

Seleção das Matrizes da Saída Controlada por Realimentação de Estados com norma \mathcal{H}_2 baseada na Solução Algébrica de Riccati

Denner Guilhon * Pablo Siqueira Meirelles **

* Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual do Maranhão, MA, (e-mail: dennerguilhon@professor.uema.br).

** Departamento de Mecânica Computacional, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade de Campinas, SP (e-mail: pablo@fem.unicamp.br)

Abstract: In view of the difficulties faced by the designer to perform control of a system through state feedback with \mathcal{H}_2 norm, specifically regarding the choice of the matrices of the controlled output, this work proposes a methodology based on the algebraic Riccati equation solution. In this context, it will be shown that it was not only possible to define the matrices of the controlled output, but also how to obtain them according to fixed time-domain performance criteria. The proposed methodology is simulated using the model of a vehicle, in order to perform reference signal tracking control, in the particular case of double lane change.

Resumo: Diante das dificuldades enfrentadas pelo projetista para realizar controle de um sistema por realimentação de estados com norma \mathcal{H}_2 , especificamente na escolha das matrizes da saída controlada, o presente trabalho vem propor uma metodologia baseada na solução da equação algébrica de Riccati. Nesse contexto, será mostrado ser possível não só definir as matrizes da saída controlada, mas como obtê-las em função de critérios fixados de desempenho no domínio do tempo. A metodologia proposta é simulada para o modelo de um veículo, com o intuito de executar o controle de rastreamento de sinal de referência, no caso particular de dupla mudança de faixa.

Keywords: \mathcal{H}_2 norm ; algebraic Riccati equation; controlled output; reference signal tracking control; double lane change.

Palavras-chaves: norma \mathcal{H}_2 ; equação algébrica de Riccati; saída controlada; controle de rastreamento de sinal de referência; dupla mudança de faixa.

1. INTRODUÇÃO

O problema de controle \mathcal{H}_2 consiste em encontrar um controlador tal que o sistema realimentado em malha fechada seja estável e a norma \mathcal{H}_2 de sua função de transferência seja minimizada (Liu and Yao, 2016). Uma revisão sobre o assunto pode ser encontrada em (Kwakernaak, 2002) e (Dullerud and Paganini, 2005). Nesse último, são mostradas tanto soluções do problema de controle \mathcal{H}_2 usando as equações de Riccati quanto através de desigualdades matriciais lineares.

Para sistemas expressos em espaço de estado, Doyle et al. (1989) obteve um regulador ótimo na forma de observador ao resolver duas equações algébricas de Riccati (na sigla em inglês, ARE). Já no proposto por Schmidt and Haasdonk (2016), duas ARE são usadas num cenário de equações diferenciais parciais paramétricas. Por sua vez, Ishihara et al. (2003) sugeriu uma estratégia de controle por realimentação de estados com norma \mathcal{H}_2 para sistemas

descritores baseada nas equações algébricas de Riccati generalizadas (na sigla em inglês, GARE).

Uma característica comum a muitos trabalhos sobre o problema de controle \mathcal{H}_2 é que propõem diferentes formas de encontrar controladores que estabilizam o sistema e minimizam sua norma \mathcal{H}_2 , dada uma saída controlada selecionada pelo projetista. São indicadas as restrições que as matrizes da saída devem obedecer, em termos de estabilidade, observabilidade e autovalores do hamiltoniano do sistema (Colaneri et al., 1997). Porém, nada é dito sobre quais valores tais matrizes da saída controlada devem assumir.

O presente trabalho parte do conceito mostrado por Kumare and Jerome (2016), que propôs um algoritmo para a seleção das matrizes Q e R de um controlador LQR baseado na solução algébrica da equação de Riccati. Uma característica importante da sua proposta é que a solução algébrica é dependente do modelo matemático do sistema utilizado. Assim, será aplicada a mesma ideia para o modelo de um veículo autônomo, com o intuito de realizar controle de seguimento de trajetória. Dessa maneira, realizou-se um algoritmo capaz de encontrar as matrizes da saída controlada do problema de controle

* Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo suporte financeiro indispensável à realização desse trabalho.

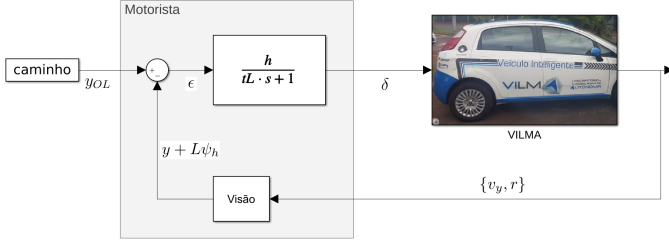


Fig. 1. Esquema de controle de trajetória utilizado. Dado um ponto L à frente, o bloco **Motorista** estima o estereçamento δ a ser aplicado ao veículo. Inspirado na Fig. 10.1 de (Abe, 2015).

\mathcal{H}_2 . Tal algoritmo utiliza como base a solução algébrica da equação de Riccati, partindo das especificações de desempenho no domínio do tempo a serem atingidos pelo sistema.

2. PROBLEMA

2.1 Modelagem do Veículo

O modelo matemático do veículo a ser utilizado é adaptado de Hu et al. (2016), com representação em espaço de estados dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \dot{r} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_y \\ r \\ e_1 \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_f + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \rho v_x, \quad (1)$$

sendo v_y a velocidade lateral, r é a velocidade angular do veículo, e_1 é a distância do centro de gravidade (C.G.) do veículo ao centro da faixa e ψ é o erro entre o ângulo de guinada real do veículo ψ_h e o desejado ψ_d , considerando que $r = \dot{\psi}_h$. Além disso, v_x é a velocidade longitudinal, ρ a curvatura da pista, δ_f é o estereçamento das rodas e temos

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{C_f + C_r}{mv_x}, & a_{12} &= -v_x - \frac{C_f - C_r}{mv_x}, \\ a_{21} &= -\frac{C_f l_f - C_r l_r}{I_z}, & a_{22} &= -\frac{C_f l_f^2 + C_r l_r^2}{I_z v_x}, \\ b_1 &= \frac{C_f}{m}, & b_2 &= \frac{C_f l_f}{I_z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Os dados adotados para o veículo são do VILMA01¹, conforme mostrados na Tabela 1.

Tabela 1. Parâmetros construtivos do VILMA01. Fonte: (Bautista, 2015)

VILMA01		
Parâmetro	Valor	Var
Massa do veículo	1259,8 kg	m
Momento de Inércia do Veículo	2730 kg/m ²	I_z
Distância do C.G até o eixo frontal	0,89 m	l_f
Distância do C.G até o eixo traseiro	1,61 m	l_r
Coef. de rigidez lateral das rodas diant	70000 N/rad	C_f
Coef. de rigidez lateral das rodas tras.	80000 N/rad	C_r

¹ Veículo Inteligente do Laboratório de Mobilidade Autônoma, do Laboratório de Mobilidade Autônoma (LMA) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEM) da Unicamp.

O veículo segue um trajeto de referência de acordo com um modelo de motorista definido em (Abe, 2015) como

$$H(s) = \frac{h}{\tau_L s + 1}, \quad (3)$$

sendo que foi adotado $h = 0,02$ e $\tau_L = 0,2$. O bloco de realimentação (conforme Fig. 1) toma o estados v_y e r e retorna $y + L\psi_h$, assumindo $|\psi_h| \ll 1^\circ$ e uma distância à frente L . Assim, considerando o deslocamento lateral do caminho a ser percorrido y_{OL} , o erro ϵ é definido como desvio do veículo em relação ao percurso em um ponto a frente L , expresso por

$$\epsilon = y + L\psi_h - y_{OL}. \quad (4)$$

Com o erro ϵ em (4) e o motorista em (3), podemos encontrar o estereçamento δ_f , que é a entrada do veículo.

2.2 Projeto de Controle LQR: abordagem analítica

Em Kumare and Jerome (2016), é sugerido um método analítico para encontrar as matrizes de um regulador linear quadrático usando a equação algébrica de Riccati. Considerando um sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \quad (5)$$

$$y = Cx + Du, \quad (6)$$

o problema LQR padrão é obter u tal que se minimize

$$J(t) = \int_0^\infty [x'Qx + u'Ru] dt, \quad (7)$$

sendo $Q = Q'$ uma matriz semidefinida positiva que penaliza o afastamento dos estados do sistema do equilíbrio, e $R = R'$ uma matriz definida positiva que penaliza a entrada de controle. O ganho ótimo K de controle por realimentação de estados pode ser encontrado resolvendo a equação algébrica de Riccati

$$A'P + PA + Q - PBR^{-1}B'TP = 0, \quad (8)$$

com $K = R^{-1}B'TP$ e $P \in \mathbb{R}$.

Para solucionar (8), definimos as matrizes

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}, \quad R = r, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Devemos, então, encontrar a equação característica do sistema fechado por realimentação de estados, ou seja $|sI - A + BK| = 0$. Definindo uma equação característica desejada de acordo com a ordem do sistema, podemos encontrar os valores de p_{ij} em função de ζ e ω_n , o fator de amortecimento e frequência natural, respectivamente. Kumare and Jerome (2016) usam uma equação de terceira ordem, $(s + \zeta\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$. Os autores usam as matrizes definidas em (9), substituindo-as em (8), para encontrar razões q_i/r em função de ζ e ω_n .

2.3 Projeto de Controle \mathcal{H}_2

Seja a planta controlada (Colaneri et al., 1997)

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad (10)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u. \quad (11)$$

A partir do sistema (10)-(11), podemos encontrar um controlador \mathcal{H}_2 por realimentação de estados que respeite a equação algébrica de Riccati

$$PA_c + A'_c P - PB_2 B'_2 P + C'_{1c} C_{1c} = 0, \quad (12)$$

sendo

$$A_c = A - B_2 D'_{12} C_1, \quad (13)$$

$$C_{1c} = (I - D_{12} D'_{12}) C_1, \quad (14)$$

e o ganho de realimentação de estados definido como

$$F_2 = -B'_2 P - D'_{12} C_1. \quad (15)$$

Adicionalmente, respeitaremos as suposições de que o par (A, B_2) é estabilizável e que nenhum autovalor da parte não observável do par $[(A - B_2 D'_{12} C_1), (I - D_{12} D'_{12}) C_1]$ está sobre o eixo imaginário, além de que $D'_{12} D_{12} = I$ (Colaneri et al., 1997). Portanto, para a lei de controle $u = F_2 x$, o sistema realimentado será

$$\dot{x} = (A - B_2 F_2) x + B_1 w, \quad (16)$$

$$z = (C_{1c} - D_{12} B'_2 P) x. \quad (17)$$

A equação característica desejada para o sistema veicular definido em (1) é de quarta ordem. Portanto definiremos

$$(s + k_1 \zeta \omega_n) (s + k_2 \zeta \omega_n) (s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2) = 0, \quad (18)$$

sendo k_1, k_2 duas constantes positivas, com $k_1 \neq k_2$. Adotando uma matriz simétrica, semidefinida positiva

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & p_{34} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & p_{44} \end{bmatrix} \quad (19)$$

o objetivo é encontrar as matrizes C_1 e D_{12} que respeitem as suposições listadas anteriormente e minimizem a norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada (16)-(17), dada por (Liu and Yao, 2016)

$$\|H_{zw}\|_2^2 = \text{tr}(B'_1 P B_1). \quad (20)$$

Adotaremos aqui as matrizes

$$C_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \quad (21)$$

e

$$D_{12} = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4]'. \quad (22)$$

Ao usar as matrizes mostradas em (19), (21) e (22), conforme passo 3 do Algoritmo 1, a matriz $ARE_{[4 \times 4]}$ depende de $\{p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{22}, p_{23}, p_{24}\}$. Já que só temos 4 equações, devido à ordem da equação, é necessário reduzir o número de termos em (19). Algo importante a ser notado é que a solução não depende de $\{p_{33}, p_{34}, p_{44}\}$, que podem ser isolados em passos posteriores.

Portanto, para a escolha de uma forma particular de (19), adotaremos apenas 4 elementos do conjunto de termos p_{ij} , neste caso, $\{p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}\}$. Para os termos do conjunto $\{p_{33}, p_{34}, p_{44}\}$, conservamos apenas $\{p_{33}, p_{44}\}$. A inclusão de p_{34} implicaria na eventual alteração da ordem com que se isola os valores c_i (passos 8, 9, 12 e 15), já que a diagonal de ARE teria uma estrutura diferente. Podemos substituir, portanto, (19) por

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{12} & 0 & 0 & 0 \\ p_{13} & 0 & p_{33} & 0 \\ p_{14} & 0 & 0 & p_{44} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

A escolha de C_1 na forma mostrada em (21) se justifica já que minimiza a complexidade das equações a partir das quais vamos tentar isolar os valores de c_i em ARE . Mesmo usando C_1 como uma matriz diagonal, temos o surgimento de termos $c_m * c_n$, que elevam a dificuldade da solução. Observe que problema se agrava usando termos fora da diagonal. Por exemplo, para a matriz diagonal em (21) e $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & \sqrt{1-0,5^2} \end{bmatrix}'$, $k_1 = 10$, $k_2 = 15$, $\zeta = 0,5$ e $t_s = 0,3$ s, encontraremos a expressão $c_2^2 - 46,8112$ no passo 8 do Algoritmo 1. Se modificarmos C_1 para uma matriz completa, a expressão resultante se altera para $c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 + 0,3124c_{32} + c_{42}^2 + 0,5411c_{42} - 46,8112$.

Algoritmo 1 Encontrando Matrizes da Saída Controlada através da Solução Algébrica de Riccati para Projeto de Controle \mathcal{H}_2

Entrada: $(A, B_2, D_{12}, k_1, k_2, \zeta, \omega_n)$

Dados: C_1 uma matriz diagonal, conforme (21)

- 1: substituir $\{A, B_2, C_1, D_{12}, k_1, k_2\}$ em (12), usando (13) e (14), obtendo

$$ARE_{[4 \times 4]} \leftarrow PA_c + A'_c P - PB_2 B'_2 P + C'_{1c} C_{1c}$$

- 2: $F_2^\dagger \leftarrow -B'_2 P - D'_{12} C_1$, conforme (15)

- 3: resolver o sistema de equações

$$|sI - A + B_2 F_2^\dagger| = (s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2) (s + k_1 \zeta \omega_n) (s + k_2 \zeta \omega_n)$$

encontrando $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}$

- 4: atualizar $ARE_{[4 \times 4]}$ com os valores de $p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{14}$

- 5: isolar p_{33} em $ARE(3, 4)$

- 6: isolar p_{44} em $ARE(2, 4)$

- 7: atualizar $ARE_{[4 \times 4]}$ com os valores de p_{33}, p_{44}

- 8: isolar o valor de c_2 em $ARE(2, 2)$

- 9: isolar o valor de c_3 em $ARE(3, 3)$

- 10: $\min \mathcal{H}_2 \leftarrow \infty$

- 11: **for** $j \leftarrow 1 : 2$ **do** % raízes de c_2

- 12: isolar o valor de c_4 em $ARE(4, 4)$, dado $c_2(j)$

- 13: **for** $k \leftarrow 1 : 2$ **do** % raízes de c_3

- 14: **for** $l \leftarrow 1 : 2$ **do** % raízes de c_4

- 15: isolar o valor de c_1 em $ARE(1, 1)$, dados $c_2(j), c_3(k), c_4(l)$

- 16: **for** $i \leftarrow 1 : 2$ **do** % raízes de c_1

- 17: $C_1^\dagger \leftarrow \text{diag}([c_1(i) \ c_2(j) \ c_3(k) \ c_4(l)])$

- 18: $P^\dagger \leftarrow P$, dados $c_1(i), c_2(j), c_3(k), c_4(l)$

- 19: $\text{temp} \mathcal{H}_2 \leftarrow \text{tr}(B'_1 P^\dagger B_1)$

- 20: **if** $[(A - B_2 D'_{12} C_1, (I - D_{12} D'_{12}) C_1)]$ não tem autovalores sobre o eixo imaginário **then**

- 21: **if** $\text{temp} \mathcal{H}_2 < \min \mathcal{H}_2$ **then**

- 22: $\min \mathcal{H}_2 \leftarrow \text{temp} \mathcal{H}_2$

- 23: $C_1 \leftarrow C_1^\dagger$

- 24: $F_2 \leftarrow -B'_2 P^\dagger - D'_{12} C_1^\dagger$

- 25: $P_2 \leftarrow P^\dagger$

- 26: **end if**

- 27: **end if**

- 28: **end for**

- 29: **end for**

- 30: **end for**

- 31: **end for**

Retorna: C_1, P_2, F_2

3. SIMULAÇÕES

O sistema dado em (1), com os parâmetros apresentados na Tabela 1 e adotando $v_x = 20$ m/s, tem como matriz de transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{55,564(s - 2,317)}{(s^2 + 10,77s + 451,5)} \\ \frac{22,821(s + 65,26)}{(s^2 + 10,77s + 451,5)} \\ \frac{1,1 \times 10^{-5}(s + 5,051 \times 10^6)}{s^2(s^2 + 10,77s + 451,5)} \\ \frac{1,1 \times 10^{-5}(s + 2,075 \times 10^6)(s + 65,27)}{s(s^2 + 10,77s + 451,5)} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ou seja, o polinômio característico $s^2(s^2 + 10,77s + 451,5)$. Daí, é possível observar que a frequência natural é dada por $\omega_n = 21,2496$ rad/s e o amortecimento do sistema é $\zeta = 0,2533$. Os autovalores do sistema são $\{0 \ 0 -5,3834 \pm j20,5564\}$. Desejamos encontrar os ganhos de realimentação de estado com norma \mathcal{H}_2 , tais que a equação característica do sistema realimentado resultante seja dado por (18), com $k_1 \neq k_2$ a serem escolhidos. De forma a afastar os polos dominantes $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ dos polos $s_3 = -k_1\zeta\omega_n$ e $s_4 = -k_2\zeta\omega_n$, adotaremos $k_2 > k_1 \geq 5$ (Geromel and Korogui, 2019), tornando s_3 e s_4 bem mais lentos. Além disso, para fins de projeto, adotaremos valores de fator de amortecimento $0,4 < \zeta < 0,8$ (Ogata and Severo, 2015).

Para todas as simulações, encontraremos C_1 e F_2 conforme a metodologia mostrada no Algoritmo 1, dados $k_1 \neq k_2$, ζ , ω_n e D_{12} . Usaremos o tempo de acomodação t_s como um dos parâmetros. Os valores a serem empregados para tais simulações são mostrados na Tabela 2. Em seguida, simularemos o controle de rastreamento de sinal de referência realimentando o sistema veicular em (1) na forma mostrada em (16)-(17).

Os trajetos a serem utilizados nos testes foram implementados conforme mostrados no Apêndice A. São baseados no trabalho de Ren et al. (2016), implementando um trajeto de dupla mudança de faixa. Para tal trajetória, são adotados velocidade longitudinal $v = 20$ m/s e espaçamento entre centro de faixas $d = 3,5$ m. Além disso, os tempos utilizados na equação (28) são aqueles mostrados nas Tabelas 3 e 4. Aplicando tais valores em (28) e (26), encontramos o valor de máxima aceleração angular de guinada $\ddot{\psi}_{d_{max}} \approx 3,294$ rad/s². Os valores mostrados nas Tabelas 3 e 4 foram utilizados de forma a tentar emular o trajeto de dupla mudança de faixa, conforme sugerido na ISO 3888-2:2002 (International Organization for Standardization, 2002).

Tabela 2. Parâmetros empregados nas simulações realizadas.

Parâmetro	Valores adotados
$k_1 \neq k_2$	[5 10 15 20 25 30]
ζ	[0,5 0,6 0,7]
t_s [s]	[0,2 0,25 0,3 0,35 0,4 0,45]

Tabela 3. Valores adotados, em segundos, para a construção da curva de dupla mudança de faixa, conforme (28), entre $t_{A_1} \leq t \leq t_{M_1}$.

t_{A_1}	t_{B_1}	t_{C_1}	t_{E_1}	t_{I_1}	t_{K_1}	t_{L_1}	t_{M_1}
0,6	0,65	0,875	0,975	1,475	1,575	1,8	1,85

Tabela 4. Valores adotados, em segundos, para a construção da curva de dupla mudança de faixa, conforme (28), entre $t_{A_2} \leq t \leq t_{M_2}$.

t_{A_2}	t_{B_2}	t_{C_2}	t_{E_2}	t_{I_2}	t_{K_2}	t_{L_2}	t_{M_2}
2,225	2,275	2,5	2,6	3,1	3,2	3,425	3,475

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para fins de simulação, utilizamos valores da tabela 2 e $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & \sqrt{1-0,5^2} \end{bmatrix}'$ (observe que $D_{12}'D_{12} = I$) para estabilizar o sistema mostrado em (1) através de realimentação dos estados utilizando a norma \mathcal{H}_2 como critério de desempenho. Então, seguimos o esquema mostrado na Fig. 1 para simular o seguimento de uma trajetória para um percurso de dupla mudança de faixa. Na Tabela 5 podemos verificar que para algumas combinações $\{\zeta, t_s\}$ só terão erros de trajetória em torno de ± 2 cm escolhendo-se adequadamente os valores de k_1 e k_2 . A única combinação que traz resultados satisfatórios nesse quesito independente desses parâmetros são $\zeta = 0,5$ e $0,3 \leq t_s \leq 0,35$, pois os valores de erro são menores que 1,5 cm quando $k_1, k_2 > 5$.

Na Tabela 6 são mostradas alguns dos resultados de C_1 e F_2 e os autovalores do sistema realimentado conforme (16). Podemos observar o resultado da simulação de dupla mudança de faixa na Fig. 2 para um par específico $\{C_1, D_{12}\}$.

Tabela 5. Erro de trajetória para simulação de dupla mudança de faixa, de acordo com valores de ζ e t_s . Observe que para $\zeta = 0,5$ e $0,3 \leq t_s \leq 0,35$, valores de $k_1, k_2 > 5$ geram valores de erro menores que 1,5 cm.

ζ	Faixa de t_s [s]	Erro [cm]
0,5	0,2 - 0,25	3 - 4
	0,3 - 0,35*	0,8 - 1,5
	0,4 - 0,45	1,5 - 5
0,6	0,2 - 0,25	1,5 - 3
	0,3 - 0,35	1,5 - 4
	0,4 - 0,45	4 - 10
0,7	0,2 - 0,25	1,5 - 2
	0,3 - 0,35	2 - 6
	0,4 - 0,45	6 - 15

É fácil observar em (25) e na Fig. 6 que os trajetos para simples e dupla mudança de faixa têm estruturas idênticas nos seus respectivos intervalos $t_A \leq t \leq t_M$ e $t_{A_1} \leq t \leq t_{M_1}$. Portanto, caso desejássemos realizar o trajeto de simples mudança de faixa, bastaria tomar os valores da Tabela 3 para gerar tal trajetória, ou mudar tais valores temporais para alterar $\ddot{\psi}_{d_{max}}$ adequadamente para curvas mais ou menos agressivas.

Tabela 6. Resultados de C_1 e F_2 e autovalores do sistema em (16), dados $[k_1 \ k_2]$, ζ , t_s e D_{12} . Observe que os resultados de F_2 marcados com * mostram melhor desempenho na simulação de dupla mudança de faixa.

$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & \sqrt{1-0,5^2} \end{bmatrix}'$					
$[k_1 \ k_2]$	ζ	t_s	C_1	F_2	Autovalores
[5 30]	0,5	0,35	$\begin{bmatrix} -7,2371 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,1557 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -343,6300 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 365,3847 \end{bmatrix}$	$[6,7962 \ 1,5096 \ 343,6300 \ 365,3847]$	-342,8571 -57,1428 -11,4285 ± j19,7948
[10 20]	0,6	0,35	$\begin{bmatrix} -8,0889 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2339 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -589,4601 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -639,5497 \end{bmatrix}$	$[7,5167 \ -0,0779 \ 589,4601 \ 639,5497]$	-266,6667 -133,3333 -13,3333 ± j17,7778
[10 30]	0,5	0,35	$\begin{bmatrix} -9,3313 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,1317 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -687,2600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -610,4990 \end{bmatrix}$	$[8,7984 \ -0,8616 \ 687,2600 \ 610,4990]^*$	-342,8571 -114,2857 -11,4285 ± j19,7948
[15 20]	0,5	0,35	$\begin{bmatrix} -8,5856 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,7830 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -687,2600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -590,4539 \end{bmatrix}$	$[8,0313 \ -1,4977 \ 687,2600 \ 590,4539]^*$	-228,5714 -171,4285 -11,4285 ± j19,7948
[15 30]	0,6	0,3	$\begin{bmatrix} -13,5324 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4,7075 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1326,2854 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1339,5155 \end{bmatrix}$	$[12,8932 \ -4,4054 \ 1326,2854 \ 1339,5155]$	-400 -200 -13,3333 ± j17,7778
[20 10]	0,5	0,35	$\begin{bmatrix} -6,9447 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,3117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -458,1733 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -420,3627 \end{bmatrix}$	$[6,4408 \ -0,1289 \ 458,1733 \ 420,3627]^*$	-228,5714 -114,2857 -11,4285 ± j19,7948
[20 25]	0,6	0,3	$\begin{bmatrix} -14,1308 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6,1309 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1473,6504 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1466,2458 \end{bmatrix}$	$[13,4768 \ -5,8264 \ 1473,6504 \ 1466,2458]$	-333,3333 -266,6667 -13,3333 ± j17,7778
[25 10]	0,5	0,35	$\begin{bmatrix} -8,1401 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,7448 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -572,7166 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -515,4308 \end{bmatrix}$	$[7,6196 \ -0,4952 \ 572,7166 \ 515,4308]^*$	-285,7142 -114,2857 -11,4285 ± j19,7948

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho propôs uma metodologia capaz de encontrar, por meio da solução das equações algébricas de Riccati, as matrizes da saída controlada de um sistema para o problema de controle \mathcal{H}_2 , dadas as especificações de desempenho no domínio do tempo. Conforme visto, tal metodologia é atrelada ao modelo matemático do sistema selecionado para fins de simulação, porém facilmente adaptável para diferentes sistemas, considerando suas particularidades.

São apresentados resultados empregando um modelo de veículo autônomo, especificamente para aplicação de seguimento de trajetória. Inicialmente, encontrou-se o controlador que estabilize o veículo, que então foi simulado para um percurso de dupla mudança de faixa. Verificou-se que parâmetros de especificação de desempenho em uma faixa bastante restrita geraram erros de trajetória simulados menores que $\pm 1\text{cm}$.

Observamos que a metodologia aqui descrita não fornece uma ferramenta isenta de escolhas a serem feitas pelo projetista. Isso se dá pelo fato de que C_1 depende do valor admitido para D_{12} , dadas as restrições impostas. Associado à estrutura particular do sistema físico empregado, as características de desempenho terão papel

decisivo para o resultado obtido. De qualquer maneira, abordagens como algoritmos genéticos poderiam ser usadas para encontrar combinações ótimas de valores.

Em trabalhos futuros, pretendemos refinar a faixa de valores coeficiente de amortecimento e tempo de acomodação, além das constantes que multiplicam os polos, com o intuito de validar os resultados encontrados. Além disso, planejamos estender os testes a outros tipos de trajetórias, como a mudança de faixa simples, com acelerações angulares de guinada desejadas tais que caracterizem manobras mais ou menos agressivas. O mesmo pode ser dito para a dupla mudança de faixa, considerando que ambas as curvas, de transposição de faixa e de retorno, foram construídas com a mesma aceleração angular de guinada desejada. Adicionalmente, desejamos expandir a metodologia em direção ao caso do problema de controle \mathcal{H}_∞ , para o caso de realimentação de estados.

APÊNDICES

A Modelos de Simples e Dupla Mudança de Faixa

O modelo sugerido por Ren et al. (2016) assume a mudança de faixa ocorrendo em uma via reta, com a mudança de trajetória contínua e suave, conforme a Fig. 3. Para

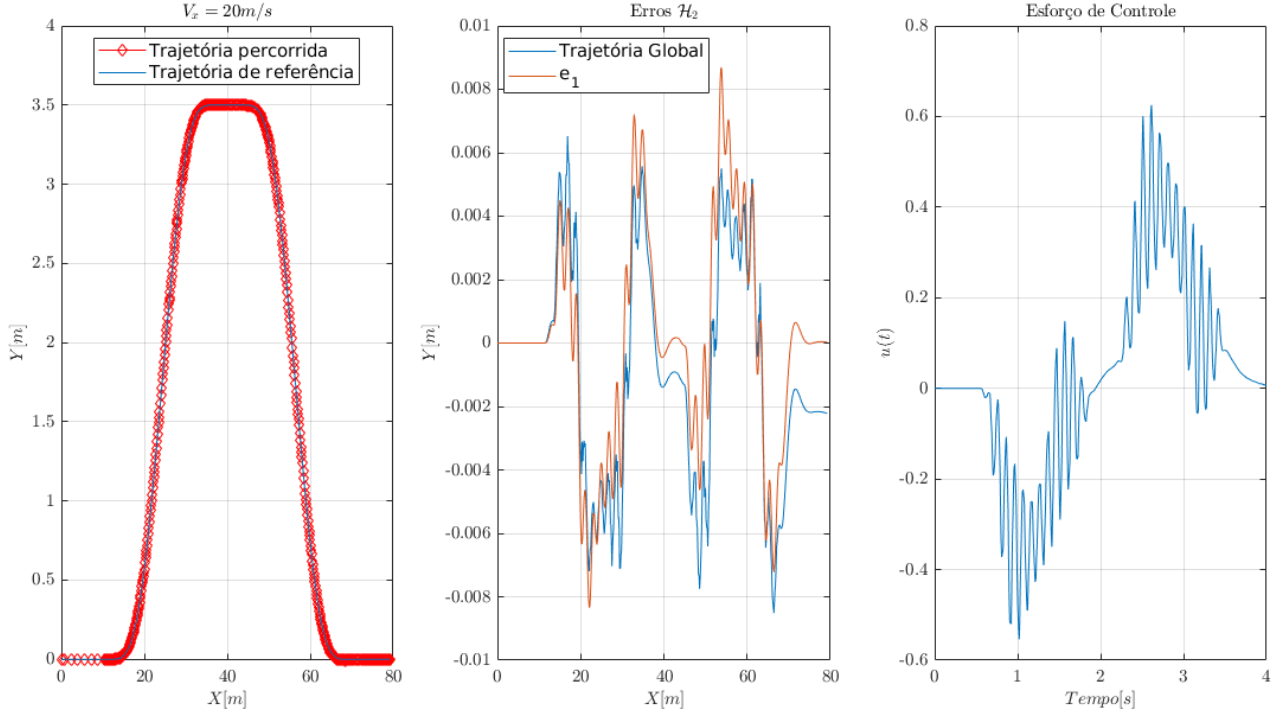


Fig. 2. Resultado para simulação de dupla mudança de faixa com $v_x = 20 \text{ m/s}$ e um controlador de realimentação de estado com norma \mathcal{H}_2 calculado para $k_1 = 20$, $k_2 = 10$, $\zeta = 0,5$, com $t_s = 0,35s$ e $D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & \sqrt{1 - 0,5^2} \end{bmatrix}'$. À esquerda, as de referência e aquela percorrida pelo veículo simulado. No centro, o erros de trajetória global (diferença entre referência e simulação) e o estado e_1 . À direita, o esforço de controle. Observe que $t_{M_2} = 3,475s$, mas a simulação foi feita até $4s$.

tanto, o autor sugeriu um modelo não-linear para o ângulo de guinada desejado ψ_d , conforme visto na Fig. 4(a). Nas Figuras 4(b) e 4(c) podemos observar a velocidade e a aceleração angular de guinada desejada, $\dot{\psi}_d$ e $\ddot{\psi}_d$, respectivamente.

A partir da Fig. 4(c), considerando que $t_B - t_A = T_1$ e $t_C - t_B = T_2$ e que o tempo necessário para a mudança de faixa seja $T = t_M - t_A = 7T_1 + 4T_2$, teremos

$$\ddot{\psi}_d(t) = \begin{cases} 0, & t < t_A \\ \ddot{\psi}_{d_{max}} (t - t_A) / T_1, & t_A \leq t \leq t_B \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}, & t_B < t \leq t_C \\ \ddot{\psi}_{d_{max}} (t_D - t) / T_1, & t_C < t \leq t_E \\ -\ddot{\psi}_{d_{max}}, & t_E < t \leq t_I \\ \ddot{\psi}_{d_{max}} (t - t_J) / T_1, & t_I < t \leq t_K \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}, & t_K < t \leq t_L \\ \ddot{\psi}_{d_{max}} (t_M - t) / T_1, & t_L < t \leq t_M \\ 0, & t > t_M \end{cases} \quad (25)$$

Integrando duas vezes consecutivas (25), obtém-se a função $\psi_d(t)$, o que nos permite, através da equação

$$\int_{t_A}^{t_M} v(t) \sin(\psi_d(t)) dt = d \quad (26)$$

encontrar a aceleração angular máxima desejada $\ddot{\psi}_{d_{max}}$. Observe que aqui é útil fazer

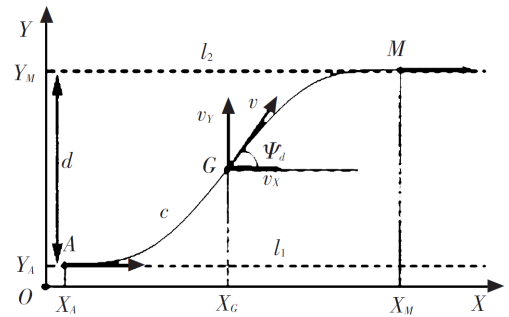


Fig. 3. Esquema para obtenção de trajetória de mudança de faixa. Fonte: (Ren et al., 2016).

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{15} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (27)$$

que fornece um erro de aproximação no intervalo $[0, 2\pi]$ menor que 10^{-12} . De maneira similar, é possível encontrar o ângulo de guinada desejado ψ_d para uma dupla mudança de faixa, como pode-se observar na Fig. 5(a). É possível ver a velocidade e a aceleração angular de guinada desejada nas Fig. 5(b) e 5(c). A equação (25), mostrada por Ren et al. (2016) para faixa simples, pode então ser expandida como mostrado em (28), definindo-se $\ddot{\psi}_d(t)$ para dupla mudança de faixa. Integrando duas vezes (28), como foi feito para (25), encontraremos novamente a constante $\ddot{\psi}_{d_{max}}$. Observe ainda que é possível usar diferentes valores

de $\ddot{\psi}_{d_{max}}$, um para cada uma das duas curvas definidas entre os intervalos $t_{A_1} < t \leq t_{M_1}$ e $t_{A_2} < t \leq t_{M_2}$.

$$\ddot{\psi}_d(t) = \begin{cases} 0, & t < t_{A_1} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t - t_{A_1})/T_1, & t_{A_1} \leq t \leq t_{B_1} \\ \dot{\psi}_{d_{max}}, & t_{B_1} < t \leq t_{C_1} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t_{D_1} - t)/T_1, & t_{C_1} < t \leq t_{E_1} \\ -\ddot{\psi}_{d_{max}}, & t_{E_1} < t \leq t_{I_1} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t - t_{J_1})/T_1, & t_{I_1} < t \leq t_{K_1} \\ \dot{\psi}_{d_{max}}, & t_{K_1} < t \leq t_{L_1} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t_{M_1} - t)/T_1, & t_{L_1} < t \leq t_{M_1} \\ 0, & t_{M_1} < t \leq t_{A_2} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t_{A_2} - t)/T_1, & t_{A_2} < t \leq t_{B_2} \\ -\ddot{\psi}_{d_{max}}, & t_{B_2} < t \leq t_{C_2} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t - t_{D_2})/T_1, & t_{C_2} < t \leq t_{E_2} \\ \dot{\psi}_{d_{max}}, & t_{E_2} < t \leq t_{I_2} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t_{J_2} - t)/T_1, & t_{I_2} < t \leq t_{K_2} \\ -\ddot{\psi}_{d_{max}}, & t_{K_2} < t \leq t_{L_2} \\ \ddot{\psi}_{d_{max}}(t - t_{M_2})/T_1, & t_{L_2} < t \leq t_{M_2} \\ 0, & t > t_{M_2} \end{cases} \quad (28)$$

Definido o ângulo de guinada desejado $\psi_d(t)$, podemos obter o deslocamento do veículo de acordo com as equações

$$X(t) = X_A + \int_{t_A}^t v(t) \cos(\psi_d(t)) dt \quad (29)$$

$$Y(t) = Y_A + \int_{t_A}^t v(t) \sin(\psi_d(t)) dt, t_A \leq t \leq t_M \quad (30)$$

sendo:

- $X(t), Y(t)$ os deslocamentos longitudinais e laterais do veículo;
- X_A, Y_A as respectivas posições iniciais;
- v é a velocidade do veículo, sendo $v = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2}$;
- $\psi_d(t)$ é o ângulo de guinada desejado do veículo;
- t_A, t_M os instantes de tempo no pontos de partida (X_A, Y_A) e chegada (X_M, Y_M) da curva, respectivamente.

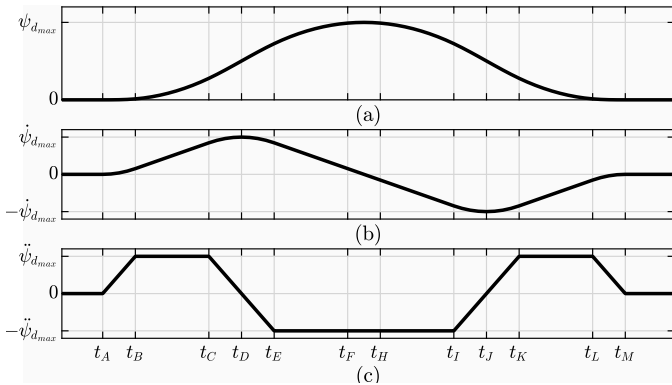


Fig. 4. Para simples mudança de faixa, (a) ângulo de guinada ψ_d , (b) velocidade angular de guinada $\dot{\psi}_d$ e (c) aceleração angular de guinada $\ddot{\psi}_d$ para simples mudança de faixa.

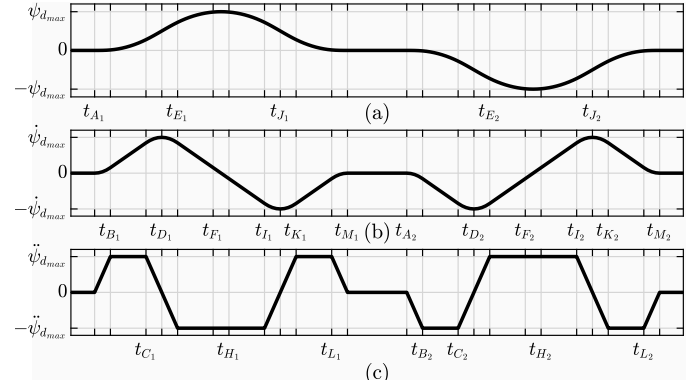


Fig. 5. Para dupla mudança de faixa, (a) ângulo de guinada ψ_d , (b) velocidade angular de guinada $\dot{\psi}_d$ e (c) aceleração angular de guinada $\ddot{\psi}_d$ para dupla mudança de faixa.

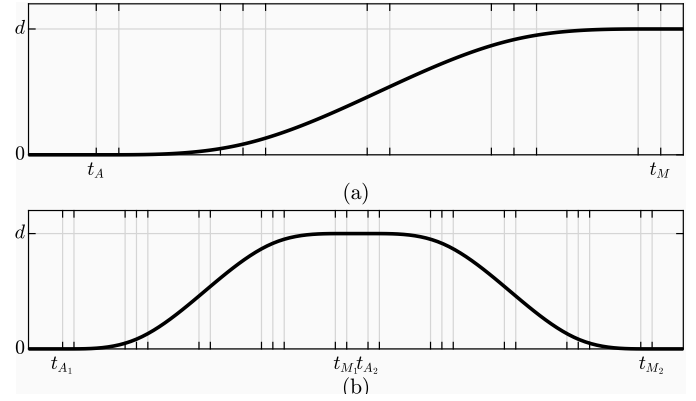


Fig. 6. Mudanças de faixa, com distância d entre centros das faixas. (a) Simples mudança de faixa, ocorrendo no intervalo $t_A \leq t \leq t_M$. (b) Dupla mudança de faixa, com a primeira transição no intervalo entre $t_{A_1} < t \leq t_{M_1}$ e a segunda transição no intervalo $t_{A_2} < t \leq t_{M_2}$.

REFERÊNCIAS

- Abe, M. (2015). *Vehicle handling dynamics: theory and application*. Butterworth-Heinemann.
- Bautista, C.D.R. (2015). *Observadores de estado para estimação de atrito pneu/solo*. Master's thesis, Unicamp.
- Colaneri, P., Geromel, J.C., and Locatelli, A. (1997). *Control theory and design: an \mathcal{RH}_2 and \mathcal{RH}_∞ viewpoint*. Elsevier.
- Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., and Francis, B.A. (1989). State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8), 831–847.
- Dullerud, G.E. and Paganini, F. (2005). *A course in robust control theory - a convex approach*. Springer, 1st edition.
- Geromel, J.C. and Korogui, R.H. (2019). *Controle linear de sistemas dinâmicos: teoria, ensaios práticos e exercícios*. Editora Blucher, 2a edition.
- Hu, C., Jing, H., Wang, R., Yan, F., and Chadli, M. (2016). Robust \mathcal{H}_∞ output-feedback control for path following of autonomous ground vehicles. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 70-71, 414–427.

- International Organization for Standardization (2002). Passenger cars—test track for a severe lane change manoeuvre—part 2: obstacle avoidance (ISO 3888-2).
- Ishihara, J.Y., Terra, M.H., and Sales, R.M. (2003). The full information and state feedback \mathcal{H}_2 optimal controllers for descriptor systems. *Automatica*, 39(3), 391–402.
- Kumare, V. and Jerome, J. (2016). Algebraic Riccati equation based Q and R matrices selection algorithm for optimal lqr applied to tracking control of 3rd order magnetic levitation system. *Archives of Electrical Engineering*, 65(1), 151–169.
- Kwakernaak, H. (2002). \mathcal{H}_2 -optimization — theory and applications to robust control design. *Annual Reviews in Control*, 26(1), 45–56.
- Liu, K.Z. and Yao, Y. (2016). *Robust control: theory and applications*. John Wiley & Sons.
- Ogata, K. and Severo, B. (2015). *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson, 5 edition.
- Ren, D., Zhang, G., and Wu, H. (2016). Reference model of desired yaw angle for automated lane changing behavior of vehicle. *J. of Harbin Institute of Technology*, 23, 23–33.
- Schmidt, A. and Haasdonk, B. (2016). Reduced basis method for \mathcal{H}_2 optimal feedback control problems. *IFAC-PapersOnLine*, 49(8), 327–332. 2nd IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations CPDE 2016.