


Figura 3. Diagrama de Bode de uma resposta em frequência de um controlador PID clássico com $k_p = k_i = k_d = 1$ e um controlador PID de ordem fracionária com $k_p = k_i = k_d = 1$; $\lambda = \mu = 0,5$.

Devido a esta flexibilidade adicional proporcionada pelos controladores PID de ordem fracionária, espera-se que estes possam substituir suas variantes clássicas de ordem inteira em aplicações de controle industrial (Chen et al., 2009a). Neste sentido, as técnicas de ajuste automático dos parâmetros do controlador desempenham um papel significativo na aceleração desse processo (Tepljakov, 2011). Em termos de sintonia de controladores FOPID, basicamente, três métodos de ajuste são distinguíveis, a saber: (i) regras de ajuste; (ii) métodos analíticos; (iii) métodos numéricos (de Oliveira Valério, 2005).

De forma análoga ao que já existe para controladores PID de ordem inteira, e pela mesmas razões, o controlador PID de ordem fracionária pode ser modificado de modo a conter também um filtro na sua parte derivativa. Desta forma, obtém-se:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + \frac{k_d s^\mu}{1 + \tau_f s^\gamma}, \quad (16)$$

sendo τ_f a constante de tempo do filtro da parte derivativa. Dependendo do valor de γ , $C(s)$ é bi-próprio para $\gamma = \mu$ e estritamente próprio para $\gamma > \mu$ (Lanusse et al., 2014).

4. CONTROLADORES CRONE

Assim como o controlador FOPID, o controlador CRONE também é uma estrutura de controle de ordem fracionária aplicada tanto em plantas de ordem fracionária como em plantas de ordem inteira. A metodologia CRONE é uma metodologia simples de projeto de controle robusto no domínio da frequência. Como foi descrito na primeira seção, existem três gerações de controladores CRONE e cada geração tem seu método de ajuste e é aplicada para uma classe específica de sistema e domínio de incerteza. Como o foco deste trabalho está concentrado na primeira geração, apenas esta será apresentada no trabalho.

4.1 Primeira geração CRONE

O controlador CRONE de primeira geração baseia-se no estabelecimento de um controlador com fase constante na região da frequência de cruzamento de ganho garantindo

que, quando houver perturbações na planta que resultem em variações de ganho na região dessa frequência, o controlador garanta a robustez da margem de fase (Oustaloup and Bansard, 1993). Esta estratégia deve ser usada quando a frequência ω_{cg} está dentro de uma faixa de frequência onde a fase da planta é constante (com relação à frequência). Nesta faixa onde a resposta de frequência da planta é assintótica (esta faixa de frequência é chamada de banda de comportamento assintótico da planta), as variações da planta são apenas como ganho. Dentro de uma faixa de frequência $[\omega_A, \omega_B]$ em torno da frequência desejada ω_{cg} , o controlador CRONE é definido a partir da função de transferência de ordem fracionária de um integro-diferenciador de ordem n :

$$C_F(s) = C_0 s^n, \quad (17)$$

com n e $C_0 \in \mathbb{R}$. A fase constante $n\pi/2$ caracteriza este controlador em torno da frequência ω_{cg} . Quando o ganho da planta ou as frequências dos cantos da planta variam (as últimas são muito diferentes da frequência ω_{cg}), o controlador de fase constante C_F não modifica a margem de fase (figura 4). Assim, a faixa de frequência $[\omega_A, \omega_B]$ deve ser igual à faixa onde a frequência ω_{cg} pode variar. Se o comportamento assintótico da planta for um comportamento de ordem p , a margem de fase poderá ser calculada pela equação (18) (Sabatier et al., 2015).

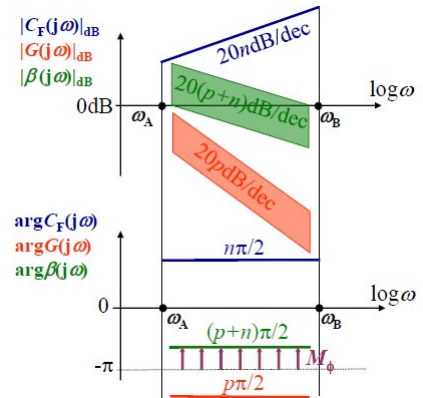


Figura 4. Robustez da margem de fase M_ϕ fornecida por um controlador CRONE.

$$M_\phi = (n + p + 2) \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

A fim de tornar o controlador bipróprio, a derivada de ordem fracionária de (17) deve ser substituída por uma derivada de banda limitada usando as frequências ω_l e ω_h :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_l}{\omega_h} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_l}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n. \quad (19)$$

Então, para gerenciar o erro de estado estacionário e o nível de sensibilidade de controle, o C_F deve ser complexificado para incluir um integrador de faixa limitada de ordem n_I e um filtro passa-baixa de ordem n_F :

$$C_F(s) = C_0 \left(\frac{\omega_I}{s} + 1 \right)^{n_I} \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_I}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^n \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_F} \right)^{n_F}}, \quad (20)$$

onde n_I e n_F são, respectivamente, ordens inteiras positivas de um integrador com frequência de corte ω_I e de um filtro passa-baixas com frequência de corte ω_F ; n é um número real positivo, representando a ordem fracionária do controlador e C_0 é uma constante. Então, a ordem fracionária n e o ganho C_0 devem garantir a margem de fase nominal necessária M_ϕ e a frequência de cruzamento de ganho em malha aberta ω_{cg} :

$$n = \frac{-\pi + M_\phi - \arg G(j\omega_{cg}) + n_F \arctan \frac{\omega_{cg}}{\omega_F} + n_I \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\omega_{cg}}{\omega_I} \right) \right)}{\arctan \left(\frac{\omega_{cg}}{\omega_l} \right) - \arctan \left(\frac{\omega_{cg}}{\omega_h} \right)}, \quad (21)$$

$$C_0 = \frac{\left(1 + \frac{\omega_{cg}^2}{\omega_F^2} \right)^{0,5n_F}}{|G(j\omega_{cg})| \left(\frac{\omega_h}{\omega_l} \right)^{0,5n} \left(1 + \frac{\omega_I^2}{\omega_{cg}^2} \right)^{0,5n_I}}. \quad (22)$$

A robustez ideal da margem de fase é garantida apenas se a frequência de cruzamento de ganho estiver contida em um intervalo no qual a planta apresente fase constante, ou seja, plantas com característica de perturbação apenas de ganho. Para plantas em que não é possível estabelecer uma banda com fase constante na região de frequência de cruzamento de ganho, a segunda geração do controlador CRONE deve ser utilizada.

5. SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Para esta análise, considera-se a planta definida no livro de Sabatier et al. (2015):

$$G(s) = \frac{k}{s(1 + \tau s)}, \quad (23)$$

com $k = 10$, $\tau_0 = 1000s$, $\tau_0/9 \leq \tau \leq 9\tau_0$, onde $G_l(s)$ refere-se a planta com o valor mínimo de τ e $G_h(s)$ refere-se a planta com o valor máximo de τ . As especificações para o sistema controlado são as seguintes: valor nominal da frequência de cruzamento de ganho em malha aberta (ω_{cg}) igual a 5 rad/s com uma margem de fase de 50° . O diagrama de Bode da planta a ser controlada para os 3 valores de τ é mostrado na figura 5.

Em torno de 5 rad/s, a fase da planta é constante, enquanto sua magnitude é incerta. Essa incerteza na magnitude pode ser calculada extraindo, no instante 5 rad/s, os valores da magnitude de $G_l(s)$ e $G_h(s)$. Assim, tem-se que a incerteza na magnitude da planta é de $-48,9\text{dB} - (-87\text{dB}) = 38,1\text{dB}$. A incerteza da fase também pode ser calculada, sendo $180 - 179,97 = 0,03^\circ$. Antes de dar andamento ao projeto do controlador, é necessário saber qual a faixa de frequência $[\omega_A, \omega_B]$ onde ω_{cg} possa variar como pode ser visto no gráfico da figura 4.

$$n + p = \frac{50}{90} - 2 = -1,44. \quad (24)$$

A partir da taxa de redução do ganho de magnitude em malha aberta e da incerteza de magnitude da planta,

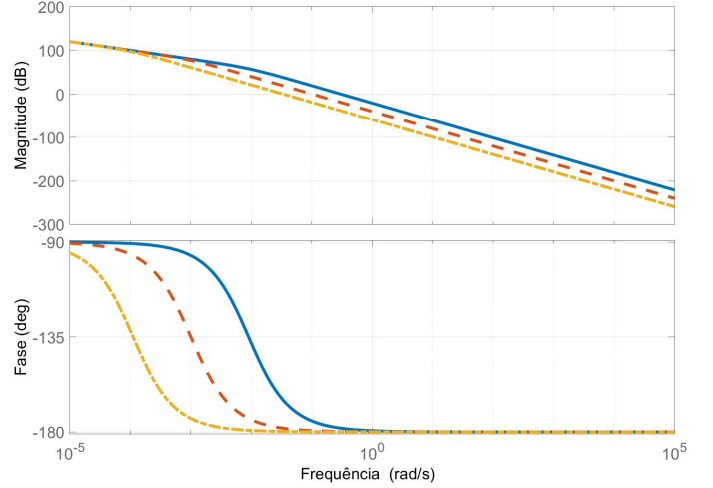


Figura 5. Diagrama de Bode da planta a ser controlada para os três valores de τ : $\tau_{nom}/9$ (---), τ_{nom} (—) e $\tau_{nom}9$ (- -).

para garantir a robustez da margem da fase, a faixa de frequência $[\omega_A, \omega_B]$ precisa cobrir 1,32 década:

$$\log_{10} \frac{\omega_B}{\omega_A} = \left| \frac{38,1}{20(n+p)} \right| = 1,32, \quad (25)$$

logo,

$$\frac{\omega_B}{\omega_A} = 10^{1,32} = 21. \quad (26)$$

Como a planta nominal leva à magnitude média da resposta de frequência de malha aberta em torno de 5 rad/s, então tem-se que:

$$\omega_A = \frac{\omega_{cg}}{\sqrt{21}} = 1,09 \text{ rad/s}, \quad (27)$$

e,

$$\omega_B = \omega_{cg} \sqrt{21} = 22,91 \text{ rad/s}. \quad (28)$$

Levando em consideração a margem de fase necessária, a frequência de cruzamento de ganho em malha aberta pode variar de cerca de 1,09 a 22,91 rad/s. Dentro dessa faixa de frequência, a fase nominal da planta varia cerca de $0,058^\circ$. Assim, o controlador CRONE de primeira geração pode ser usado para obter um controlador robusto. Para atingir uma fase constante, as frequências ω_l e ω_h são ajustadas para:

$$\omega_l = \frac{\omega_A}{10} = 0,109 \text{ rad/s}, \quad (29)$$

e,

$$\omega_h = 10\omega_B = 229,1 \text{ rad/s}. \quad (30)$$

Como n_I e n_F são definidos como 1, visando escolher uma margem de segurança, as frequências ω_l e ω_F são definidas como:

$$\omega_I = \frac{\omega_{cg}}{200} = 0,02500 \text{ rad/s}, \quad (31)$$

e,

$$\omega_F = 200\omega_{cg} = 1000 \text{ rad/s}. \quad (32)$$

Como $|G(j5)| = 4.10^{-4}$ e $\arg G(j5) = -180^\circ$, usando as equações (21) e (22), a margem de fase nominal e a frequência de cruzamento de ganho em malha aberta são garantidas com $n = 0,5778$ e $C_0 = 274,1891$:

$$n = \frac{-\pi + 50 - \arg G(j5) + 1 \arctan \frac{5}{1000} + 1 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{5}{0,02500} \right) \right)}{\arctan \left(\frac{5}{0,109} \right) - \arctan \left(\frac{5}{229,1} \right)} = 0,57, \quad (33)$$

$$C_0 = \frac{\left(1 + \frac{5^2}{1000^2} \right)^{0,5,1}}{|G(j5)| \left(\frac{229,1}{0,109} \right)^{0,5,0,5778} \left(1 + \frac{0,02500^2}{5^2} \right)^{0,5,1}} = 274,1891. \quad (34)$$

Portanto, substituindo esses valores na equação (20) chega-se ao controlador CRONE de primeira geração:

$$C_F(s) = 274,1891 \left(\frac{0,125}{s} + 1 \right) \left(\frac{1 + \frac{s}{0,233}}{1 + \frac{s}{107}} \right)^{0,624} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{200} \right)}. \quad (35)$$

Para que seja possível a implementação do controlador CRONE de primeira geração da equação (35), faz-se necessária a aproximação da ordem 0,5778 para uma ordem racional. Para tanto, utiliza-se o método de aproximação de Oustaloup. Como a faixa de frequência $[\omega_l, \omega_h]$ cobre quatro décadas, $N = 5$ é suficiente para aproximar a parte da ordem fracionária que aparece na equação (35). As taxas recursivas são definidas por: $\alpha = 2,4208$ e $\eta = 1,9077$. Então, o controlador CRONE de primeira geração torna-se:

$$C_R(s) = 274,1891 \left(\frac{0,02500}{s} + 1 \right) \frac{1 + \frac{s}{0,1507}}{1 + \frac{s}{0,3648}} \frac{1 + \frac{s}{0,6959}}{1 + \frac{s}{1,6846}} \frac{1 + \frac{s}{3,21}}{1 + \frac{s}{7,77}} \frac{1 + \frac{s}{14,84}}{1 + \frac{s}{35,92}} \frac{1 + \frac{s}{68,53}}{1 + \frac{s}{165,9}} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{1000} \right)}. \quad (36)$$

Para o projeto do controlador PID de ordem inteira, considera-se as mesmas especificações exigidas no projeto do controlador CRONE de primeira geração, sendo ω_{cg} igual a 5 rad/s com uma margem de fase de 50° . Para se chegar aos valores do PID, realiza-se uma otimização utilizando o comando *pidtune* do Matlab. Além dos comandos k_p , k_i , k_d , também otimiza-se o variável referente ao filtro derivativo do controlador. Assim chega-se ao controlador PID da equação (37):

$$C_{PID}(s) = 1590 + \frac{1430}{s} + \frac{440s}{0,00175s + 1}. \quad (37)$$

Para o projeto do controlador FOPID, novamente considera-se as mesmas especificações exigidas no projeto do controlador CRONE de primeira geração, sendo ω_{cg} igual a 5 rad/s com uma margem de fase de 50° . Para o projeto e para as simulações considera-se a função de transferência da equação (16). Para encontrar os parâmetros do controlador, realiza-se uma otimização utilizando o comando

fpid_optim, onde utiliza-se o algoritmo de Nelder-Mead e o critério ITAE como índice de desempenho. Assim chega-se ao controlador FOPID da equação (38), considerando $\gamma = 1$. Para aproximar esse controlador a um controlador de ordem inteira, utiliza-se o filtro de Oustaloup discutido na seção 2, com $N = 5$.

$$C_{FOPID}(s) = 175 + \frac{9}{s^{0,95}} + \frac{650s^{0,61}}{0,002s + 1}. \quad (38)$$

A figura 6 apresenta o diagrama de Bode dos controladores. Através do diagrama pode-se perceber que, diferentemente do controlador PID, o controlador CRONE e o controlador FOPID fornecem uma fase constante (50°) em torno da frequência de cruzamento de ganho (5 rad/s).

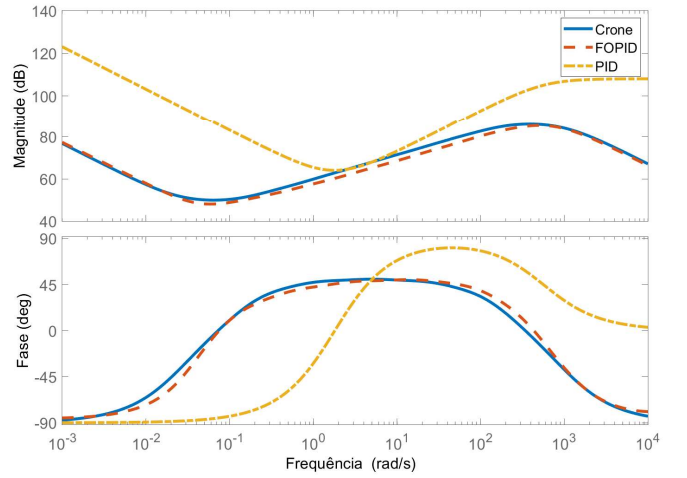


Figura 6. Diagrama de Bode dos controladores CRONE, PID e FOPID.

O fator chave no melhor ajuste dos controladores de ordem fracionária é justamente o maior número de parâmetros que esses controladores possuem. Se por um lado o desempenho é melhorado, por outro, os controladores de ordem fracionária, quando racionalizados, possuem uma ordem mais elevada em relação aos controladores PID convencionais.

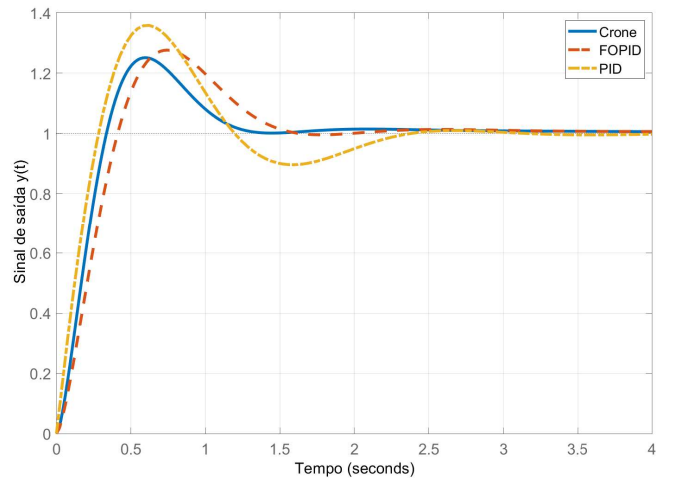


Figura 7. Resposta ao degrau em malha fechada dos controladores CRONE, PID e FOPID.

A figura 7 apresenta a resposta ao degrau em malha fechada dos controladores. Observa-se que os controladores tiveram um desempenho semelhante, onde o controlador CRONE levou uma leve vantagem em relação aos outros controladores. O desempenho do CRONE seria ainda mais visível se, em vez de utilizarmos a planta $G(s)$, tivéssemos utilizado as plantas $G_l(s)$ ou $G_h(s)$. Isso aconteceria graças à característica de robustez do controlador CRONE.

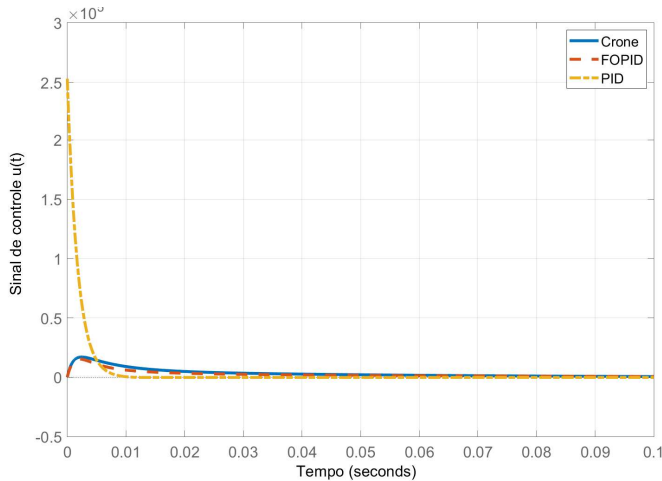


Figura 8. Sinal de controle dos controladores CRONE, PID e FOPID.

Analisando o sinal de controle dos controladores da figura 8, observa-se que o esforço de controle dos controladores FOPID e CRONE novamente se assemelham, enquanto o esforço de controle do controlador PID mostra-se muito elevado.

6. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou dois dos controladores de ordem fracionária mais utilizados na atualidade. Com o intuito de demonstrar o funcionamento de ambos, realizou-se um estudo de caso, onde sintonizou-se os controladores PID, FOPID e CRONE com base nos mesmos critérios de desempenho. Observou-se que os controladores FOPID e CRONE apresentaram um desempenho satisfatório e semelhante, enquanto o controlador PID não alcançou o desempenho desejado.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

Axtell, M. and Bise, M.E. (1990). Fractional calculus application in control systems. In *IEEE Conference on Aerospace and Electronics*, 563–566. IEEE.

Barbosa, R.S., Tenreiro Machado, J., and Galhano, A.M. (2007). Performance of fractional pid algorithms controlling nonlinear systems with saturation and backlash phenomena. *Journal of Vibration and Control*, 13(9-10), 1407–1418.

Caponetto, R. (2010). *Fractional order systems: modeling and control applications*, volume 72. World Scientific.

Chen, W. and Holm, S. (2003). Modified szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(5), 2570–2574.

Chen, Y., Petras, I., and Xue, D. (2009a). Fractional order control - a tutorial. In *2009 American Control Conference*, 1397–1411. doi:10.1109/ACC.2009.5160719.

Chen, Y., Petras, I., and Xue, D. (2009b). Fractional order control-a tutorial. In *American Control Conference, 2009. ACC'09.*, 1397–1411. IEEE.

Das, S. and Suganthan, P.N. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 15(1), 4–31. doi:10.1109/TEVC.2010.2059031.

Das, S., Saha, S., Das, S., and Gupta, A. (2011). On the selection of tuning methodology of fopid controllers for the control of higher order processes. *ISA transactions*, 50(3), 376–388.

de Oliveira Valério, D.P.M. (2005). Fractional robust system control. *Universidade Técnica de Lisboa*.

Derbel, N., Ghommam, J., and Zhu, Q. (2019). *New Developments and Advances in Robot Control*, volume 175. Springer.

Essa, M.E.S.M., Aboelela, M.A., and Hassan, M.A.M. (2017). Application of fractional order controllers on experimental and simulation model of hydraulic servo system. In *Fractional order control and synchronization of chaotic systems*, 277–324. Springer.

Feliu-Batlle, V., Rivas-Perez, R., and Castillo-Garcia, F. (2009). Fractional order controller robust to time delay variations for water distribution in an irrigation main canal pool. *Computers and electronics in agriculture*, 69(2), 185–197.

Gruel, D.N., Lanusse, P., and Oustaloup, A. (2009). Robust control design for multivariable plants with time-delays. *Chemical Engineering Journal*, 146(3), 414–427.

Hartley, T. and Lorenzo, C. (1998). Initialization, conceptualization, and application in the generalized fractional calculus. *National Aeronautics and Space Administration*.

Krijnen, M.E., van Ostayen, R.A., and HosseinNia, H. (2018). The application of fractional order control for an air-based contactless actuation system. *ISA transactions*, 82, 172–183.

Lanusse, P. (1994). *De la commande CRONE de 1ère generation à la commande CRONE de 3ème generation*. Ph.D. thesis, Ph. D. thesis, Université Bordeaux 1.

Lanusse, P., Oustaloup, A., and Mathieu, B. (2000). Robust control of lti square mimo plants using two crone control design approaches. *IFAC Proceedings Volumes*, 33(14), 379–384.

Lanusse, P., Benlaoukli, H., Nelson-Gruel, D., and Oustaloup, A. (2008). Fractional-order control and interval analysis of siso systems with time-delayed state. *IET Control Theory & Applications*, 2(1), 16–23.

Lanusse, P., Oustaloup, A., and Sabatier, J. (2014). Robust fractional order pid controllers: The first generation crone csd approach. In *ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications 2014*, 1–6. IEEE.

Letnikov, A. (1868). *Theory of differentiation of arbitrary order*. *Mat Sb* 3:1–68.

- Liouville, J. (1832). Sur le calcul des différentielles à indices quelconques (in french), j. *Ecole Polytechnique*13, 71.
- Lorenzo, C.F. and Hartley, T.T. (2000). Initialized fractional calculus.
- Manabe, S. (1960). The non-integer integral and its application to control systems. *Journal of Institute of Electrical Engineers of Japan*, 80(860), 589–597.
- Miller, K.S. and Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.
- Monje, C.A., Chen, Y., Vinagre, B.M., Xue, D., and Feliu-Batlle, V. (2010). *Fractional-order systems and controls: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media.
- Moreau, X., Abi Zeid Daou, R., and Christophy, F. (2018). Comparison between the second and third generations of the crone controller: Application to a thermal diffusive interface medium. *Fractal and fractional*, 2(1), 5.
- Muresan, C.I., Dulf, E.H., and Both, R. (2015). A novel tuning algorithm for fractional order imc controllers for time delay processes. *International Journal of Mechanical Engineering and Robotics Research*, 4(3), 218.
- Oldham, K. and Spanier, J. (1974). *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, volume 111. Elsevier.
- Oustaloup, A. (1981). Linear feedback control systems of fractional order between 1 and 2. In *Proc. of the IEEE Symposium on Circuit and Systems*, volume 4.
- Oustaloup, A. (1991a). Commande crone (editions hermes, paris).
- Oustaloup, A. (1991b). The crone control. ecc'91.
- Oustaloup, A. and Bansard, M. (1993). First generation crone control. In *Proceedings of IEEE Systems Man and Cybernetics Conference-SMC*, volume 2, 130–135. IEEE.
- Oustaloup, A., Levron, F., Mathieu, B., and Nanot, F.M. (2000). Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 47(1), 25–39.
- Oustaloup, A., Mathieu, B., and Lanusse, P. (1995). The crone control of resonant plants: application to a flexible transmission. *European Journal of control*, 1(2), 113–121.
- Pan, I. and Das, S. (2016). Fractional order fuzzy control of hybrid power system with renewable generation using chaotic pso. *ISA transactions*, 62, 19–29.
- Pan, I., Das, S., and Gupta, A. (2011). Handling packet dropouts and random delays for unstable delayed processes in ncs by optimal tuning of $\pi\lambda d\mu$ controllers with evolutionary algorithms. *ISA transactions*, 50(4), 557–572.
- Petráš, I. (2011). *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Springer Science & Business Media.
- Podlubny, I. (1994). Fractional-order systems and fractional-order controllers. *Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Kosice*, 12(3), 1–18.
- Podlubny, I. (1999). Fractional-order systems and $\pi/\sup/\spl\lambda/d/\sup/\spl\mu/-$ controllers. *IEEE Transactions on automatic control*, 44(1), 208–214.
- Podlubny, I., Dorcak, L., and Kostial, I. (1997). On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and $\pi/\sup/\spl\lambda/d/\sup/\spl\mu/-$ controllers. In *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 5, 4985–4990. IEEE.
- Riemann, B. (1876). *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, chapter XIX – Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*. Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, pp 331–344.
- Sabatier, J., Lanusse, P., Melchior, P., and Oustaloup, A. (2015). Fractional order differentiation and robust control design. *Intelligent systems, control and automation: science and engineering*, 77, 13–18.
- Saxena, S. (2019). Load frequency control strategy via fractional-order controller and reduced-order modeling. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 104, 603–614.
- Shah, P. and Agashe, S. (2013). Design and optimization of fractional pid controller for higher order control system. In *International conference of IEEE ICART*, 588–592.
- Tepljakov, A. (2011). Fractional-order calculus based identification and control of linear dynamic systems. *Tallinn University of Technology*.
- Termous, H., Moreau, X., Francis, C., and Shraim, H. (2018). From the standard pid to the crone first generation controller: Application to an anti-roll system for electric vehicles. *IFAC-PapersOnLine*, 51(4), 733–738.
- Tustin, A., Allanson, J., Layton, J., and Jakeways, R. (1958). The design of systems for automatic control of the position of massive objects. *Proceedings of the IEE-Part C: Monographs*, 105(1S), 1–57.