

Revisitando o Oscilador a Ponte de Wien sob o Enfoque da Teoria de Controle

Paulo Roberto Brero de Campos
Miguel Antonio Sovierzoski

brero@utfpr.edu.br, miguelaso@utfpr.edu.br
Depto. de Eletrônica (DAELN-CT)
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Avenida Sete de Setembro, 3165 CEP: 80230-901 – Curitiba – Paraná

Abstract: In this work, the Wien bridge oscillator is analyzed through the phase plane and compared with experimental results. Initially, the linear model of the oscillator is developed through the transfer function. The root locus is analyzed, determining the condition for stable oscillation of the dynamic system. The model is determined by state variables. A non-linear element, incandescent lamp, is tested, experimentally surveying the characteristics to determine the model. The model of the non-linear element is introduced in the state equations of the dynamic system. The simulation diagram is used to determine the phase plane of the nonlinear system. Tests are carried out and the phase plane of the oscillator circuit is determined experimentally. The behaviors of the simulation and the test are compared, obtaining a stable limit cycle for the Wien bridge oscillator.

Resumo: Neste trabalho é feita a análise do oscilador a ponte de Wien através do plano de fase e comparado com resultados experimentais. Inicialmente é desenvolvido o modelo linear do oscilador através da função de transferência. É analisado o lugar das raízes determinando a condição para oscilação estável do sistema dinâmico. É determinado o modelo pelas variáveis de estado. É ensaiado um elemento não linear, lâmpada incandescente, levantando experimentalmente as características para determinar o modelo. O modelo do elemento não linear é introduzido nas equações de estado do sistema dinâmico. O diagrama de simulação é utilizado para determinar o plano de fase do sistema não linear. Ensaios são realizados e determina-se experimentalmente o plano de fase do circuito oscilador. Os comportamentos da simulação e do ensaio são comparados, obtendo-se ciclo limite estável para o oscilador a ponte de Wien.

Keywords: Non-linear system; control system; Wien bridge oscillator, stable limit cycle, phase space.

Palavras-chaves: Sistema não linear; sistema de controle; oscilador a ponte de Wien, ciclo limite estável, plano de fase.

1. INTRODUÇÃO

Osciladores são circuitos que produzem um sinal alternado. O oscilador a ponte de Wien, construído com resistores e capacitores, é um oscilador harmônico, isto é, gera um sinal senoidal (Pertence Jr., 1988).

O oscilador a Ponte de Wien é uma das configurações mais utilizadas para geração de sinais harmônicos (Pertence Jr., 1988).

O oscilador a ponte de Wien no modo linear opera no limite de estabilidade, pois ele é projetado para que os polos fiquem exatamente no eixo $j\omega$ no plano s . A localização dos polos depende do ganho do circuito e há um valor único de ganho que determina a localização dos polos no eixo $j\omega$. Para valores maiores de ganho o oscilador torna-se instável, ocorrendo a saturação, e para valores menores ele torna-se assintoticamente estável, não mantendo a oscilação (Unicamp, 2020a). O ajuste do oscilador é crítico, sendo que é muito difícil manter o circuito oscilando, pois qualquer variação no ganho leva os polos para fora do eixo $j\omega$.

Osciladores práticos são sistemas não lineares, no qual a oscilação ocorre devido à existência de um ciclo limite estável (Khalil, 2002, pág. 81).

Em aplicações práticas é adicionado um elemento não linear fazendo com que o sistema oscile com uma amplitude estável.

Como elemento não linear é possível utilizar componentes como lâmpadas incandescentes e rede de diodo com resistores, cujo objetivo é estabilizar a amplitude de oscilação.

O objetivo deste trabalho é aprofundar os estudos do oscilador a Ponte de Wien, fazendo a análise para o modo linear e para a configuração não linear, através do modelo por variáveis de estado.

Na sequência do trabalho, na Seção 2 apresenta-se o circuito do oscilador a ponte de Wien, determina-se a função de transferência, mostrando que é um sistema com realimentação positiva. Apresenta-se ainda a análise do lugar

das raízes e determina-se a equação da frequência de oscilação do circuito. Na Secção 3 desenvolve-se o modelo de variáveis de estado do circuito oscilador. Na Secção 4 apresenta-se o modelo de um elemento não linear para o controle de ganho do circuito. Na Secção 5 apresenta-se o modelo não linear do circuito com variáveis de estado. Na Secção 6 faz-se a análise através de plano de fase. Na Secção 7 apresentam-se simulações e medições obtidas com o circuito. Finalizando-se com as conclusões na Secção 8.

2. OSCILADOR A PONTE DE WIEN

O circuito do oscilador a ponte de Wien, representado na forma de circuito em ponte é apresentado na Fig. 1 (Millman e Halkias, 1981, págs 553-555).

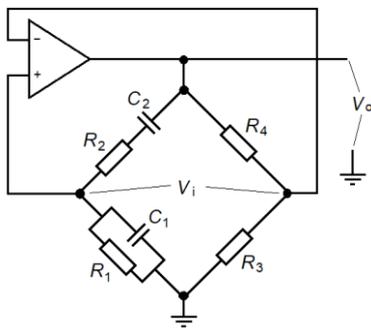


Fig. 1 Oscilador a ponte de Wien utilizando o amplificador operacional como elemento ativo.

2.1 Modelo de um Sistema Realimentado

A Fig. 2 apresenta a estrutura de um sistema realimentado, onde $G(s)$ é a função de transferência de malha direta, e $H(s)$ é a função de transferência da malha de realimentação, (Ogata, 2010, págs 16-17).

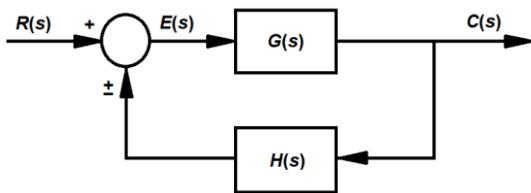


Fig. 2 Representação de um sistema com realimentação positiva ou negativa.

Do sistema da Fig. 2, equaciona-se o sinal de erro $E(s)$ e o sinal de saída $C(s)$, obtendo-se (1) e (2).

$$E(s) = R(s) \pm H(s) C(s) \quad (1)$$

$$C(s) = E(s) G(s) \quad (2)$$

Aplicando (1) em (2), obtém-se a função de transferência do sistema realimentado, apresentada em (3).

$$FT = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp H(s) G(s)} \quad (3)$$

2.2 Modelo do Oscilador a Ponte de Wien

Redesenhando o circuito da Fig. 1, observando a estrutura de sistema realimentado da Fig. 2, obtém-se a Fig. 3.

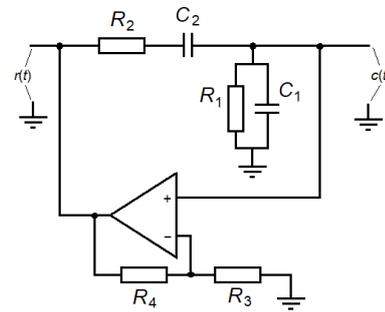


Fig. 3 Oscilador a ponte de Wien com amplificador operacional, na representação de sistema realimentado com ramo direto e malha de realimentação positiva.

No ramo direto da Fig. 3, observa-se um filtro passa-altas composto por R_2 e C_2 , seguido de um filtro passa-baixas composto por R_1 e C_1 , resultando na função de transferência de um filtro passa-faixa. A função de transferência em ramo direto $G(s)$ é determinada pelo divisor de impedâncias Z_s e Z_p , sendo Z_s composta pela associação série de R_2 e C_2 , e Z_p composta pela associação paralela entre R_1 e C_1 , resultando em (4).

$$G(s) = \frac{\frac{s}{R_2 C_1}}{s^2 + s \left(\frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2}{R_1 C_1 R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2}} \quad (4)$$

Para facilitar a análise, reduz-se o número de variáveis utilizando-se componentes com valores casados, sendo $R = R_1 = R_2$, e $C = C_1 = C_2$. Desta forma, (4) torna-se representada por (5).

$$G(s) = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + s \left(\frac{3}{RC} \right) + \frac{1}{(RC)^2}} \quad (5)$$

Na malha de realimentação da Fig. 3, tem-se o amplificador não inversor. A função de transferência da malha de realimentação positiva é representada por (6).

$$H(s) = \frac{R_3 + R_4}{R_3} = 1 + \frac{R_4}{R_3} = K \quad (6)$$

Onde K é o ganho do amplificador não inversor, determinado pelos resistores R_3 e R_4 .

Aplicando (5) e (6) na equação do sistema realimentado, (3), obtém-se a função de transferência do sistema realimentado da Fig. 3, representado por (7).

$$FT = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + s\left(\frac{3-K}{RC}\right) + \frac{1}{(RC)^2}} \quad (7)$$

A função de transferência do sistema de segunda ordem é dada por (7), onde o zero está na origem do plano s e o posicionamento dos polos são determinados pelo ganho K .

2.3 Análise do Oscilador a Ponte de Wien pelo Lugar das Raízes

Como o oscilador a ponte de Wien é um circuito com realimentação positiva, é interessante analisar o posicionamento dos polos através do lugar das raízes (Ogata, 2010, págs 247-248).

Normalizando os componentes do circuito, fazendo $R = C = 1$, em (7), obtém-se (8) que é a função de transferência normalizada de malha fechada.

$$FT_{norm} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s}{s^2 + s(3-K) + 1} \quad (8)$$

Fazendo a análise do lugar das raízes desse sistema dinâmico, obtém-se a Fig. 4, lembrando que $s = \sigma + j\omega$.

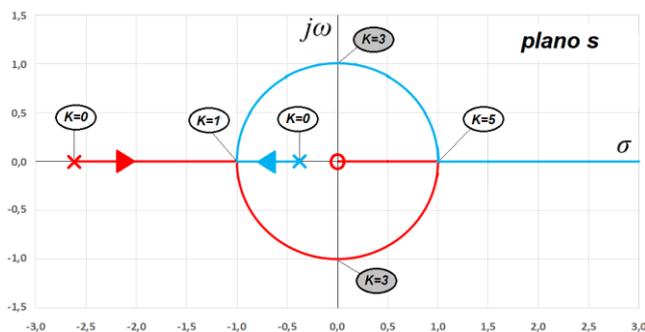


Fig. 4 Planos s com o lugar das raízes do sistema normalizado da Fig. 3, representado por (8).

Considerando o lugar das raízes mostrado na Fig. 4, têm-se distintos comportamentos do sistema dinâmico (8) para específicas faixas de valores de ganho K , sendo essas descritas a seguir:

- $0 \leq K < 1$: pólos reais distintos, $\sigma < 0$, sistema estável;
- $K = 1$: polos reais iguais, $\sigma < 0$, sistema estável;
- $1 < K < 3$: polos complexos conjugados, com $\sigma < 0$, sistema estável, transitório oscilatório com decaimento exponencial;
- $K = 3$: polos imaginários conjugados, $\sigma = 0$, transitório oscilatório sem decaimento. Sistema marginalmente estável;
- $3 < K < 5$: polos complexos conjugados com $\sigma > 0$, transitório oscilatório com incremento exponencial. Sistema instável;
- $K = 5$: polos reais iguais, $\sigma > 0$. Sistema instável;
- $5 < K < \infty$: polos reais distintos, $\sigma > 0$. Sistema instável.

Para que o circuito da Fig. 3 opere no modo oscilador, que é o modo desejado, o ganho K deve ser igual a 3. Voltando em (6) com este valor, obtém-se que a relação entre os resistores deve ser $R_4 = 2.R_3$.

2.4 Frequência de Oscilação do Oscilador a Ponte de Wien

No lugar das raízes, Fig. 4, observa-se que para $K = 3$, o sistema realimentado opera como oscilador ($\sigma = 0$), marginalmente estável, sendo possível determinar a frequência de oscilação.

Retornando em (7) com o valor $K = 3$, e como $\sigma = 0$, então os polos são imaginários conjugados e obtém-se no denominador:

$$(j\omega)^2 + \frac{1}{(RC)^2} = 0 \quad , \quad j^2 = -1$$

⋮

$$\omega = \frac{1}{\pm RC} \quad , \quad \text{como } \omega > 0, \text{ então:}$$

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

$$f_{osc} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (9)$$

Ou seja, a frequência de oscilação do sistema é determinada por (9).

3. MODELO DE VARIÁVEIS DE ESTADOS DO OSCILADOR A PONTE DE WIEN

O circuito do oscilador a ponte de Wien, apresentado pelas Fig. 1 e 3, não são as formas mais usuais de representações. O oscilador a ponte de Wien é mais comumente representado como apresenta a Fig. 5 (Alexander e Sadiku, 2013, págs 391-393).

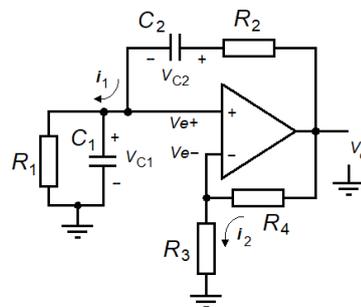


Fig. 5 Oscilador a ponte de Wien com amplificador operacional.

Este sistema será analisado pelas variáveis de estado. Neste tópico determina-se inicialmente as equações diferenciais de primeira ordem do sistema e na sequência obtém-se o modelo do oscilador em variáveis de estado.

No modelo do amplificador operacional ideal as tensões nas entradas inversora e não inversora são iguais, $v_{e+} = v_{e-}$, então, a tensão no resistor R_3 será $v_{R3} = v_{C1}$.

O ganho do amplificador não inversor é $K = (R_3 + R_4)/R_3$. A corrente na entrada não inversora é definida como i_e . Como $i_e = 0$, tem-se que $i_2 = v_O / (R_3 + R_4)$, então: $v_{R3} = v_{C1} = v_O \cdot R_3 / (R_3 + R_4) = v_O / K$. Obtém-se (10), que representa a equação de saída.

$$v_o = K.v_{C1} \quad (10)$$

Para a malha de tensão com a entrada não inversora, obtém-se (11).

$$\begin{aligned} v_o &= R_2.i_1 + v_{C2} + v_{C1}, \text{ pois } i_{e+} = 0 \\ v_o &= R_2.C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} + v_{C2} + v_{C1} \\ K.v_{C1} &= R_2.C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} + v_{C2} + v_{C1} \\ R_2.C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} &= K.v_{C1} - v_{C1} - v_{C2} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} &= \frac{(K-1)}{R_2.C_2}.v_{C1} + \frac{-1}{R_2.C_2}.v_{C2} \end{aligned} \quad (11)$$

A equação (11) representa a primeira equação diferencial de ordem 1 do sistema, na forma de representação por estados.

Na malha da entrada não inversora, como $i_{e+} = 0$, obtém-se as equações de corrente:

$$i_1 = C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} + \frac{v_{C1}}{R_1}, \text{ e } i_1 = C_2 \frac{dv_{C2}}{dt}$$

Igualando as equações de i_1 :

$$R_1 C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} = R_1 C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} \quad (12)$$

Aplicando (11) em (12) obtém-se (13), a segunda equação diferencial de ordem 1 do sistema, na forma de representação por estados.

$$\begin{aligned} R_1 C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} + v_{C1} &= R_1 C_2 \left(\frac{(K-1)}{R_2.C_2}.v_{C1} + \frac{-1}{R_2.C_2}.v_{C2} \right) \\ \vdots \\ \frac{dv_{C1}}{dt} &= \frac{(K-1)R_1 - R_2}{R_1 R_2 C_1}.v_{C1} + \frac{-1}{R_2 C_1}.v_{C2} \end{aligned} \quad (13)$$

As variáveis de estados são definidas em função dos elementos que armazenam energia no sistema.

Neste circuito os elementos que armazenam energia são os capacitores, por isto serão necessárias duas variáveis de estado para representar o sistema.

As variáveis de estado serão definidas como: x_1 a tensão no capacitor C_1 e x_2 a tensão no capacitor C_2 , como mostrado na Fig. 6, (Khalil, 2002) e (Unicamp, 2020b), e representado por (14). A definição da polaridade da tensão em C_2 e R_2 é diferente da adotada nos artigos citados.

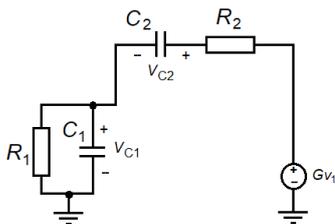


Fig. 6 Definição das variáveis de estado do sistema oscilador.

$$\begin{cases} x_1 = v_{C1} \\ x_2 = v_{C2} \end{cases} \quad (14)$$

Reescrevendo (13), (11) e (10), utilizando a representação de (14), obtém-se finalmente as equações dinâmicas do sistema, apresentadas em (15).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(\frac{(K-1)R_1 - R_2}{R_1 R_2 C_1} \right).x_1 + \left(\frac{-1}{R_2 C_1} \right).x_2 \\ \dot{x}_2 = \left(\frac{K-1}{R_2 C_2} \right).x_1 + \left(\frac{-1}{R_2 C_2} \right).x_2 \\ v_o = K.x_1 \end{cases} \quad (15)$$

4. CONTROLE DE GANHO COM LÂMPADA INCANDESCENTE

Para controlar a amplitude de oscilação utiliza-se um elemento não linear no lugar de R_3 , cuja resistência varia com a amplitude da tensão sobre ele, resultando o circuito da Fig. 7 (Malvino e Bates, 2016, págs. 905-908; Horowitz e Hill, 2017, págs. 436-437).

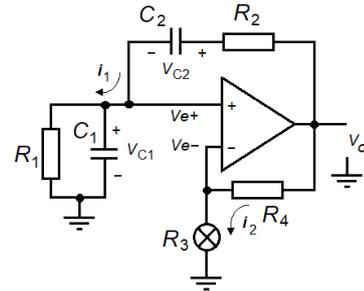


Fig. 7 Oscilador a ponte de Wien controlado por lâmpada incandescente.

4.1 Modelamento e identificação dos parâmetros da lâmpada incandescente

Para estabilizar a amplitude de oscilação, pode-se utilizar uma lâmpada incandescente para o controle de ganho do oscilador, pois o filamento de tungstênio possui uma característica de resistência não linear dependente da tensão aplicada em seus terminais.

Como experimento neste trabalho, foi utilizada uma lâmpada incandescente de 110 volts/3 watts, soquete E17.

Utilizando uma fonte de alimentação ajustável, voltímetro e amperímetro, foi levantada experimentalmente a tabela de valores $V \times I$ para a lâmpada incandescente, na faixa de tensão utilizada no circuito.

A Fig. 8 apresenta a curva característica $V \times I$ da lâmpada incandescente com comportamento não linear de resistência. A inclinação da curva representa a resistência da lâmpada, sendo possível notar que ela varia de forma não linear conforme a tensão (ou corrente) em seus terminais.

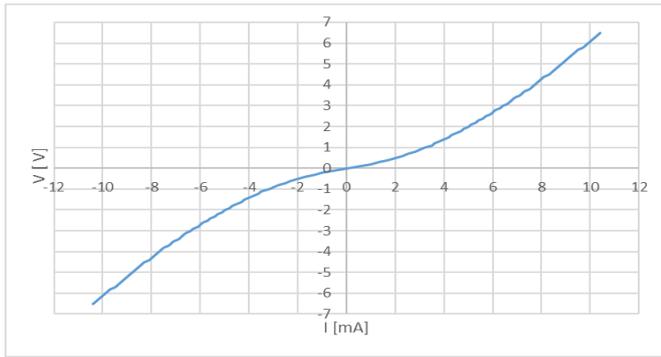


Fig. 8 Curva característica V x I da lâmpada incandescente.

Da tabela de valores V x I, foi calculada a resistência (ohms) x tensão (volts) da lâmpada incandescente. Existem várias técnicas de ajuste de curvas que podem ser utilizadas, mas optou-se pela regressão linear com linearização dos dados para representar a equação na forma de potência simples $y = \alpha(x)^\beta$, com $\beta < 1$, sendo α e β coeficientes constantes (Chapra, 2013, págs. 344-348). A equação da curva ajustada é apresentada em (16).

$$R_3 = 109,5 \cdot |V|^{0,453} \quad (16)$$

A Fig. 9 apresenta a variação da resistência com a tensão, e o comportamento do modelo da resistência da lâmpada.

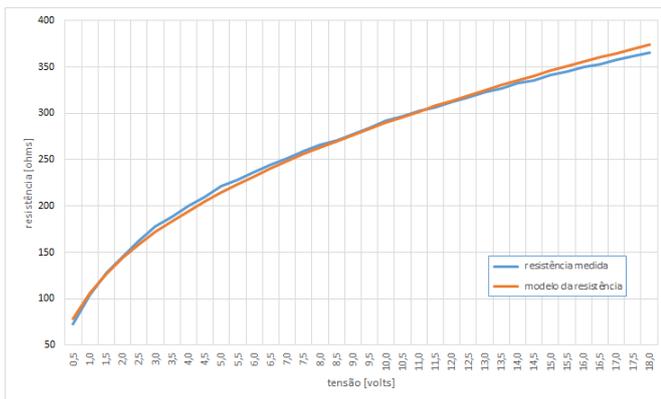


Fig. 9 Comparação entre valores calculados de resistência da lâmpada e o modelo da resistência da lâmpada expressando graficamente (16).

4.2 Controle de estabilidade da amplitude

Na Fig. 4, o lugar das raízes mostrou que o ganho $K = 3$ é a condição para manter o sistema em oscilação estável, e determinou-se a relação entre R_4 e R_3 .

Variações em R_4 e R_3 alteram o ganho K tirando o sistema do ponto de operação ou do comportamento desejado. Para resolver este problema é colocado um elemento não linear cuja resistência é diretamente proporcional à tensão em seus terminais.

No lugar de R_3 pode-se utilizar uma lâmpada incandescente e ajustar R_4 para o circuito oscilar. Quando a tensão de saída aumentar, devido a variações dos componentes, a resistência da lâmpada aumenta (Fig. 9) diminuindo o ganho (6):

$$V_o \text{ aumenta} \rightarrow VR_3 \text{ aumenta} \rightarrow R_3 \text{ aumenta} \rightarrow K \text{ diminui} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow V_o \text{ diminui} \rightarrow VR_3 \text{ diminui} \rightarrow R_3 \text{ diminui} \rightarrow K \text{ aumenta} \rightarrow \\ &\rightarrow V_o \text{ aumenta} \rightarrow VR_3 \text{ aumenta} \rightarrow \end{aligned}$$

Com isto o sistema estabiliza a amplitude da oscilação.

5. MODELO NÃO LINEAR DE VARIÁVEIS DE ESTADO

Partindo de (15), que mostra as equações dinâmicas do oscilador ponte de Wien linear, pode-se obter as equações para o caso não-linear, substituindo a equação da lâmpada em R_3 , dada por (16), na equação do ganho (6).

Para $R_4 = 330$ ohms, pode-se escrever a equação do ganho K como mostrado em (17).

$$K = 1 + \frac{330}{109,5|V|^{0,453}} = 1 + 3,014|V|^{-0,453} \quad (17)$$

Pela Fig. 7 é possível notar que a tensão em R_3 é igual à tensão no capacitor C_1 , isto é, $V = v_{C1}$, e como $v_{C1} = x_1$, pode-se escrever $V = x_1$, substituindo o ganho K nas equações dinâmicas, (15), e para os valores de $R_1 = R_2 = 1000 \Omega$, e $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$, obtém-se (18).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1000 \left(3,014 |x_1|^{-0,453} - 1 \right) x_1 - 1000 x_2 \\ \dot{x}_2 = 1000 \left(3,014 |x_1|^{-0,453} \right) x_1 - 1000 x_2 \\ v_o = \left(1 + 3,014 |x_1|^{-0,453} \right) x_1 \end{cases} \quad (18)$$

A variável x_1 pode ser escrita como $x_1 = \text{sgn}(x_1)/|x_1|$ e lembrando que $|x/y| = |x|/|y|$ e $|xy| = |x||y|$, a forma final das equações dinâmicas do sistema é apresentada em (19).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \text{sgn}(x_1) 3014 |x_1|^{0,547} - 1000 x_1 - 1000 x_2 \\ \dot{x}_2 = \text{sgn}(x_1) 3014 |x_1|^{0,547} - 1000 x_2 \\ v_o = \text{sgn}(x_1) 3,014 |x_1|^{0,547} + x_1 \end{cases} \quad (19)$$

Onde $\text{sgn}(x)$ indica o sinal da variável x , isto é, se $x > 0$, $\text{sgn}(x) = +1$; se $x < 0$, $\text{sgn}(x) = -1$.

6. ANÁLISE NÃO LINEAR ATRAVÉS DO PLANO DE FASE

Uma forma de analisar um sistema não linear de segunda ordem é através do plano de fase. O plano de fase é uma forma gráfica de resolução da equação diferencial (Castrucci e Curti, 1981).

Um dos métodos utilizados é o método das isóclinas, que são curvas onde a inclinação da trajetória é constante (Castrucci e Curti, 1981). A equação é obtida fazendo a razão das equações de estado, como apresentada em (20).

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\text{sgn}(x_1) 3014 |x_1|^{0,547} - 1000 x_2}{\text{sgn}(x_1) 3014 |x_1|^{0,547} - 1000 x_1 - 1000 x_2} = \alpha \quad (20)$$

Para obter as isóclinas, são arbitrados valores para α . Para cada valor de α , desenha-se a isóclina $x_2 = f(x_1)$. A inclinação da trajetória ao cruzar a isóclina é dada por $\arctg(\alpha)$. Assim,

partindo de alguns pontos iniciais podem ser desenhadas as trajetórias cuja inclinação é dada pelas isóclinas mais próximas.

Na Fig. 10 são mostradas isóclinas e trajetórias no plano de fase. O plano de fase da Fig. 10(a), mostra isóclinas afastadas da origem e o plano de fase da Fig. 10(b) foi obtido fazendo a ampliação da região próxima da origem. É possível notar que as isóclinas possuem características diferentes porque as equações são não lineares. Para condições iniciais afastadas da origem, as trajetórias tendem para a origem. Para pontos próximos da origem, as trajetórias se afastam da origem. Assim, as trajetórias tendem para um ciclo limite.

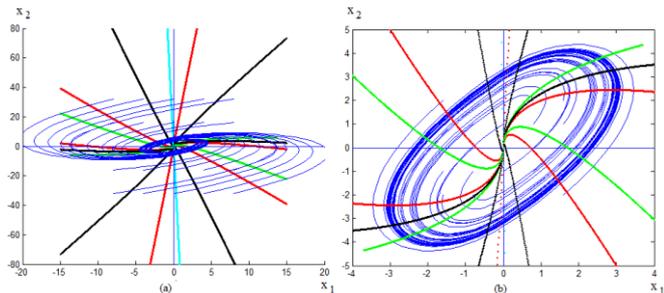


Fig. 10 Plano de fase do sistema, mostrando isóclinas e trajetórias. (a) para condições iniciais afastadas da origem. (b) para condições iniciais próximas da origem.

O diagrama de simulação do sistema oscilador é mostrado na Fig. 11.

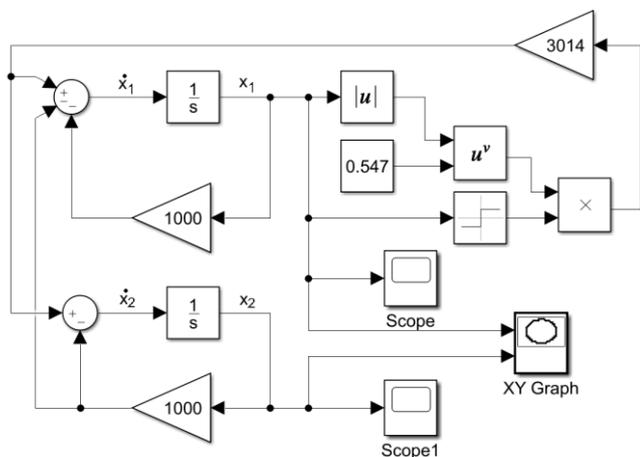


Fig. 11 Diagrama de simulação das equações de estado do sistema oscilador a ponte de Wien.

Vale ressaltar que o bloco do Simulink u^v executa a função $sgn(u)|u|^v$. Mas para que não ficasse dúvida e para deixar o modelo compatível com a equação de estado, no diagrama de simulação da Fig. 11 foi incluído o bloco módulo de $|u|$ e o bloco $sgn(u)$.

7. SIMULAÇÃO E MEDIÇÕES

O circuito da Fig. 7 foi ensaiado e medições foram realizadas com o osciloscópio. A Fig. 12 apresenta o sinal v_o de saída do oscilador.

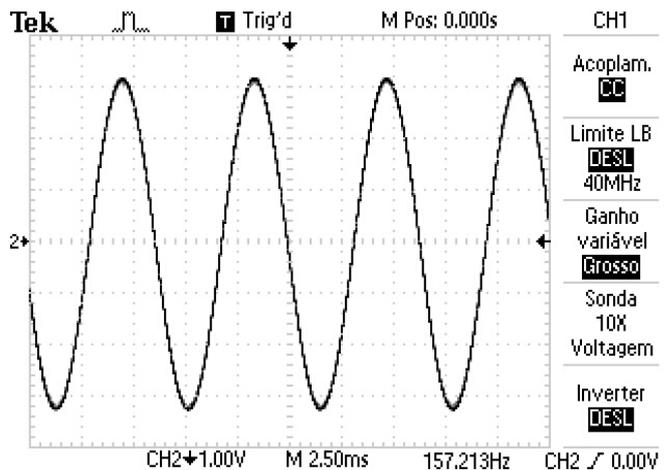


Fig. 12 Sinal v_o , tensão de saída do oscilador a ponte de Wien, observado com o osciloscópio.

A Fig. 13 apresenta os sinais x_1 e x_2 , que são as tensões nos capacitores.

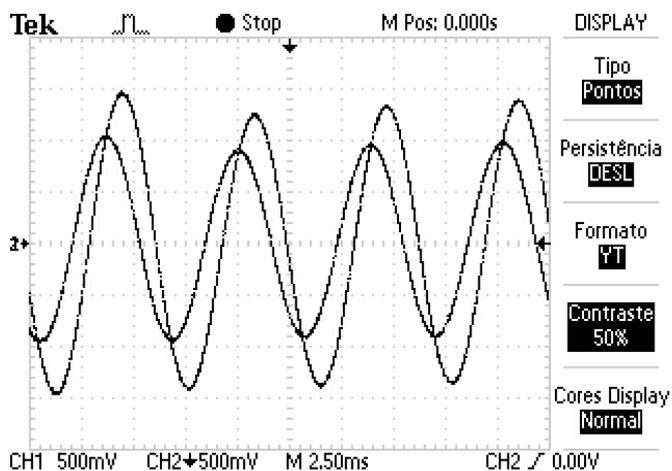


Fig. 13 Sinal x_1 (canal 1 – amplitude menor) e sinal x_2 (canal 2 – amplitude maior), observados com osciloscópio.

A oscilação é um fenômeno que pode ocorrer em um sistema dinâmico e é descrito por uma solução periódica, que no plano de fase é uma trajetória fechada denominada ciclo limite.

Em um sistema linear de segunda ordem ocorre oscilação quando os autovalores são $\pm j\omega$, isto é, eles estão no eixo imaginário. Mas um oscilador linear não é estruturalmente estável e a amplitude de oscilação depende das condições iniciais. Estes problemas não ocorrem em um oscilador não linear (Khalil, 2002).

O gráfico do plano de fase mostrado na Fig. 14 foi obtido através da simulação com o software SIMULINK do MATLAB. Partindo de duas condições iniciais é possível observar que há um ciclo limite, resultando em uma oscilação estável.

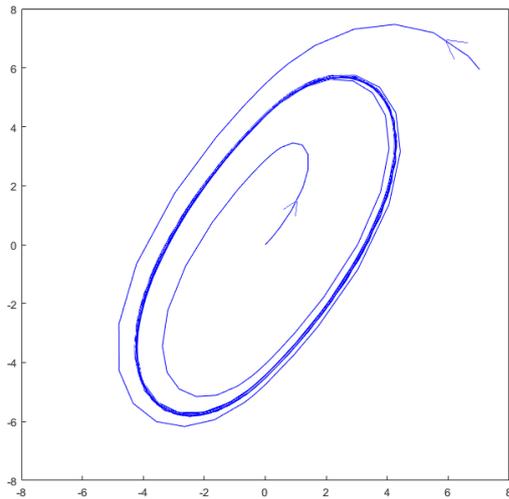


Fig. 14 Simulação x_2 versus x_1 , mostrando um ciclo limite estável, partindo o sistema de duas condições iniciais.

Existe um Toolbox para desenhar as trajetórias no plano de fase, mas para versões antigas do MATLAB o Toolbox pode não funcionar a contento. Em (Machado, 2020) é mostrado um programa que resolve a equação diferencial no próprio MATLAB, mostrando diversas trajetórias do plano de fase, que é aplicado em (19) obtendo-se a Fig. 15. Na Fig. 15 são mostradas as trajetórias para um conjunto de condições iniciais, todos convergindo para o ciclo limite estável.

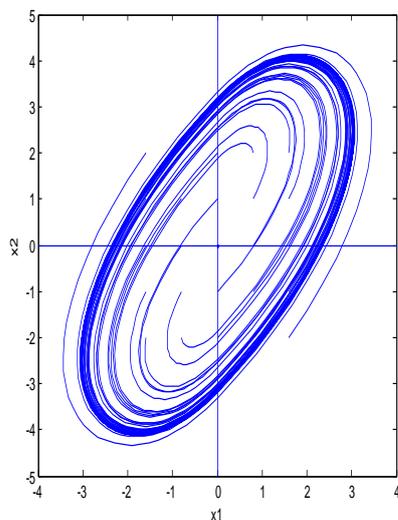


Fig. 15 Simulação x_2 versus x_1 , para o sistema da Fig. 7, utilizando (19), mostrando o ciclo limite estável.

O gráfico da Fig. 15 indica um ciclo limite estável. Isto é, o sistema partindo de diferentes valores de x_1 e x_2 (tensão nos capacitores), o sistema converge para uma trajetória resultando na oscilação estável.

A Fig. 16 apresenta o ciclo limite estável do oscilador a ponte de Wien ensaiado em laboratório.

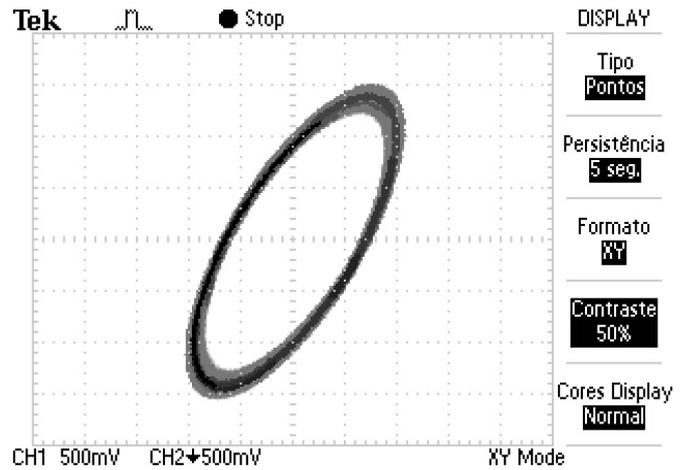


Fig. 16 Sinal de estado x_2 versus x_1 , apresentando o ciclo limite estável do oscilador a ponte de Wien, medido com o osciloscópio no formato XY.

Na Fig. 17 foram aplicadas perturbações no circuito, e no osciloscópio foi incluído persistência de tela, sendo que o sistema retornou para o ciclo limite estável.

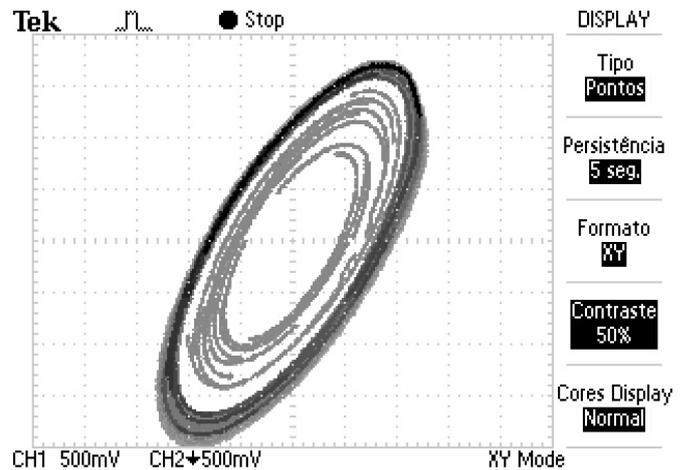


Fig. 17 Sinal de estado x_2 versus x_1 com perturbações, apresentando o ciclo limite estável do oscilador a ponte de Wien, medido pelo osciloscópio no formato XY.

A frequência do sinal simulado foi de 151,15Hz e do sinal medido na prática foi de 157,2 Hz, resultando em um erro de 4%.

8. CONCLUSÕES

Neste artigo foi desenvolvido o modelo linear e não linear para o oscilador a ponte de Wien, a partir das equações de estado.

Para manter a amplitude estável (controle de ganho), foi utilizada uma lâmpada incandescente como elemento não linear. Foi feito o modelamento da lâmpada, resultando em uma equação não linear de resistência. Esta equação não linear foi incluída no modelo da equação de estados, resultando em uma equação de estados não linear.

Foi feita a simulação do modelo não linear no plano de fase, onde foram desenhadas as trajetórias do sistema.

O sistema não linear foi simulado usando o Matlab e o Simulink. Foi também ensaiado o circuito do oscilador na prática, sendo feitas comparações entre as respostas, e observado o ciclo limite estável do oscilador a ponte de Wien.

Foi possível observar que o sistema prático e o sistema simulado tiveram resultados compatíveis.

REFERÊNCIAS

- Alexander, C.K., Sadiku, M.N.O., Fundamentos de Circuitos Elétricos, 5a. edição, Porto Alegre, AMGH Editora, 2013.
- Castrucci, P.B.L. e Curti, R., Sistemas Não-Lineares, Edgard Blücher, São Paulo, 1981.
- Chapra, S.C., Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas, 3ª. Edição, AMGH Editora, 2013.
- Horowitz, P., Hill, W., A Arte da Eletrônica, Circuitos Eletrônicos e Microeletrônica, 3ª. Edição, 2017, Bookman.
- Khalil, Hassan. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- Machado, Tenreiro. Análise de Sistemas Não Lineares por Plano de Fase Recorrendo ao MATLAB. Disponível em: <http://ave.dee.isep.ipp.pt/~gris/teaching/MCSDI/files/guioes/MCSDI_guiao_02_plano_de_fase.pdf> Acesso em: 11/03/2020.
- Malvino, A., Bates, D., Eletrônica, volume II, 8ª. Edição, Porto Alegre, AMGH Editora, 2016.
- Millman, J., Halkias, C.C., Eletrônica: Dispositivos e Circuitos, São Paulo, McGraw-Hill, 1981.
- Ogata K., Engenharia de Controle Moderno, 5ª. Edição, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010.
- Pertence Jr., Antonio. Amplificadores operacionais e filtros ativos: teoria, projetos, aplicações e laboratório. São Paulo: McGraw Hill, 1988.
- Unicamp. Circuitos Elétricos I. Disponível em <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~www/ea513/node327.html>> acesso em: 20/05/20a.
- Unicamp. Circuitos Elétricos I. Disponível em <<http://www.dt.fee.unicamp.br/~www/ea513/node328.html>> acesso em: 20/05/20b.