

MPC robusto para sistemas lineares com saltos Markovianos: restrições em segundo momento

Rosileide de Oliveira Lopes* Eduardo M. A. M. Mendes**
Leonardo A. B. Torres** Alessandro N. Vargas***
Reinaldo M. Palhares**

* *Instituto de Ciências Puras e Aplicadas, Universidade Federal de Itajubá, MG. (e-mail: rosileidelopes@unifei.edu.br).*

** *Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais, MG. (e-mail: rpalhares@ufmg.br)*

*** *Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, PR.*

Abstract: This article presents a new finite-horizon robust model predictive control applied to linear systems with Markovian jumps. Both additive noise and polytopic uncertainties are considered in the system model. Also, constraints are imposed on states and control inputs in terms of the second moment. The new approach is based on Linear Matrix Inequalities (LMIs) and the control action depends on the Markovian mode. The effectiveness of the proposed method is illustrated by a numerical example.

Resumo: Este artigo apresenta uma nova estratégia de controle preditivo robusto baseado em modelo de horizonte finito aplicado a sistemas lineares com saltos Markovianos. Considera-se ruído aditivo e incertezas nas matrizes do sistema bem como restrições são impostas aos estados e entradas de controle em termos do segundo momento. Como principal contribuição, obtém-se um novo conjunto de desigualdades matriciais lineares (LMIs) considerando ações de controle dependentes do modo de Markov. A efetividade do método proposto é ilustrada por meio de um exemplo numérico.

Keywords: Controle preditivo baseado em modelo; robustez; sistemas lineares com saltos Markovianos; ruído aditivo; restrições de segundo momento.

Palavras-chaves: Model predictive control; robustness; Markov jump linear systems; additive noise; second-moment constraints.

1. INTRODUÇÃO

É crescente o interesse da comunidade de Engenharia em se estudar classes de sistemas dinâmicos estocásticos que possam modelar de forma adequada fenômenos físicos e processos sujeitos a mudanças abruptas. Particularmente, a classe de sistemas lineares com saltos Markovianos MJLS (do inglês, *Markov Jump linear systems*) é uma representação adequada para isto (Costa et al. (2006)). Há vários anos vem sendo propostas diferentes estratégias descritas a partir de MJLS para tratar estabilidade, projeto de controle e filtragem (veja, por exemplo, Lopes et al. (2019), Vargas et al. (2013) Costa and Tuesta (2003) e Costa et al. (1999)). Para o leitor interessado em um contexto geral, pode-se consultar um *survey* recente a respeito de MJLS e suas aplicações apresentado em Shi and Li (2015).

Ao se estudar sistemas de controle é razoável levar em conta restrições inerentes ao longo do projeto. Há diferentes estratégias para tanto na literatura, sendo que uma delas, com apelo industrial reconhecido, é o controle preditivo baseado em modelo MPC (do inglês, *Model Predictive*

Control), também conhecido como RHC (do inglês, *Receding Horizon Control*). Em termos simples, o MPC usa o modelo da planta no projeto de controle buscando otimizar o comportamento previsto do sistema mesmo na presença de restrições (Morari and Lee, 1999; Kouvaritakis and Cannon, 2016). Por outro lado, é razoável considerar que o modelo da planta carregue em si um grau de incerteza na modelagem devido a diferentes fatores. Nestes casos, técnicas de MPC robusto são bastante apropriadas (vide Kouvaritakis and Cannon (2016); Kothare et al. (1996)).

No tocante a MJLS, há também um crescente interesse em tratar o contexto de incertezas paramétricas associadas aos modos de Markov (um MJLS com essas características é denominado, no escopo deste artigo, MJLS com parâmetros variantes). Por exemplo, em (Kim, 2017) apresenta-se uma estratégia de estabilização, enquanto em (Gagliardi et al., 2012) foca-se em um projeto de filtragem para sistemas tolerantes a falhas. Em (Lopes et al., 2020) discute-se uma nova abordagem para o controle de horizonte finito, enquanto em (Lopes et al., 2019), aborda-se uma estratégia MPC de horizonte infinito. Todos no contexto de incertezas em MJLS.

* Esse trabalho foi parcialmente financiado por CNPq e FAPEMIG.

A principal contribuição deste trabalho é a obtenção de condições baseadas em LMIs para o projeto MPC robusto de horizonte finito a tempo discreto, aplicado a MJLS com variação de parâmetros, sobre ações de controle dependentes do modo e presença de ruído aditivo. Ademais, restrições de segundo momento nas entradas de controle e nos estados do sistema são levadas em consideração. Este estudo é inspirado em um problema de controle apresentado em (Lopes et al., 2020) e o resultado principal e inovador, mostrado neste artigo, tem esta referência como ponto de partida.

2. NOTAÇÃO E FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere \mathbb{R}^n o espaço Euclidiano de dimensão n , $\mathbb{R}^{n \times m}$ representa o espaço linear normado de todas as matrizes reais $n \times m$. O subespaço linear normado de matrizes simétricas de $\mathbb{R}^{n \times n}$ é denotado por $\mathcal{S}^n = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} : U = U'\}$, em que U' denota a transposta da matriz U . $\mathcal{S}^n(\mathcal{S}^{n+})$ denota o cone convexo fechado (aberto) de matrizes semidefinidas (definidas) positivas $\{U \in \mathcal{S}^n : U \geq 0 (> 0)\}$. Seja $\Theta = \{1, \dots, n_\theta\}$ um conjunto finito e \mathcal{S}^{n+} o conjunto formado por um número de n_θ matrizes tais que $\mathcal{S}^{n+} = \{U = (U_1, \dots, U_{n_\theta}) : U_i \in \mathcal{S}^{n+}, i \in \Theta\}$. Para uma matriz A , A^{-1} é a sua inversa. $\lambda_{\min}\{A\}$ é o autovalor mínimo de uma matriz A . $x(k+n)$, $u(k+n)$ são o valor predito do vetor de estados x e de entrada u em um tempo futuro $k+n$, respectivamente, baseado na informação disponível no instante de tempo k . $\mathbb{E}_k[v]$ representa o valor esperado da variável aleatória v no instante k . \mathcal{I} representa a matriz identidade.

Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_k\}, \mathbb{P})$, com condições usuais de filtragem $\{\mathcal{F}_k, k \geq 0\}$ (Costa et al., 2006, Seção 2.3) que regula a evolução do sistema linear de saltos Markovianos e variação de parâmetros dado pela equação:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \mathbf{A}_{\xi(k)}(\theta(k))x(k) + \mathbf{B}_{\xi(k)}(\theta(k))u(k) \\ &\quad + \mathbf{H}(\theta(k))w(k), \\ k \geq 0, x(0) &= x_0, \theta(0) \sim \mu_0, \end{aligned} \quad (1)$$

na qual, $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $w(k) \in \mathbb{R}^{n_w}$ denotam os estados do sistema, as entradas de controle e o ruído de distúrbio aditivo, respectivamente. O processo $\{\theta(k); k \geq 0\}$ representa uma cadeia de Markov a tempo discreto, tomando valores no conjunto $\Theta = \{1, \dots, n_\theta\}$ com matriz de probabilidade de transição $\mathbb{P} = [p(i, j)]_{i, j \in \Theta}$ em que $p(i, j) := \Pr[\theta(k+1) = j | \theta(k) = i]$, sendo μ_0 a distribuição de probabilidade para a variável aleatória $\theta(0)$. O processo de ruído de distúrbio aditivo $\{w(k), k \geq 0\}$ tem média zero e matriz de covariância $\Sigma := \mathbb{E}[w(k)w(k)']$ para todo $k \geq 0$. Além disso, $\{w(k), k \geq 0\}$ é independente de $\{\theta(k), k \geq 0\}$. O estado da cadeia de Markov em um certo instante de tempo $k+1, k \geq 0$, condicionado ao instante de tempo k , isto é, $\theta(k+1|k)$ é determinado de acordo com uma distribuição de probabilidade $\mu_{k+1|k}$, sendo $\mu_{k+1|k} \equiv \Pr(\theta(k+1) = i | \mathcal{F}_k), i \in \Theta$. A distribuição do estado inicial da cadeia é dada pelo vetor de dimensão n_θ definido como: $\mu_{k+1|k} = (\mathbb{P}')^{k+1} \mu_{k|k} = [\mu_{k+1|k}(1), \dots, \mu_{k+1|k}(i), \dots, \mu_{k+1|k}(n_\theta)]'$. E, denota-se $\mu_{k|k}$ apenas por μ_k .

Suponha que para cada $\theta(k) = i, i \in \Theta$, as matrizes $\mathbf{A}_{\xi(k)}(i)$ e $\mathbf{B}_{\xi(k)}(i)$ são dependentes de maneira afim dos parâmetros variantes no tempo $\xi(k) \in \Xi^{n_\xi}$, com

$$\Xi^{n_\xi} = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}; \xi_\ell \geq 0, \sum_{\ell=1}^{n_\xi} \xi_\ell = 1, \ell = 1, 2, \dots, n_\xi \right\}, \quad (2)$$

tais que:

$$\mathbf{A}_{\xi(k)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\xi} \xi_\ell(k) \mathbf{A}_\ell(i) \text{ e } \mathbf{B}_{\xi(k)}(i) = \sum_{\ell=1}^{n_\xi} \xi_\ell(k) \mathbf{B}_\ell(i). \quad (3)$$

$\mathbf{H}(i) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}, i \in \Theta$, são matrizes dadas.

Considere como critério de desempenho, o custo linear quadrático de horizonte finito N associado ao sistema (1), para qualquer lei de controle admissível $u = (u(k), u(k+1), \dots, u(k+N-1))$, como:

$$\begin{aligned} J_N^k(u) &= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} \left[x'(k+n) \mathcal{Q}(\theta(k+n)) x(k+n) \right. \\ &\quad \left. + u'(k+n) \mathcal{R}(\theta(k+n)) u(k+n) \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[x'(N) \tilde{\mathcal{Q}}(\theta(N)) x(N) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

em que $N < \infty$ representa um horizonte de predição de N estágios; as matrizes de ponderações são $\tilde{\mathcal{Q}}(\theta(N)) \in \mathcal{S}^{n_x}$, $\mathcal{Q}(\theta(k+n)) \in \mathcal{S}^{n_x+}$ e $\mathcal{R}(\theta(k+n)) \in \mathcal{S}^{n_u+}$, com $n = 0, \dots, N-1$. O princípio de horizonte retrocedente será aplicado, ou seja, o custo (4) sujeito às restrições de segundo momento dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_k, \mu_{k|k}} [x(k+n)x(k+n)'] &\leq \mathcal{X}_{\max}, n = 0, \dots, N, \\ \mathbb{E}_{x_k, \mu_{k|k}} [u(k+n)u(k+n)'] &\leq U_{\max}, n = 0, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5)$$

nas quais $\mathbb{E}_{x_k, \mu_{k|k}}[\cdot] := \mathbb{E}[\cdot | x(k) = x_k, \theta(k) \sim \mu_{k|k}]$, deve ser minimizado em cada instante de tempo $k \geq 0$.

Problema 1. *O problema de controle ótimo de horizonte finito é indicado como:*

$$\begin{aligned} \min_{u(k+n), n=0, \dots, N-1} & J_N^k(u), \\ \text{sujeito a:} & (1)-(5). \end{aligned}$$

Para buscar uma solução para o Problema 1, utiliza-se a estratégia de horizonte retrocedente, combinada com uma lei de controle dependente do tempo e do modo, escrita como realimentação linear de estados na forma:

$$u(k+n) = F_{k+n}(\theta(k+n))x(k+n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (6)$$

Isto é, para cada instante de tempo $k \geq 0$, aplicando-se a lei de controle (6), uma sequência $\{F_{k+n}(\theta(k+n))\}, n = 0, \dots, N-1$ é obtida e, uma solução subótima para o Problema 1 é encontrada. Apenas a primeira entrada $u(k) = F_k(\theta(k))x(k)$ é implementada. A otimização é então repetida no próximo instante de tempo $k+1$, desta vez baseando-se no novo estado $x(k+1)$.

Observação 1. *A novidade neste artigo é desenvolver condições por meio de LMIs para se obter uma cota superior para a função custo, ou seja, uma sequência de controle $\hat{u} = \{\hat{u}_k, \hat{u}_{k+1}, \dots, \hat{u}_{k+N-1}\}$ tal que $\min_u J_N^k(u) \leq J_N^k(\hat{u})$, supondo que os modos de Markov estão disponíveis para o controlador.*

Para facilitar a notação, em tudo que segue, supõe-se que o estágio inicial coincide com a origem, ou seja, $k = 0$. Além

disso, define-se o operador $\mathcal{E}(M) = (\mathcal{E}_1(M), \dots, \mathcal{E}_{n_\theta}(M))$ como feito em (Costa et al., 1999):

$$\mathcal{E}_i(M) := \sum_{j=1}^{n_\theta} p(i, j)M(j), \quad \forall M \in \mathcal{S}^{n^+}. \quad (7)$$

3. RESULTADOS PRELIMINARES

O próximo Lema mostra como calcular uma cota superior (custo garantido) para o custo linear quadrático apresentado no Problema 1, no caso sem restrições.

Lema 1. *Seja $p(i, j) > 0$ para todo $i, j \in \Theta$. Se existirem matrizes $S_n(i)$, $\mathcal{O}_{n+1}(i) \in \mathcal{S}^{n^+}$ e matrizes $G_n(i)$, $Y_n(i)$, $W_h(i)$, $Z_h(i)$, escalares $\alpha_n(i)$; para $n = 0, \dots, N-1$; $\ell, h = 1, \dots, n_\xi$ e $i \in \Theta$; e existir um escalar $\gamma_0 \geq 0$, tais que as LMIs abaixo sejam factíveis:*

$$\begin{bmatrix} G'_n(i) + G_n(i) - S_n(i) & * & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_n(i) & \hat{S}_{\ell h}^n(1) & \dots & * & * & * & * \\ A_\ell(i)G_n(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_\ell(i)G_n(i) & -R_{\ell h}(i) & \dots & \hat{S}_{\ell h}^n(n_\theta) & * & * & * \\ \mathcal{Q}^{\frac{1}{2}}(i)G_n(i) & 0 & \dots & 0 & \mathcal{I} & * & * \\ \mathcal{R}^{\frac{1}{2}}(i)Y_n(i) & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathcal{I} & * \\ -Y_n(i) & \hat{Z}_{\ell h}(i) & \dots & \hat{Z}_{\ell h}(i) & 0 & 0 & Z_h'(i) + Z_h(i) \end{bmatrix} > 0 \quad (8)$$

sendo que,

$$\begin{aligned} S_N(i) &= \tilde{\mathcal{Q}}^{-1}(i) \\ \hat{S}_{\ell h}^n(j) &= \frac{1}{p(i, j)} S_{n+1}(j) - R_{\ell h}(i), \quad k = 1, \dots, n_\theta, \\ R_{\ell h}(i) &= B_\ell(i)W_h(i) + W_h'(i)B_\ell'(i), \\ \hat{Z}_{\ell h}(i) &= Z_h'(i)B_\ell'(i) - W_h(i); \end{aligned}$$

$$\alpha_n(i) - \mathcal{E}_i(\alpha_{n+1}) - \text{Tr}\{\mathcal{O}_{n+1}(i)\} > 0; \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (9)$$

em que $\alpha_N(i) = 0$; $i \in \Theta$;

$$\begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n+1}(i) & * & \dots & * \\ p(i, 1)^{\frac{1}{2}} H'(i) \Sigma^{\frac{1}{2}} & S_{n+1}(1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ p(i, n_\theta)^{\frac{1}{2}} H'(i) \Sigma^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & S_{n+1}(n_\theta) \end{bmatrix} > 0; \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_0 - \alpha_0(\theta_0) & * \\ x_0 & S_0(\theta_0) \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

para $\theta_0 \in \Theta$ e $x_0 \in \mathbb{R}^{n^*}$ dados.

Então para

$$\gamma^* = \inf \gamma_0, \quad (12)$$

tem-se que

$$\min_{u(n), n=0, \dots, N-1} J_N^k(u) < \gamma^*, \quad (13)$$

sendo $F_n(i) = Y_n(i)G_n^{-1}(i)$, $\forall i \in \Theta$.

Demonstração: Veja Lopes et al. (2020).

3.1 Restrições de segundo momento

A seguir, as restrições de segundo momento descritas em (5), para $k = 0$ serão consideradas:

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n)x(n)'] \leq \mathcal{X}_{\max}, \quad n = 0, \dots, N, \quad (14)$$

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[u(n)u(n)'] \leq U_{\max}, \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (15)$$

Seja $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ a função indicadora do conjunto \mathcal{D} para $\theta(n)^1$. Defina a matriz:

$$\mathcal{X}_n(i) := \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n)x(n)'\mathbf{1}_{\theta(n)=i}], \quad \forall i \in \Theta. \quad (16)$$

Proposição 1. *Tem-se que*

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+1}(i) &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \left\{ p(j, i) ((A_{\xi(n)}(j) + B_{\xi(n)}(j)F_n(j))\mathcal{X}_n(j) \right. \\ &\quad \times (A_{\xi(n)}(j) + B_{\xi(n)}(j)F_n(j))' \\ &\quad \left. + \mu_n(j)H(j)\Sigma H(j)' \right\} \end{aligned}$$

em que $\mu_n(j) = \mu_{0+n|0}(j)$ e $\mathcal{X}_0(i) = \mu_0(i)x(0)x(0)'$.

Demonstração: Por definição,

$$\mathcal{X}_{n+1}(i) = \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n+1)x(n+1)'\mathbf{1}_{\{\theta(n+1)=i\}}], \quad \forall i \in \Theta.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+1}(i) &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n+1)x(n+1)'\mathbf{1}_{\{\theta(n+1)=i|\theta(n)=j\}}] \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[(A_{\xi(n)}(\theta(n))x(n) + B_{\xi(n)}(\theta(n))u(n) \\ &\quad + H(\theta(n))w(n)) \times (A_{\xi(n)}(\theta(n))x(n) \\ &\quad + B_{\xi(n)}(\theta(n))u(n) \\ &\quad + H(\theta(n))w(n))' \mathbf{1}_{\{\theta(n+1)=i|\theta(n)=j\}}] \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[(A_{\xi(n)}(j)x(n) + B_{\xi(n)}(j)u(n) \\ &\quad + H(j)w(n))(A_{\xi(n)}(j)x(n) \\ &\quad + B_{\xi(n)}(j)u(n) + H(j)w(n))' \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}}] p(j, i). \end{aligned}$$

Substituindo $u(n) = F_n(i)x(n)$ e valendo-se da independência entre $w(k)$ e $\theta(k)$, tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n+1}(i) &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[(A_{\xi(n)}(j)x(n) + B_{\xi(n)}(j)F_n(i)x(n) \\ &\quad + H(j)w(n)) \times (A_{\xi(n)}(j)x(n) + B_{\xi(n)}(j) \\ &\quad \times F_n(i)x(n) + H(j)w(n))' \mathbf{1}_{\{\theta(n)=j\}}] p(j, i) \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} p(j, i) (A_{\xi(n)}(j) + B_{\xi(n)}(j)F_n(i))\mathcal{X}_n(i) \\ &\quad \times (A_{\xi(n)}(j) + B_{\xi(n)}(j)F_n(i))' \\ &\quad + H(j)\Sigma H(j)'\mu_n(j). \end{aligned}$$

Lema 2. *A restrição no estado em (14) é equivalente a:*

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i) \leq \mathcal{X}_{\max}, \quad \forall n = 0, \dots, N. \quad (17)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n)x(n)'] &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathbb{E}_{x_0, \mu_0}[x(n)x(n)'\mathbf{1}_{\{\theta(n)=i\}}] \\ &= \sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i). \end{aligned}$$

Logo, se $\sum_{i=1}^{n_\theta} \mathcal{X}_n(i) \leq \mathcal{X}_{\max}$, $\forall n = 0, \dots, N$ então

¹ $\mathbf{1}_{\mathcal{D}} = 1$, se $\theta(n) \in \mathcal{D}$; e $\mathbf{1}_{\mathcal{D}} = 0$, se $\theta(n) \notin \mathcal{D}$.

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(n)x(n)'] \leq \mathcal{X}_{max}, n = 0, \dots, N.$$

4. RESULTADO PRINCIPAL

O próximo Teorema estende o Lema 1 ao se obter uma cota superior para o custo linear quadrático apresentado no Problema 1, sujeito às restrições de segundo momento (14) e (15).

Teorema 3. *Considere o MJLS (1)-(3), sujeito às restrições (5). Se as condições do Lema 1 forem satisfeitas e, se além disso, existirem matrizes $U_n(i)$, $\zeta_n(i)$ e $X_{n+1}(i)$, $i \in \Theta$, $n = 1, \dots, N-1$ tais que:*

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} X_n(i) \leq \mathcal{X}_{max}; X_0(i) = \mu_0(i)x_0x_0', \forall n = 0 \dots, N, \quad (18)$$

$$X_{n+1}(i) - \sum_{j=1}^{n_\theta} p(j, i) [\zeta_n(j) + \mu_n(j)\mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)'] > 0, \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} \zeta_n(i) & \mathbf{A}_{\xi(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)Y_n(i) \\ * & G_n(i) + G_n(i)' - X_n(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} U_n(i) \leq U_{max}, \quad (21)$$

e

$$\begin{bmatrix} U_n(i) & Y_n(i) \\ * & G_n(i) + G_n(i)' - X_n(i) \end{bmatrix} > 0, \quad (22)$$

então as restrições de segundo momento (14) e (15) estarão garantidas.

Demonstração: Suponha que (20) é satisfeita, então

$$G_n'(i)X_n^{-1}(i)G_n(i) \geq G_n'(i) + G_n(i) - X_n(i) > 0.$$

Logo, a desigualdade em (20) implica que

$$\begin{bmatrix} \zeta_n(j) & \mathbf{A}_{\xi(n)}(j)G_n(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)Y_n(j) \\ * & G_n'(j)X_n^{-1}(j)G_n(j) \end{bmatrix} > 0.$$

Aplicando o complemento de Schur, resulta em:

$$\zeta_n(i) > [\mathbf{A}_{\xi(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)Y_n(i)]G_n^{-1}(i)X_n(i)(G_n^{-1}(i))' \\ \times [\mathbf{A}_{\xi(n)}(i)G_n(i) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)Y_n(i)]'$$

substituindo $Y_n(i) = F_n(i)G_n(i)$, segue que

$$\zeta_n(i) > [\mathbf{A}_{\xi(n)}(i) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)F_n(i)]X_n(i)[\mathbf{A}_{\xi(n)}(i) \\ + \mathbf{B}_{\xi(n)}(i)F_n(i)]', \forall i \in \Theta.$$

Suponha também que (19) é factível para todo $n = 1, \dots, N-1$, então

$$\begin{aligned} X_{n+1}(i) &> \sum_{j=1}^{n_\theta} p(j, i) [\zeta_n(j) + \mu_n(j)\mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)'] \\ &> \sum_{j=1}^{n_\theta} \left\{ p(j, i) (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(j))X_n(j) \right. \\ &\quad \times (\mathbf{A}_{\xi(n)}(j) + \mathbf{B}_{\xi(n)}(j)F_n(j))' \\ &\quad \left. + \mu_n(j)\mathbf{H}(j)\Sigma\mathbf{H}(j)' \right\} = X_{n+1}(i). \end{aligned}$$

Portanto, de (18) e (19), é possível concluir que

$$\sum_{i=1}^{n_\theta} X_n(i) \leq \mathcal{X}_{max}; X_0(i) = \mu_0(i)x_0x_0', \forall n = 0, \dots, N.$$

Pelo exposto acima e de acordo com a Proposição 1, a restrição de segundo momento (14) é garantida.

Ademais, supondo (22) factível, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} U_n(j) & Y_n(j) \\ * & G_n(j)'X_n^{-1}(j)G_n(j) \end{bmatrix} > 0. \quad (23)$$

Aplicando o complemento de Schur, segue que:

$$U_n(j) > Y_n(j)G_n^{-1}(j)X_n(j)(G_n^{-1}(j))'Y_n(j)'.$$

Somando ambos os lados de $j = 1$ até $j = n_\theta$, tem-se

$$\sum_{j=1}^{n_\theta} U_n(j) > \sum_{j=1}^{n_\theta} Y_n(j)(G_n^{-1}(j))'X_n(j)G_n^{-1}(j).$$

Supondo que (21) é factível, é possível concluir que:

$$U_{max} > \sum_{j=1}^{n_\theta} Y_n(j)(G_n^{-1}(j))X_n(j)(G_n^{-1}(j))'(Y_n(j))'$$

substituindo $F_n(i) = Y_n(i)G_n^{-1}(i)$, tem-se que:

$$\begin{aligned} U_{max} &> \sum_{j=1}^{n_\theta} F_n(j)X_n(j)F_n'(j) \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} F_n(j)\mathbb{E}[x(n)x(n)'\mathbb{1}_{\{\theta(n)=j\}}]F_n'(j)' \\ &= \sum_{j=1}^{n_\theta} \mathbb{E}[u(n)u(n)'\mathbb{1}_{\{\theta(n)=j\}}] = \mathbb{E}[u(n)u(n)']. \end{aligned}$$

Portanto, a factibilidade das LMIs (21) e (22) garante a validade da restrição de segundo momento (15).

5. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere o sistema linear com saltos Markovianos e três modos de operação, sujeito a ruído aditivo adaptado de Lu et al. (2013) e Costa et al. (1999) da forma:

Para o modo $i = 1$, as matrizes do sistema são:

$$A_1(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.6 & 3.3 \end{bmatrix}, A_2(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.4 & 3.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1(1) = B_2(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H(1) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

Para o modo $i = 2$, as matrizes do sistema são:

$$A_1(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.4 & 4.6 \end{bmatrix}, A_2(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.2 & 4.6 \end{bmatrix},$$

$$B_1(2) = B_2(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H(2) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

E para o modo $i = 3$, as matrizes do sistema são:

$$A_1(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.4 & -5.3 \end{bmatrix}, A_2(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5.2 & -5.1 \end{bmatrix},$$

$$B_1(3) = B_2(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H(3) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}.$$

As matrizes de ponderação simétricas para os modos $i = 1, 2$ e 3 são dadas respectivamente por:

$$\mathcal{Q}(1) = \mathcal{Q}(2) = \mathcal{Q}(3) = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}(1) = \mathcal{Q}(1), \tilde{\mathcal{Q}}(2) = \mathcal{Q}(2), \tilde{\mathcal{Q}}(3) = \mathcal{Q}(3), \\ \mathcal{R}(1) = \mathcal{R}(2) = \mathcal{R}(3) = 0.01.$$

A matriz de probabilidades de transição e a matriz de covariância são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 0.55 & 0.23 & 0.22 \\ 0.36 & 0.35 & 0.29 \\ 0.32 & 0.16 & 0.52 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere o estado inicial $x_0 = [1 \ 1]'$ e o modo inicial $\theta_0 = 1$.

Para 1000 realizações da cadeia de Markov, o custo médio obtido para a abordagem proposta no Lema 1 é de aproximadamente 0.33.

Para os mesmos estado e modo iniciais, adiciona-se as restrições de segundo momento

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [x(k)x(k)'] \leq \begin{bmatrix} 2.002 & 0 \\ 0 & 2.002 \end{bmatrix}, \quad k = 0, \dots, N,$$

$$\mathbb{E}_{x_0, \mu_0} [u(k)u(k)'] \leq 26.25, \quad k = 0, \dots, N - 1,$$

aos estados e às entradas de controle.

Novamente para 1000 realizações da cadeia de Markov, a abordagem proposta no Teorema 3 garante o custo médio 0.64.

As Figuras 1, 2, 3 e 4 ilustram, respectivamente, as trajetórias médias: i) dos estados sem restrições (via Lema 1); ii) da entrada de controle sem restrições (via Lema 1); iii) com restrição de segundo momento nos estados (via Teorema 3); iv) com restrição de segundo momento na entrada de controle (via Teorema 3).

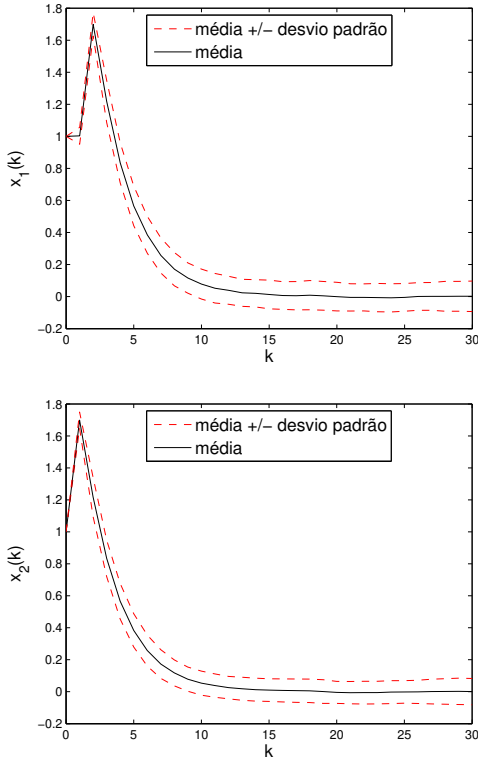


Figura 1. Estados $x_1(k)$ $x_2(k)$. A linha contínua indica a resposta média das trajetórias dos estados usando ações obtidas por meio de aplicações do Lema 1 e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão dos estados.

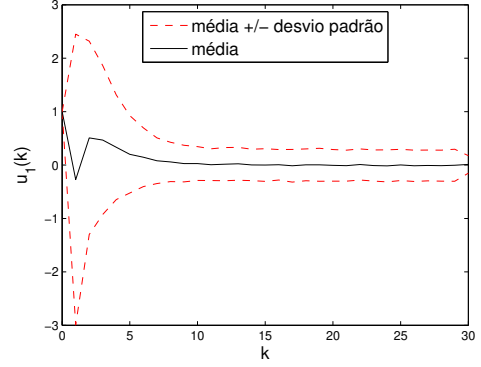


Figura 2. A linha sólida indica a média das entradas de controle obtidas usando o Lema 1 e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão das entradas de controle.

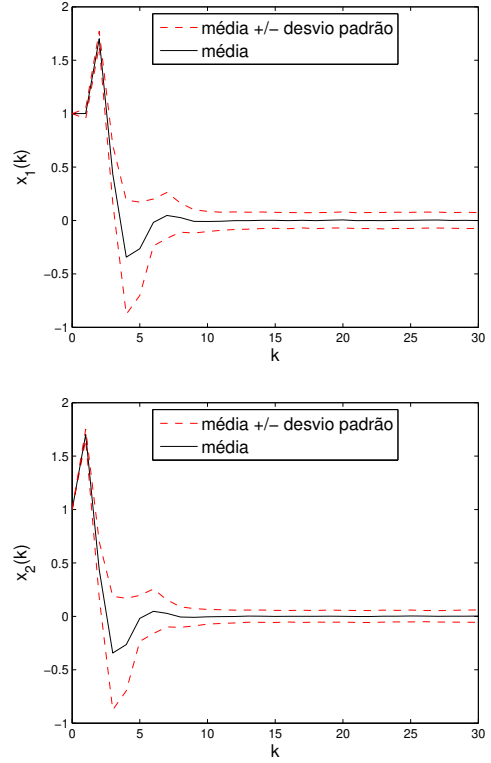


Figura 3. Estados $x_1(k)$ e $x_2(k)$. As linhas contínuas indicam as médias das trajetórias dos estados controlados usando ações obtidas por meio de aplicação do Teorema 3 e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão dos estados.

Para analisar as restrições de segundo momento, baseando-se nas LMIs (18) e (21), define-se:

$$\Delta(k) = \mathcal{X}_{max} - \sum_{i=1}^{n_\theta} X_k(i), \quad \forall k = 0, \dots, N, \quad (24)$$

$$\delta(k) = U_{max} - \sum_{i=1}^{n_\theta} U_k(i), \quad \forall k = 0, \dots, N - 1. \quad (25)$$

O gráfico dos menores autovalores de $\Delta(k)$, $\lambda_{\min}\{\Delta(k)\}$ está representado na Figura 5. E o gráfico de $\delta(k)$ está representado na Figura 6. Note que $\lambda_{\min}\{\Delta(k)\} = 0$,

6. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou uma nova estratégia de MPC robusto, de horizonte finito, para uma classe de sistemas lineares a tempo discreto com saltos Markovianos e ruído aditivo. Como contribuição, para a obtenção de uma cota superior para a função custo, são propostas condições LMIs sob ações de controle dependentes do modo de Markov, levando em conta incertezas nas matrizes do sistema descritas de forma politópica. Além disso, foram impostas restrições de segundo momento sobre a entrada de controle e os estados do sistema. A efetividade dos resultados obtidos foi ilustrada por meio de simulações numéricas.

REFERÊNCIAS

- Costa, O.L.V., Boukas, E.K., and Marques, R.P. (1999). Constrained quadratic control of discrete-time Markovian jump linear systems. *Automatica*, 35(4), 617–626.
- Costa, O.L.V., Fragoso, M.D., and Marques, R.P. (2006). *Discrete-time Markov jump linear systems*. Springer Science & Business Media.
- Costa, O.L.V. and Tuesta, E.F. (2003). Finite horizon quadratic optimal control and a separation principle for Markovian jump linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(10), 1836–1842.
- Gagliardi, G., Casavola, A., and Famularo, D. (2012). A fault detection and isolation filter design method for Markov jump linear parameter-varying systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 26(3), 241–257.
- Kim, S.H. (2017). H_2 control of Markovian jump LPV systems with measurement noises: Application to a DC-motor device with voltage fluctuations. *Journal of the Franklin Institute*, 354(4), 1784–1800.
- Kothare, M.V., Venkataramanan, V.B., and Morari, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10), 1361–1379.
- Kouvaritakis, B. and Cannon, M. (2016). *Model predictive control*. Springer.
- Lopes, R.O., Mendes, E.M.A.M., Torres, L.A.B., and Palhares, R.M. (2019). Constrained robust model predicted control of discrete-time Markov jump linear systems. *IET Control Theory & Applications*, 13, 517–525.
- Lopes, R.O., Mendes, E.M.A.M., Torres, L.A.B., Vargas, A.N., and Palhares, R.M. (2020). Finite-horizon suboptimal control of Markov jump linear parameter-varying systems. *International Journal of Control* DOI:10.1080/00207179.2020.1728387, 1–10.
- Lu, J., Li, D., and Xi, Y. (2013). Constrained model predictive control synthesis for uncertain discrete-time Markovian jump linear systems. *IET Control Theory & Applications*, 7(5), 707–719.
- Morari, M. and Lee, J.H. (1999). Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering*, 23(4-5), 667–682.
- Shi, P. and Li, F. (2015). A survey on Markovian jump systems: modeling and design. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 13(1), 1–16.
- Vargas, A.N., Furloni, W., and do Val, J.B. (2013). Second moment constraints and the control problem of Markov jump linear systems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 20(2), 357–368.

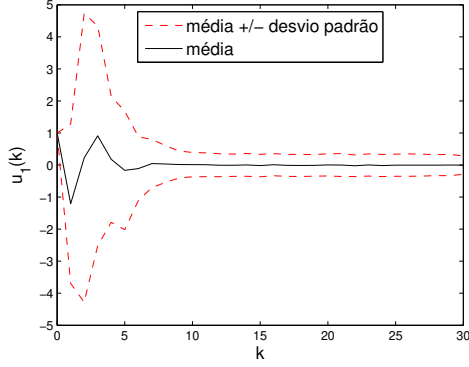


Figura 4. Entrada de controle: a linha sólida indica a média das entradas de controle obtidas por meio do Teorema 3 e as linhas tracejadas indicam o desvio padrão das entradas de controle.

em $k = 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e que $\delta(k) = 0$ em $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, isto é, a restrição em valor esperado dos estados e das entradas, respectivamente, estão ativas nestes conjuntos de instantes de tempo.

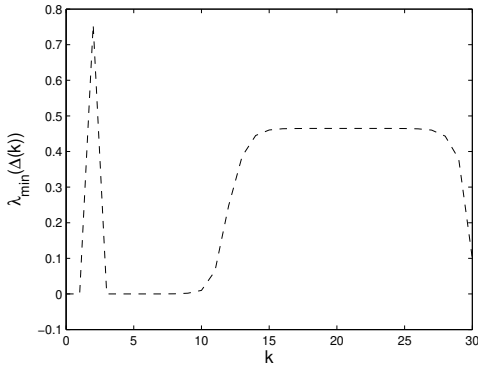


Figura 5. Menores autovalores de $\Delta(k)$.

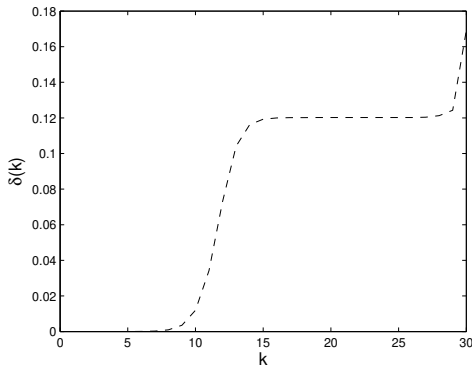


Figura 6. Valores obtidos para $\delta(k)$.

Portanto, caso sejam satisfeitas as condições no Teorema 3, garante-se também a existência de uma solução para o problema de controle MPC de horizonte finito do sistema (1)-(3), sujeito às restrições de segundo momento (5).