

# Projeto de controladores com ganho escalonado usando realimentação derivativa para sistemas descritores<sup>\*</sup>

Lázaro Ismael Hardy Llins<sup>\*</sup> Edvaldo Assunção<sup>\*\*</sup>  
Daniel Coutinho<sup>\*\*\*</sup> Marcelo Minhoto Teixeira<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Programa de Pós-graduação em Engenharia de Automação e Sistemas (PPGEAS), Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC, 88040-900, Brazil (e-mail: hardyllins@gmail.com).

<sup>\*\*</sup> Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Laboratório de Pesquisa em Controle - LPC, Av. José Carlos Rossi, no 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil (e-mail: edvaldo.assuncao(marcelo.teixeira)@unesp.br)

<sup>\*\*\*</sup> Departamento de Automação e Sistemas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 88040-900, Brazil (e-mail: daniel.coutinho@ufsc.br)

---

**Abstract:** This work addresses the stabilization problem of linear descriptor systems subject to time-varying parameters by means of gain-scheduled state derivative feedback. The controller design is derived in terms of linear matrix inequalities (LMIs) considering a parameter independent Lyapunov function. Finsler's lemma is employed to derive less conservative design conditions. Numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed solution.

**Resumo:** Este trabalho aborda o problema de estabilização de sistemas descritores lineares em tempo contínuo sujeitos a parâmetros variantes no tempo através de uma realimentação com ganho escalonado (*gain scheduled*) da derivada dos estados. O projeto do controlador *gain scheduled* (GS) é obtido por meio de uma condição de estabilidade descrita em termos de desigualdades matriciais lineares (LMIs) considerando uma função de Lyapunov independente dos parâmetros. O Lema de Finsler é utilizado para obter condições de projeto menos conservadoras. Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar e validar a eficiência da teoria proposta.

**Keywords:** Descriptor systems; linear matrix inequalities; state derivative feedback; gain-scheduled controller.

**Palavras-chave:** Sistema descritor; desigualdades matriciais lineares; realimentação da derivada do vetor de estados; controlador com ganho escalonado.

---

## 1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a análise de admissibilidade, projeto de controle e estimação de estados de sistemas descritores (também conhecidos como sistemas singulares, sistemas algébrico-diferenciais, ou representação no espaço de estados generalizada) têm despertado a atenção de diversos pesquisadores. A representação na forma descritora é utilizada largamente na obtenção de modelos dinâmicos para sistemas físicos sujeitos a restrições algébricas como sistemas mecânicos, sistemas econômicos, sistemas biológicos, sistemas elétricos de potência, e processos químicos; veja, por exemplo, (Dai, 1988). O tratamento matemático das condições de estabilização de sistemas descritores é

mais complexo quando comparado a uma representação padrão no espaço de estados, pois devem ser consideradas (além dos conceitos usuais da representação no espaço de estados) propriedades estruturais como regularidade, causalidade, controlabilidade da dinâmica rápida e lenta, modos impulsivos, e admissibilidade (Duan, 2010).

Destaca-se que para sistemas descritores alguns trabalhos abordaram o problema de estabilização considerando uma realimentação da derivada dos estados; veja, por exemplo, (Lewis and Syrmos, 1991), (Faria et al., 2010) e (Barbosa et al., 2019). Os métodos que empregam uma realimentação da derivada dos estados são similares aos que utilizam realimentação de estados, mas como vantagem podem transformar um modelo dinâmico descritor em malha aberta em uma representação padrão no espaço de estados em malha fechada. Por exemplo, Abdelaziz and Valasek (2004) e Faria et al. (2009) abordaram o problema de estabilização de sistemas descritores SISO e

---

<sup>\*</sup> Este trabalho é parcialmente apoiado pelo CNPq sob concessão 302690/2018-2/PQ, CNPq 301227/2017-9, CNPq 309872/2018-9, CAPES sob concessão 88887.466695/2019-00, CAPES-WBI sob concessão SUB/2018/366494, CAPES-SIU sob concessão 88887.153840/2017-00.

MIMO por meio da realimentação da derivada dos estados; da Silva et al. (2012) propôs condições LMI para o projeto de controladores para sistemas descritores sujeitos a incertezas politópicas; e Llins et al. (2017) apresentou uma metodologia para o projeto de controladores *gain scheduled* utilizando uma realimentação da derivada do vetor de estados.

Nota-se que a técnica de controle *gain scheduling* em conjunto com outras estratégias permitiu em diversos casos obter melhores resultados em relação ao desempenho do sistema de controle como, por exemplo, redução da margem do sinal do erro (Merry et al., 2014) e projeto de controladores PID *gain scheduled Fuzzy* aplicados a estabilização de sistemas elétrico de potência (Zhang et al., 2017). No entanto, o problema de estabilização de sistemas descritores lineares considerando a técnica *gain scheduling* não tem sido devidamente abordado na literatura especializada. Pode-se, com certeza, afirmar que poucos trabalhos fazem referência ao problema de estabilização de sistemas descritores utilizando uma realimentação da derivada dos estados.

Dentro deste cenário, este trabalho busca desenvolver uma metodologia numericamente tratável para projetar uma realimentação da derivada dos estados do tipo *gain scheduling* para sistemas descritores lineares a parâmetros variantes. Em particular, considerando uma função de Lyapunov independente dos parâmetros são propostas condições LMI para obter as matrizes de ganho na configuração *gain scheduling*. Exemplos numéricos são apresentados para demonstrar a eficiência da metodologia proposta.

**Notação:**  $\mathbb{R}$  representa o conjunto de números reais,  $\mathbb{R}^n$  representa o espaço Euclidiano de dimensão  $n$ ,  $\mathbb{R}^{m \times n}$  é o conjunto das matrizes reais de dimensão  $m \times n$ ,  $I_n$  é a matriz identidade com dimensão  $n \times n$ ,  $0_n$  e  $0_{m \times n}$  representam matrizes de zeros com dimensões  $n \times n$  e  $m \times n$ , respectivamente. Para uma matriz real  $S$ ,  $S^T$  é a sua transposta,  $\text{rank}(S)$  é o posto da matriz  $S$ , e  $S > 0$  ( $\geq 0$ ) significa que  $S$  é uma matriz simétrica definida positiva (semi-definida positiva). Para uma matriz simétrica em blocos,  $*$  representa o bloco simétrico fora do bloco diagonal principal.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte sistema descritor linear a parâmetro variante no tempo:

$$E(\alpha(t))\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) + B(\alpha(t))u(t), \quad (1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  o vetor de entrada de controle,  $\alpha(t) \in \Lambda \subset \mathbb{R}^N$  o vetor de parâmetros variantes no tempo (suposto mensurável e disponível em tempo real), e  $\Lambda$  representa um conjunto politópico contido no espaço de parâmetros a ser definido na sequência desta seção. As matrizes  $A(\alpha(t))$ ,  $B(\alpha(t))$  e  $E(\alpha(t))$  são funções lineares em relação ao vetor de parâmetros variantes no tempo que descrevem a dinâmica do sistema e definidas como a seguinte combinação convexa de  $N$  vértices conhecidos:

$$(A(\alpha(t)), B(\alpha(t)), E(\alpha(t))) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)(A_i, B_i, E_i), \alpha \in \Lambda, \quad (2)$$

onde  $A_i, B_i, E_i, i = 1, \dots, N$ , são matrizes reais com dimensões apropriadas. Assume-se com relação ao sistema (1) que:

$$(A1) \text{rank}(A(\alpha(t))) = n, \text{ para todo } \alpha(t) \in \Lambda.$$

$$(A2) \text{rank}([E(\alpha(t)) \quad B(\alpha(t))]) = n \text{ para todo } \alpha \in \Lambda.$$

(A3) O conjunto de valores admissíveis do vetor  $\alpha(t)$  de parâmetros variantes no tempo é representado por um simplex unitário na seguinte forma:

$$\Lambda = \left\{ \alpha(t) \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) = 1, \alpha_i(t) \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia para encontrar uma lei de controle na forma:

$$u(t) = -K_d(\alpha(t))\dot{x}(t), \quad (4)$$

sendo

$$K_d(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t)K_{di}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

com  $K_{d1}, \dots, K_{dN} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a determinar. Então, considerando o sistema em malha fechada construído a partir de (1) e (4), obtém-se

$$E\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) - B(\alpha(t))K_d(\alpha(t))\dot{x}(t) \iff (E(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))\dot{x}(t) = A(\alpha(t))x(t) \quad (6)$$

Levando em consideração (A2), existem matrizes  $K_d(\alpha(t))$  e  $R(\alpha(t))$ , com  $\text{rank}(R(\alpha(t))) = n, \forall \alpha(t) \in \Lambda$ , tais que a seguinte relação

$$E(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K(\alpha(t)) = R(\alpha(t)) \quad (7)$$

é satisfeita para todo  $\alpha \in \Lambda$ .

Como  $R(\alpha(t))$  tem posto completo, então o sistema em (6) pode ser reescrito na seguinte representação padrão no espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = (E(\alpha(t)) + B(\alpha(t))K(\alpha(t)))^{-1}A(\alpha(t))x(t). \quad (8)$$

Portanto, o problema de estabilização do sistema (1) considerando uma lei de controle como definida em (4) consiste em determinar  $K_d(\alpha(t))$  tal que a matriz  $R(\alpha(t))$  em (7) tem posto completo e o sistema em (8) seja assintoticamente estável.

Antes de apresentarmos os resultados principais deste artigo, os seguintes resultados são instrumentais para a obtenção de uma formulação LMI para o projeto da matriz  $K_d(\alpha(t))$ .

**Lema 1.** Uma matriz  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é inversível se  $M + M^T > 0$ .

**Prova.** Vide (Skelton et al., 1997).

**Lema 2. (Lema de Finsler).** Considere  $\mathcal{W} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  com  $n > m$  e  $\mathcal{B}^\perp$  sendo uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$  (em outras palavras  $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$ ). Então, as seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $\mathcal{W}^T \mathcal{D} \mathcal{W} < 0, \forall \mathcal{W} \neq 0, \mathcal{B} \mathcal{W} = 0$ ;
- (ii)  $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{D} \mathcal{B}^\perp < 0$ ;
- (iii)  $\exists \rho \in \mathbb{R} : \mathcal{D} - \rho \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$ ; e

(iv)  $\exists \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{D} + \mathcal{Q}\mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{Q}^T < 0$ .

**Prova.** Vide (Skelton et al., 1997).

### 3. PROJETO DE CONTROLE

A seguir, apresenta-se uma metodologia de projeto do controlador *gain-scheduled* via realimentação da derivada dos estados para sistemas descritores. A metodologia proposta é baseada no trabalho de Faria et al. (2010) para sistemas descritores invariantes no tempo e que utiliza uma função de Lyapunov quadrática e restrições na forma de desigualdades matriciais lineares.

**Teorema 1.** (Faria et al. (2010)). Considere o sistema

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

com  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{rank}(A) = n$  e  $\text{rank}(\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}) = n$ , e uma lei de controle na forma  $u(t) = -K_d \dot{x}(t)$ . O sistema em malha fechada é assintoticamente estável se e somente se existirem matrizes  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que:

$$AQE^T + EQA^T + BYA^T + AY^T B^T < 0, \quad (9)$$

$$Q > 0, \quad (10)$$

sendo o ganho do controlador dado por:

$$K_d = YQ^{-1}. \quad (11)$$

**Prova.** Vide (Faria et al., 2010).

#### 3.1 Projeto do controlador Gain Scheduled

O seguinte teorema propõe condições LMI para o projeto de controle GS desenvolvido a partir das condições de estabilidade propostas em (Montagner and Peres, 2004) que considera uma representação padrão no espaço de estados e realimentação de estados. Neste trabalho, de maneira similar ao Teorema 1, considera-se uma matriz de Lyapunov quadrática visando simplificar a complexidade do problema em relação ao termo  $\dot{\alpha}(t)$  que aparece nas condições de estabilidade baseadas em funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

**Teorema 2.** O sistema (1), satisfazendo (A1)-(A3), com a lei de controle em (4) é regular, modos de respostas impulsivas-livres e assintoticamente estável, se existir uma matriz simétrica e definida positiva  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e matrizes reais  $Z_1, \dots, Z_N \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:

$$E_i Q A_i^T + A_i Q E_i^T + B_i Z_i A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T < 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & E_i Q A_i^T + E_i Q A_j^T + E_j Q A_i^T + A_i Q E_i^T + A_i Q E_j^T \\ & + A_j Q E_i^T + A_i Z_i^T B_j^T + A_i Z_j^T B_i^T + A_j Z_i^T B_i^T \\ & + B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + B_j Z_i A_i^T < 0, \\ & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & E_i Q A_j^T + E_i Q A_k^T + E_j Q A_i^T + E_j Q A_k^T + E_k Q A_i^T \\ & + E_k Q A_j^T + A_i Q E_j^T + A_i Q E_k^T + A_j Q E_i^T + A_j Q E_k^T \\ & + A_k Q E_i^T + A_k Q E_j^T + A_i Z_j^T B_k^T + A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T \\ & + A_j Z_k^T B_i^T + A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T \\ & + B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T < 0, \\ & i \neq j, \quad j \neq k, \quad i, j, k = 1, \dots, N; \quad (14) \end{aligned}$$

sendo  $K_d(\alpha(t))$  dado por

$$K_d(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) Z_i Q^{-1}. \quad (15)$$

**Prova.** Para simplificar a notação, desconsidera-se a seguir a dependência no tempo do parâmetro  $\alpha(t)$  (i.e.,  $\alpha \equiv \alpha(t)$ ). Agora, suponha que as condições (12), (13) e (14) sejam factíveis. Então, multiplicando-as respectivamente por  $\alpha_i^3 > 0$ ,  $\alpha_i^2 \alpha_j > 0$  e  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k > 0$ , e somando-as respectivamente de  $i = 1$  até  $i = N$ , de  $i, j = 1$  com  $i \neq j$  até  $i, j = N$ , e de  $i, j, k = 1$  com  $i < j$  e  $j < k$  até  $i, j, k = N$ , chegam-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 E_i Q A_i^T + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j (E_i Q A_i^T + E_i Q A_j^T + E_j Q A_i^T) \\ & + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k (E_i Q A_j^T + E_i Q A_k^T + E_j Q A_i^T \\ & + E_j Q A_k^T + E_k Q A_i^T + E_k Q A_j^T) = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (E_i Q A_i^T). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 B_i Z_i A_i^T + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j (B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + B_j Z_i A_i^T) \\ & + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k (B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + B_j Z_i A_k^T \\ & + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T) = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (B_i Z_i A_i^T). \end{aligned}$$

Para simplificar o desenvolvimento algébrico, as definições descritas acima mantêm a mesma estrutura para seus termos transpostos. Então, considerando as igualdades acima e a expressão (3), sabendo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i &= A(\alpha), \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i = B(\alpha), \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i E_i &= E(\alpha), \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i Z_i = Z(\alpha), \end{aligned}$$

e levando em consideração a definição do conjunto  $\Lambda$  em (3), obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} & E(\alpha) Q A^T(\alpha) + A(\alpha) Q E^T(\alpha) + B(\alpha) Z(\alpha) A^T(\alpha) \\ & + A(\alpha) Z^T(\alpha) B^T(\alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in \Lambda. \quad (16) \end{aligned}$$

Note que o resultado acima é semelhante a condição (9) do Teorema 1, considerando  $E = E(\alpha)$ ,  $A = A(\alpha)$ ,  $B = B(\alpha)$  e  $Y = Z(\alpha)$ . Portanto, as condições LMI em (12), (13) e (14) garantem que o sistema em (8) é regular e assintoticamente estável.

#### 3.2 Buscando uma solução menos conservadora

Em (Llins et al., 2017), apresentou-se condições LMI que definem o projeto dos controladores via Lema 2. Esse lema garante a relaxação do conjunto de LMIs devido ao desacoplamento de matrizes ou à redução do número de LMIs no projeto de controladores (Mozelli et al., 2010).

Nesta seção, utiliza-se o lema de Finsler para diminuir o conservadorismo através da inserção de variáveis de relaxamento. Os próximos teoremas apresentam condições suficientes que garantam a estabilidade assintótica do sistema definido em (8) visando obter resultados menos conservadores em comparação ao Teorema 2.

*Teorema 3.* Considere o sistema em (1), satisfazendo (A1)-(A3), e a lei de controle em (4). Suponha que existe uma matriz simétrica definida positiva  $Q$ , e matrizes reais  $X_1$ ,  $X_2$ , e  $Z_1, \dots, Z_N$ , com dimensões apropriadas, que satisfaçam as seguintes restrições matriciais:

$$\begin{bmatrix} A_i X_1^T + X_1 A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_i^T & * \\ Q E_i^T + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} ((2A_i + A_j)X_1^T + X_1(2A_i^T + A_j^T) + A_i Z_i^T B_j^T + A_i Z_j^T B_i^T + A_j Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + B_j Z_i A_i^T) \\ Q(2E_i^T + E_j^T) + X_2(2A_i^T + A_j^T) - 3X_1^T \\ * \\ -3X_2 - 3X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, N; \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} ((2A_i + 2A_j + 2A_k)X_1^T + X_1(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) + A_i Z_j^T B_k^T + A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T + A_j Z_k^T B_i^T + A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T) \\ Q(2E_i^T + 2E_j^T + 2E_k^T) + X_2(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) - X_1^T \\ * \\ -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j, j \neq k, i, j, k = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Então, o sistema em (8) é regular e assintoticamente estável sendo a matriz  $K_d(\alpha(t))$  dada por

$$K_d(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) Z_i Q^{-1}. \quad (20)$$

**Prova.** Suponha que (17), (18) e (19) sejam factíveis. Multiplicando (17) por  $\alpha_i^3 > 0$  e somando em  $i$ , desde  $i = 1$  até  $i = N$ ; (18) por  $\alpha_i^2 \alpha_j > 0$  e somando desde  $i = 1$ , até  $i = N - 1$  e  $j = i + 1$  a  $j = N$ ; e (19) por  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k > 0$  e somando desde  $i = 1$ , até  $i = N$ ,  $j = 1$  a  $j = N$  e  $k = 1$  a  $k = N$ ; chegam-se a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 + 3 \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k \\ = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 X_1 A_i^T + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j X_1 (2A_i^T + A_j^T) \\ + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k X_1 (2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) \\ = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (X_1 A_i^T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 X_2 A_i^T + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j X_2 (2A_i^T + A_j^T) \\ + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k X_2 (2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) \\ = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (X_2 A_i^T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 Q E_i^T + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \alpha_i^2 \alpha_j Q (2E_i^T + E_j^T) \\ + \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{i < j}^N \alpha_j \sum_{j < k}^N \alpha_k Q (2E_i^T + 2E_j^T + 2E_k^T) \\ = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i \right)^3 (Q E_i^T). \end{aligned}$$

As definições descritas mantém a mesma estrutura para seus termos transpostos. Então, considerando as igualdades acima, as definidas no Teorema 3 e a expressão (3), sabendo que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \alpha_i X_1 A_i^T = X_1 A^T(\alpha), \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i X_2 A_i^T = X_2 A^T(\alpha), \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i Q E_i^T = Q E^T(\alpha), \end{aligned}$$

chega-se

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) X_1^T + X_1 A^T(\alpha) & * \\ A(\alpha) Z^T(\alpha) B^T(\alpha) + B(\alpha) Z(\alpha) A^T(\alpha) & \\ Q E^T(\alpha) + X_2 A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

Note que (21) pode ser decomposta na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) Z^T(\alpha) B^T(\alpha) + B(\alpha) Z(\alpha) A^T(\alpha) & * \\ Q E^T(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} [A^T(\alpha) - I_{n \times n}] + \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ -I_{n \times n} \end{bmatrix} [X_1^T \ X_2^T] < 0. \quad (22)$$

Agora, considere o Lema 2 com

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) Z^T(\alpha) B^T(\alpha) + B(\alpha) Z(\alpha) A^T(\alpha) & * \\ Q E^T(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [A^T(\alpha) - I_{n \times n}], \\ \mathcal{B}^\perp &= [I_{n \times n} \ A(\alpha)]^T. \end{aligned} \quad (23)$$

Então, pré e pós multiplicando (22) por  $\mathcal{B}^{\perp T}$  e  $\mathcal{B}^{\perp}$ , respectivamente, e sabendo que  $\mathcal{B}\mathcal{B}^{\perp} = 0$ , obtém-se  $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{Q} \mathcal{B}^{\perp} < 0$ . Então, chega-se a seguinte relação

$$A(\alpha)QE^T(\alpha) + E(\alpha)QA^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) < 0. \quad (24)$$

Definindo  $P = Q^{-1}$  e  $K_d(\alpha) = Z(\alpha)Q^{-1}$ , obtém-se a seguinte desigualdade a partir de (24):

$$A(\alpha)P^{-1}(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^T + (E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))P^{-1}A^T(\alpha) < 0. \quad (25)$$

De acordo com o Lema 1, a matriz

$$M = (E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))P^{-1}A^T(\alpha)$$

é de posto completo. Logo, a matriz  $(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))$  é de posto completo e, portanto, inversível.

Na sequência, pré e pós multiplicando (25) por  $P(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}$  e  $(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P$ , respectivamente, tem-se que

$$P(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}A(\alpha) + A^T(\alpha)(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P < 0. \quad (26)$$

Multiplicando a desigualdade acima a esquerda por  $x^T(t)$  e a direita por  $x(t)$ , respectivamente, e levando em conta a dinâmica definida em (8), obtém-se

$$\dot{V}(t) = x^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) < 0, \quad (27)$$

sendo  $\dot{V}(t)$  a derivada da função de Lyapunov dada por

$$V(t) = x^T(t)Px(t) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0, \quad P = P^T. \quad (28)$$

### 3.3 Projeto do controlador GS com taxa de decaimento $\gamma$

Nesta seção, propõe-se uma condição de projeto de uma realimentação da derivada dos estados do tipo *gain scheduled* com uma taxa  $\gamma$  de decaimento exponencial garantida. Em particular, novas condições na forma LMI são propostas para o sistema definido em (8) considerando a condição (iv) do Lema 2.

**Teorema 4.** Considere o sistema em (1), satisfazendo (A1)-(A3), e a lei de controle em (4). Seja  $\gamma > 0$  um dado escalar. Suponha que exista uma matriz simétrica definida positiva  $Q$  e matrizes  $Z_1, \dots, Z_N, X_1$  e  $X_2$ , com dimensões apropriadas, satisfazendo as seguintes desigualdades:

$$\begin{bmatrix} (A_i X_1^T + X_1 A_i^T + A_i Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_i^T + 2\gamma Q + 2\gamma Z_i^T B_i^T + 2\gamma B_i Z_i) & * \\ QE_i^T + X_2 A_i^T - X_1^T & -X_2 - X_2^T \\ Z_i^T B_i^T & 0_{n \times n} \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} ((2A_i + A_j)X_1^T + X_1(2A_i^T + A_j^T) + A_i Z_i^T B_j^T + A_i Z_j^T B_i^T + A_j Z_i^T B_i^T + B_i Z_i A_j^T + B_i Z_j A_i^T + B_j Z_i A_i^T + 6\gamma Q + 2\gamma(Z_i^T B_i^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T) + 2\gamma(B_i Z_i + B_i Z_j + B_j Z_i)) \\ Q(2E_i^T + E_j^T) + X_2(2A_i^T + A_j^T) - 3X_1^T \\ Z_i^T B_i^T + Z_i^T B_j^T + Z_j^T B_i^T \\ * & * \\ -3X_2 - 3X_2^T & * \\ 0_{n \times n} & \frac{-3Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j, i, j = 1, \dots, N; \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} ((2A_i + 2A_j + 2A_k)X_1^T + X_1(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) + A_i Z_i^T B_k^T + A_i Z_k^T B_j^T + A_j Z_i^T B_k^T + A_j Z_k^T B_i^T + A_k Z_i^T B_j^T + A_k Z_j^T B_i^T + B_i Z_j A_k^T + B_i Z_k A_j^T + B_j Z_i A_k^T + B_j Z_k A_i^T + B_k Z_i A_j^T + B_k Z_j A_i^T + \gamma Q + 2\gamma(Z_i^T B_j^T + Z_i^T B_k^T + Z_j^T B_i^T + Z_j^T B_k^T + Z_k^T B_i^T + Z_k^T B_j^T) + 2\gamma(B_i Z_j + B_i Z_k + B_j Z_i + B_j Z_k + B_k Z_i + B_k Z_j)) \\ Q(2E_i^T + 2E_j^T + 2E_k^T) + X_2(2A_i^T + 2A_j^T + 2A_k^T) - X_1^T \\ Z_i^T B_j^T + Z_i^T B_k^T + Z_j^T B_i^T + Z_j^T B_k^T + Z_k^T B_i^T + Z_k^T B_j^T \\ * & * \\ -X_2 - X_2^T & * \\ 0_{n \times n} & \frac{-Q}{2\gamma} \end{bmatrix} < 0, \quad i \neq j, j \neq k, i, j, k = 1, \dots, N. \quad (31)$$

Então, o sistema definido em (8) é regular e assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ , sendo a matriz  $K_d(\alpha(t))$  dada por:

$$K_d(\alpha(t)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) Z_i Q^{-1}. \quad (32)$$

**Prova.** Suponha que (29), (30) e (31) sejam factíveis. Multiplicando (29) por  $\alpha_i^3 > 0$  e somando em  $i$ , desde  $i = 1$  até  $i = N$ ; (30) por  $\alpha_i^2 \alpha_j > 0$  e somando em  $i$  desde  $i = 1$  até  $i = N - 1$  e em  $j$  desde  $j = i + 1$  até  $j = N$ ; e (31) por  $\alpha_i \alpha_j \alpha_k > 0$  e somando em  $i, j, k$  desde  $i, j, k = 1$  até  $i, j, k = N$  considerando  $i \neq j$  e  $j \neq k$ ; e aplicando o Complemento de Schur (Boyd et al., 1994), chega-se a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) + & * \\ A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) & \\ QE^T(\alpha) + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(\alpha)Z(\alpha) \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix} [-2\gamma Q^{-1}] [Z^T(\alpha)B^T(\alpha) \ 0_{n \times n}] < 0.$$

A partir da expressão acima e executando a soma, obtém-se

$$\begin{bmatrix} (A(\alpha)X_1^T + X_1A^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha)Q^{-1}Z^T(\alpha)B^T(\alpha)) & * \\ QE^T(\alpha) + X_2A^T(\alpha) - X_1^T & -X_2 - X_2^T \end{bmatrix} < 0,$$

que após simples operações algébricas leva a seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} (A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha)Q^{-1}Z^T(\alpha)B^T(\alpha)) & * \\ QE^T(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ -I_{n \times n} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} A(\alpha) \\ -I_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^T < 0. \quad (33)$$

Agora, considere o Lema 2 com

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} (A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) + 2\gamma Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha)Q^{-1}Z^T(\alpha)B^T(\alpha)) & * \\ QE^T(\alpha) & 0_{n \times n} \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = [A^T(\alpha) \ -I_{n \times n}],$$

$$\mathcal{B}^\perp = [I_{n \times n} \ A(\alpha)]^T.$$

Então, pré e pós multiplicando (33) por  $\mathcal{B}^{\perp T}$  e  $\mathcal{B}^\perp$ , respectivamente, sabendo que  $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$ , obtém-se

$$A(\alpha)QE^T(\alpha) + E(\alpha)QA^T(\alpha) + A(\alpha)Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + B(\alpha)Z(\alpha)A^T(\alpha) + 2\gamma Q + 2\gamma Z^T(\alpha)B^T(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha) + 2\gamma B(\alpha)Z(\alpha)Q^{-1}Z^T(\alpha)B^T < 0.$$

Definindo  $P = Q^{-1}$  e  $K_d(\alpha) = Z(\alpha)Q^{-1}$ , chega-se a seguinte desigualdade após algumas manipulações algébricas:

$$P(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-1}A(\alpha) + A^T(\alpha)(E(\alpha) + B(\alpha)K_d(\alpha))^{-T}P + 2\gamma P < 0. \quad (34)$$

Multiplicando (34) pela esquerda por  $x^T(t)$  e a direita por  $x(t)$ , respectivamente, e considerando o sistema definido em (8), pode-se mostrar que

$$V(t) > 0, \quad \dot{V}(t) + 2\gamma V(t) < 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (35)$$

onde  $V(t) = x^T(t)Px(t)$  é uma função de Lyapunov,  $\dot{V}(t) = 2x^T(t)P\dot{x}(t)$  é a derivada temporal de  $V(t)$ , e  $\gamma$  é um escalar menor ou igual a taxa de decaimento exponencial completando a prova do teorema.

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Na sequência são apresentados exemplos numéricos simulados em MATLAB. Os controladores foram projetados

utilizando o *solver* LMILAB (Gahinet et al., 1995) e o *parser* YALMIP.

##### 4.1 Exemplo 1

Considere o sistema definido em (1), com  $N = 2$  e as seguintes matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,7 \end{bmatrix}.$$

Associado ao sistema definido acima, considere o seguinte parâmetro variante no tempo (disponível em tempo real para o controle):

$$a(t) = 0,5 + 0,5\text{sen}\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right), \quad t \geq 0. \quad (37)$$

Note que o conjunto  $\Lambda$  como definido em (3) pode ser representado em termos dos seguintes parâmetros:

$$\alpha_1(t) = \frac{\bar{a} - a(t)}{\bar{a} - \underline{a}}, \quad (38)$$

$$\alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t) = \frac{a(t) - \underline{a}}{\bar{a} - \underline{a}}, \quad (39)$$

sendo  $\bar{a}$  e  $\underline{a}$  os valores máximo e mínimo de  $a(t)$ , respectivamente.

Observe que as definições acima implicam que o sistema (1) é instável em malha aberta, mas satisfaz as suposições (A1), (A2) e (A3). Portanto, pode-se aplicar o Teorema 2 para obter uma lei de controle estabilizante como definida em (4) resultando na seguinte matriz de realimentação da derivada dos estados:

$$K_d(\alpha(t)) = \alpha_1(t)K_{d1} + \alpha_2(t)K_{d2}, \quad (40)$$

sendo

$$K_{d1} = [-0,4143 \ -0,2763], \quad K_{d2} = [-0,6194 \ -0,3103].$$

A Figura 1 apresenta o comportamento dos estados do sistema em malha fechada que partem de condições iniciais  $x_0 = [0 \ 0,5]^T$ , onde se observa que a trajetória dos estados converge para zero, caracterizando a estabilidade do sistema em malha fechada.

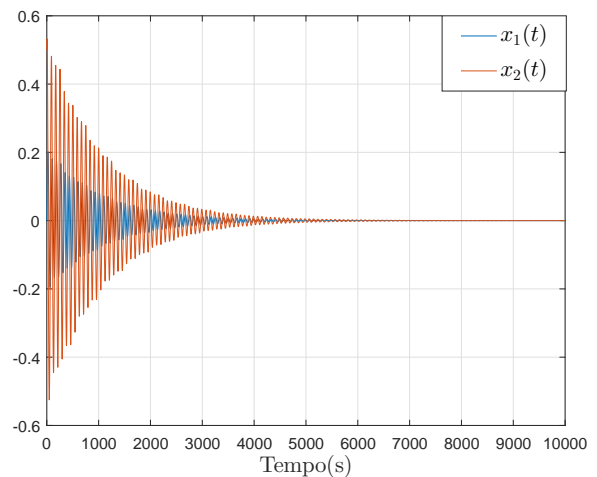


Figura 1. Resposta transitória dos estados  $x_1$  e  $x_2$ .

## 4.2 Exemplo 2

Considere o sistema definido em (1), com  $N = 2$  e as seguintes matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,7 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o Teorema 3, obtém-se a seguinte matriz de ganhos para o controlador

$K_d(\alpha(t)) = \alpha_1(t) [1,8156 \ 0,8381] + \alpha_2(t) [2,0077 \ 0,9782]$ , sendo os parâmetros  $\alpha_1(t)$  e  $\alpha_2(t)$  definidos em (38) e (39), respectivamente.

A Figura 2 apresenta a resposta temporal dos estados, onde se observa que o tempo de estabilização foi de aproximadamente 2000 segundos.

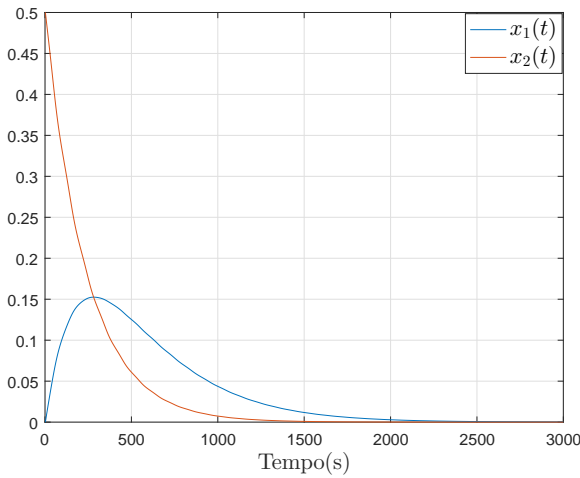


Figura 2. Resposta transitória dos estados  $x_1$  e  $x_2$ .

Visando melhorar a resposta transitória em malha fechada, aplica-se o Teorema 4 com  $\gamma = 0.2$  levando a seguinte matriz de ganhos:

$$K_d(\alpha(t)) = \alpha_1(t) [0,1454 \ 0,4882] + \alpha_2(t) [0,1179 \ 0,6730].$$

Na Figura 3, mostram-se os estados do sistema em malha fechada onde se percebe uma significativa melhora na resposta transitória do sistema em malha fechada (tempo de estabilização menor do que 700 segundos) quando comparado aos resultados apresentados na Figura 2.

## 4.3 Análise de factibilidade

Considere o sistema definido em (1), com  $N = 2$  e as seguintes matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -2 & \xi_1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

sendo  $\xi_1$  e  $\xi_2$  parâmetros constantes que podem assumir valores nos seguintes intervalos

$$80 \leq \xi_1 \leq 140, \quad 120 \leq \xi_2 \leq 250.$$

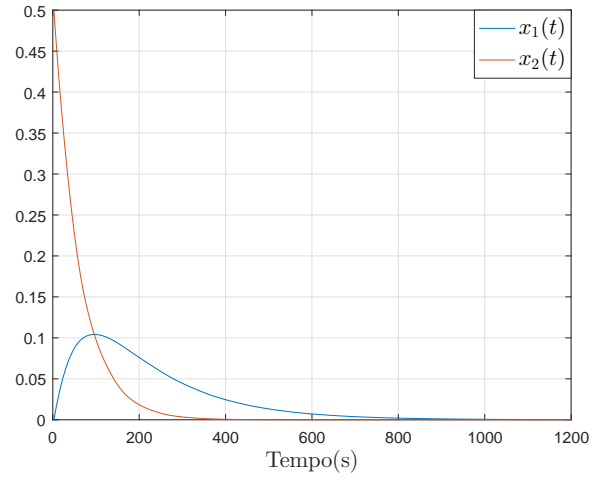


Figura 3. Resposta transitória dos estados  $x_1$  e  $x_2$  com  $\gamma = 0,2$ .

Neste exemplo, busca-se avaliar o grau de conservadorismo entre os Teoremas 2 e 3 propostos neste trabalho. Com esta finalidade, determina-se numericamente a região de factibilidade das condições LMI considerando um passo de variação constante nos valores de  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . A Figura 4 apresenta a região de factibilidade formada pelos pontos factíveis dos Teoremas 2 e 3 para diferentes valores de  $\xi_1$  e  $\xi_2$  com um passo de variação igual a 3. Observa-se que o resultado obtido indica que o Teorema 3 apresenta condições de estabilização menos conservadoras por admitir um número maior de soluções factíveis.

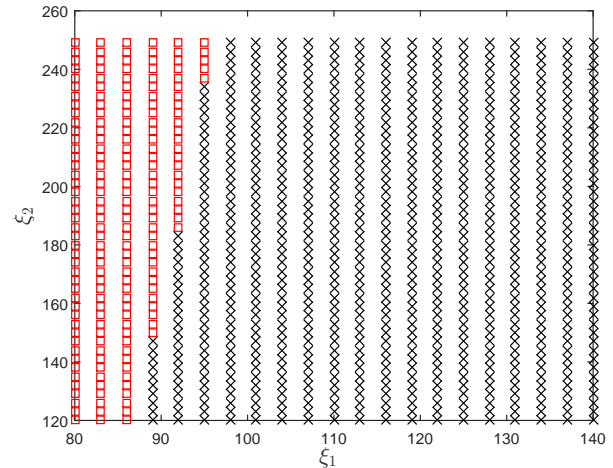


Figura 4. Região de factibilidade para os Teoremas 2 (x) e 3 (x,□).

## 5. CONCLUSÕES

Este trabalho propôs novas metodologias para projetar uma lei de controle GS para sistemas descritores sujeitos a variações paramétricas temporais considerando uma realimentação da derivada dos estados. As estratégias propostas são construídas em termos de restrições na forma LMI, considerando uma função de Lyapunov independente dos parâmetros. O Lema de Finsler também é aplicado visando obter condições de projeto menos conservadoras

e com uma taxa de decaimento exponencial garantida. Os exemplos numéricos possibilitaram confirmar a efetividade e aplicabilidade da metodologia proposta.

sient stability by PV farm with fuzzy gain scheduling of PID controller. *IEEE Systems Journal*, 11, 1684–1691.

## REFERÊNCIAS

- Abdelaziz, T. and Valasek, M. (2004). Pole-placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 151(4), 377 – 385.
- Barbosa, E., Souza, F., and Palhares, R. (2019). LMI-based design of state-derivative feedback control for Takagi-Sugeno fuzzy descriptor systems. 14 Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. Studies in Applied Mathematics, 15. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 2 edition.
- da Silva, E., Assunção, E., Teixeira, M.C., Faria, F.A., and Buzachero, L.F. (2012). Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–21.
- Dai, L. (1988). Observers for discrete singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33, 187–191.
- Duan, G.R. (2010). *Analysis and Design of Descriptor Linear Systems*, volume 23. doi:10.1007/978-1-4419-6397-0.
- Faria, F.A., Assunção, E., and Teixeira, M.C.M. (2009). Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, 20, 83 – 93.
- Faria, F.A., Assunção, E., Teixeira, M.C.M., and Cardim, R. (2010). Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 1–15.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., and Chilali, M. (1995). *LMI control toolbox user's guide*.
- Lewis, F. and Syrmos, V. (1991). A geometric theory for derivative feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(9), 1111 – 1116.
- Llins, L.I.H., Assunção, E., Teixeira, M.C.M., Cardim, R., and Cadalso, M.R.R. (2017). Design of gain scheduling control using state derivative feedback,. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, 11.
- Merry, R.J.E., Holierhoek, J.L., van de Molengraft, M.J.G., and Steinbuch, M. (2014). Gain scheduling control of a walking piezo actuator. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 19(3), 954–962.
- Montagner, V.F. and Peres, P.L.D. (2004). State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, volume 3, 2004–2009 vol.3.
- Mozelli, L., Palhares, R., and Mendes, E. (2010). Equivalent techniques extra comparisons and less conservative control design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IET Control Theory and Applications*, 4, 2813–2822.
- Skelton, R.E., El Iwasaki, T., and Grigoriadis, K. (1997). *A Unified Algebraic Approach to Control Design*. Bristol:Taylor & Francis, New York.
- Zhang, S., Wang, Z., Ding, D., Wei, G., Alsaadi, F., and Hayat, T. (2017). Improvement of power system tran-