

Estimação de Estados de uma Câmara Termoeletricamente Controlada utilizando Projetos de Filtros \mathcal{H}_∞ *

Bárbara J. de Oliveira *, Víctor C. S. Campos **, Márcio F. Braga *

* *Departamento de Engenharia Elétrica, Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP (e-mail: barbara.julia@aluno.ufop.edu.br, mfbraga@ufop.edu.br).*

** *Departamento de Engenharia Eletrônica, Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG (e-mail: victor@cpdee.ufmg.br)*

Abstract: The aim of this paper is to present and compare two filter design strategies for state estimation applied in a Thermoelectrically Controlled Chamber (TCC). The TCC is composed of five digital temperature sensors, which represent the states of the system. The application of the methods is carried out in two stages. In the first stage, the filters are implemented off-line in MATLAB R2018a software, based on the actual system data. Whereas, in the second stage, the filters are applied in real time to the physical system. Two theorems are presented to find out the parameters of the robust filters based on Finsler's lemma and bounded real lemma, which make use of the \mathcal{H}_∞ norm as the performance criterion, since an uncertain polytopic model is used to describe the dynamics of the TCC. The optimal filtering problem for the system is solved using Linear Matrix Inequalities. The results obtained from the two methods are compared graphically and using the Mean Squared Error metric.

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar e comparar duas estratégias de filtros para estimação de estados aplicados em uma Câmara Termoeletricamente Controlada (CTC). A CTC é composta por cinco sensores digitais de temperatura que representam os estados do sistema. A aplicação dos métodos é executada em duas etapas. Na primeira etapa, os filtros são implementados de forma *off-line* no *software* MATLAB R2018a, a partir dos dados reais do sistema. Enquanto, na segunda etapa, os filtros são aplicados em tempo real no sistema físico. São apresentados dois teoremas para a obtenção dos parâmetros dos filtros robustos tendo como base o lema de Finsler e o *bounded real lemma*, utilizando a norma \mathcal{H}_∞ como critério de desempenho, uma vez que emprega-se um modelo politópico incerto para descrever a dinâmica da CTC. O problema de filtragem ótima para o sistema é resolvido por meio de Desigualdades Matriciais Lineares. Os resultados obtidos pelos dois métodos são comparados graficamente e por meio da métrica do Erro Quadrático Médio.

Keywords: State estimation, \mathcal{H}_∞ filter design, Polytopic system, Thermal system, Linear Matrix Inequalities.

Palavras-chaves: Estimação de estados, Projeto de filtros \mathcal{H}_∞ , Sistema politópico, Sistema térmico, Desigualdades Matriciais Lineares.

1. INTRODUÇÃO

Desde o trabalho de Kalman (Kalman, 1960), o problema de filtragem tem sido um importante tópico no campo da teoria de controle (Freitas et al., 2017). A filtragem em sistemas de controle tem como objetivo obter estimativas de grandezas que possuam ruídos que prejudicam a obtenção de alguns parâmetros do sistema (Lacerda, 2014). A estimação de estados é um procedimento matemático que consegue determinar a estimativa mais qualificada de um conjunto de variáveis de estados, para assim determinar

* Os autores agradecem as agências Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Universidade Federal de Ouro Preto (Número do Processo: 23109.004080/2019-88) pelo apoio financeiro.

a condição de operação de um sistema particular. Seu funcionamento é baseado em ferramentas de filtragem para eliminar e/ou compensar erros e possíveis faltas de dados e até mesmo estimar sinais que não estão disponíveis no processo (Frazão, 2010). Vários métodos foram elaborados a fim de solucionar o problema de estimação de estados, como o filtro de Kalman que é conhecido por ser um estimador ótimo para sistemas lineares com ruídos gaussianos (Aguirre, 2000).

Neste artigo são apresentadas e comparadas duas estratégias de filtros para a estimação de estados em uma Câmara Termoeletricamente Controlada (CTC). A aplicação dos métodos é executada em duas etapas. Na primeira etapa, a estimação dos estados é realizada por meio da implementação *off-line* dos filtros no *software* MATLAB

R2018a, utilizando os dados reais do sistema. Enquanto que, na segunda etapa, os filtros são aplicados em tempo real na planta termoelétrica. Para isso, são apresentados dois teoremas para a obtenção dos parâmetros dos filtros \mathcal{H}_∞ tendo como base o lema de Finsler (de Oliveira e Skelton, 2001) e o *bounded real lemma* (Scherer e Weiland, 2000).

O problema de filtragem ótima para o sistema politópico incerto da CTC é resolvido por meio de Desigualdades Matriciais Lineares (LMI, do inglês *Linear Matrix Inequalities*), usando uma função de Lyapunov quadrática. A estratégia de projeto é baseada na partição da matriz de Lyapunov e em transformações de congruência. Uma das principais vantagens em utilizar LMIs é que elas conseguem resolver problemas que envolvem muitas variáveis matriciais e uma variedade de especificações de projeto e restrições podem ser representadas. Com o surgimento de pacotes computacionais especializados, problemas de controle em termos de desigualdades matriciais lineares tornaram-se facilmente resolvíveis (Leite et al., 2004). Assim, uma vez formulado em termos de LMI, um problema pode ser resolvido por meio de eficientes algoritmos de otimização convexa (Gahinet et al., 1995). Para a resolução numérica das LMIs, são adotados os pacotes SeDuMi (Sturm, 1999) e YALMIP (Löfberg, 2004) para utilização com o *software MATLAB R2018a*.

Como critério de desempenho para os projetos de filtros é usada a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência do sinal de ruído para o erro de estimação. O problema de filtragem em norma \mathcal{H}_∞ consiste em projetar um filtro de forma que o valor máximo do ganho de energia entre a entrada do sistema e o erro de estimação seja minimizado (Zhou, 1995). A vantagem da escolha desse critério é ser capaz de abordar o caso em que o sistema é afetado por um sinal de ruído com características conhecidas ou no caso do sinal de ruído possuir características estatísticas desconhecidas (Lacerda, 2014).

A estrutura do trabalho é seccionada da seguinte forma: na Seção 2, descreve-se uma breve explicação sobre filtragem de sistema dinâmico; na Seção 3, apresentam-se os dois teoremas utilizados para os projetos de filtros; na Seção 4, o sistema termoelétrico é apresentado. Os resultados obtidos são analisados e comparados na Seção 5. Finalmente, a Seção 6 é destinada para as considerações finais.

2. FILTRAGEM DE SISTEMA DINÂMICOS

Considere o sistema linear incerto, discreto e invariante no tempo

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + B_1(\alpha)w_k \\ z_k &= C_1(\alpha)x_k + D_{11}(\alpha)w_k \\ y_k &= C_2(\alpha)x_k + D_{21}(\alpha)w_k \end{aligned} \quad (1)$$

sendo que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $w \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de sinal de ruídos (incluindo ruídos de medida e processo), $z \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas de referência, $y \in \mathbb{R}^q$ é o vetor das saídas medidas. Além disso, $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $C_1(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_{11}(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times r}$, $C_2(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D_{21}(\alpha) \in \mathbb{R}^{q \times r}$ são matrizes incertas pertencentes a um domínio politópico dado por uma combinação convexa de N vértices conhecidos, isto é, para toda matriz $M(\alpha)$ incerta em (1), tem-se que

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i M_i, \quad \alpha \in \Lambda, \quad (2)$$

e α é um parâmetro invariante no tempo pertencente ao simplex unitário

$$\Lambda \triangleq \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \zeta_i = 1, \zeta_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (3)$$

O problema relacionado à filtragem, considerado neste trabalho, consiste em determinar um filtro de ordem completa, linear e invariante no tempo descrito como

$$\begin{aligned} x_{f_{k+1}} &= A_f x_{f_k} + B_f y_k \\ z_{f_k} &= C_f x_{f_k} + D_f y_k \end{aligned} \quad (4)$$

com $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ em que $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$, $n_f = n$, é o vetor de estados estimados e $z_f \in \mathbb{R}^p$ é a saída estimada. Definindo o erro como $e = z - z_f$ e um vetor de estados aumentado $\tilde{x}' = [x' \ x_f']$, tem-se que

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x}_k + \tilde{B}(\alpha)w_k \\ e_k &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x}_k + \tilde{D}(\alpha)w_k \end{aligned} \quad (5)$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_f C_2(\alpha) & A_f \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}, \\ \tilde{B}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ B_f D_{21}(\alpha) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times r}, \\ \tilde{C}(\alpha) &= [C_1(\alpha) - D_f C_2(\alpha) \quad -C_f] \in \mathbb{R}^{p \times 2n}, \\ \tilde{D}(\alpha) &= [D_{11}(\alpha) - D_f D_{21}(\alpha)] \in \mathbb{R}^{p \times r}. \end{aligned}$$

O objetivo é determinar um filtro como em (4) tal que o sistema aumentado (5) seja assintoticamente estável e minimize alguma medida de desempenho. Neste caso, como critério de desempenho, é utilizada a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência de w para o erro e .

3. PROJETO DE FILTROS \mathcal{H}_∞

Frequentemente sistemas reais estão sujeitos à incertezas ocasionadas por erros dos sensores, mudanças de temperatura, qualidade dos instrumentos e outros fatores que causam incertezas nos parâmetros medidos. Com isso, o problema de filtragem se torna complexo quando incertezas afetam o sistema. Para descrever a dinâmica de sistemas incertos, são utilizados modelos matemáticos que, de forma simplificada, representam os fenômenos vistos. Neste trabalho, é utilizado o modelo de incertezas politópicas em que são definidas regiões nas quais os parâmetros que definem o modelo estejam contidos. Dessa forma, o problema de filtragem utilizando como critério de desempenho a norma \mathcal{H}_∞ é escrito em termos de LMIs robustas que são resolvidas por meio de relaxações LMIs baseadas em soluções polinomiais (Facanha, 2019). Neste caso, a abordagem usada é baseada na utilização de uma função de Lyapunov comum para todo o domínio de incertezas, assegurando a estabilidade quadrática da dinâmica do sistema associado à estimação do erro e aos limites para os valores da norma usados como critério de desempenho, ou seja, as condições asseguram um filtro com desempenho \mathcal{H}_∞ independentemente das incertezas que afetam os parâmetros medidos (Lacerda et al., 2011).

Como foi citado anteriormente, neste trabalho, são utilizados dois teoremas para encontrar os parâmetros dos filtros robustos \mathcal{H}_∞ a tempo discreto tendo como base o lema de Finsler e o *bounded real lemma*. As provas são omitidas, pois podem ser encontradas nas referências citadas.

O *bounded real lemma* aplicado ao sistema aumentado garante a estabilidade assintótica da matriz dinâmica $\hat{A}(\alpha)$ e um limitante γ para a norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência de w para e , se existir uma matriz simétrica definida positiva $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Adicionalmente, obtêm-se também as matrizes do filtro $A_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_f \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$.

Teorema 1. (Geromel et al., 2000) *Existem A_f, B_f, C_f, D_f tais que a dinâmica do erro é estável com norma \mathcal{H}_∞ menor do que $\gamma > 0$ se e somente se existirem matrizes simétricas definidas positivas $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $F \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$ tais que¹*

$$\begin{bmatrix} Z & Z & ZA(\alpha) & ZA(\alpha) \\ * & X & \begin{pmatrix} XA(\alpha) + G \\ +LC_2(\alpha) \end{pmatrix} & XA(\alpha) + LC_2(\alpha) \\ * & * & Z & Z \\ * & * & * & X \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ XB_1(\alpha) & 0 \\ XB_1(\alpha) + LD_{21}(\alpha) & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} C_1(\alpha)' - F' \\ -C_2(\alpha)'D_f' \end{pmatrix} \\ 0 & C_1(\alpha)' - C_2(\alpha)'D_f' \\ I_p & D_{11}(\alpha)' - D_f'D_{21}(\alpha)' \\ * & \gamma^2 I_r \end{bmatrix} > 0. \quad (6)$$

No caso em que as LMI em (6) sejam factíveis, para todo $\alpha \in \Lambda$, as matrizes do filtro são dadas por D_f e

$$\begin{aligned} A_f &= (U')^{-1}G(VZ)^{-1}, & B_f &= (U')^{-1}L, \\ C_f &= F(VZ)^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizes não singulares arbitrárias que verificam

$$XZ^{-1} + U'V = I., \quad (8)$$

e asseguram um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a γ . \square

O segundo teorema utilizado para encontrar os parâmetros do filtro é dado a seguir.

Teorema 2. (Lacerda et al., 2011) *Se existir uma matriz simétrica definida positiva $W \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ e matrizes $E \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $K \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}$, $F_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $K_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C_f \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_f \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\gamma > 0$ e os escalares λ_1, λ_2 tais que*

$$\begin{bmatrix} W_{11} + K_{11}A(\alpha) + A(\alpha)'K'_{11} + & W_{12} + A(\alpha)'K'_{21} + \\ \lambda_1(C_2(\alpha)'K'_2 + K_2C_2(\alpha)) & \lambda_2C_2(\alpha)'K'_2 + \lambda_1K_1 \\ * & W_{22} + \lambda_2(K_1 + K'_1) \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ * & * \\ -K_{11} + A(\alpha)'E'_{11} + & -\lambda_1K + A(\alpha)'E'_{21} + \\ C_2(\alpha)'K'_2 & C_2(\alpha)'K'_2 \\ -K_{21} + K'_1 & -\lambda_2K + K'_1 \\ -W_{11} - E_{11} - E'_{11} & -W_{12} - K - E'_{21} \\ * & -W_{22} - K - K' \\ * & * \\ * & * \\ K_{11}B_1(\alpha) + A(\alpha)'Q'_1 + & -C_2(\alpha)'D'_f + \\ K_2D_{21}(\alpha) & A(\alpha)'F'_1 + C'_1 \\ K_{21}B_1(\alpha) + \lambda_2K_2D_{21}(\alpha) & -C'_f \\ E_{11}B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) - Q'_1 & -F'_1 \\ E_{21}B_1(\alpha) + K_2D_{21}(\alpha) & 0 \\ Q_1B_1(\alpha) + B_1(\alpha)'Q'_1 + I_r & -D_{21}(\alpha)'D'_f + \\ * & B_1(\alpha)'F'_1 + D_{11}(\alpha)' \\ & \gamma^2 I_p \end{bmatrix} > 0 \quad (9)$$

para todo $\alpha \in \Lambda$, então as matrizes para o filtro robusto estável são dadas por

$$A_f = K^{-1}K_1, \quad B_f = K^{-1}K_2, \quad C_f \quad \text{e} \quad D_f \quad (10)$$

e asseguram um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a γ . \square

Observe que o Teorema 2 é dependente de variáveis escalares λ_1 e λ_2 que precisam ser encontradas. O papel das variáveis escalares nas condições LMI é fornecer graus extras de liberdade e, possivelmente, procurar melhores parâmetros de ajuste que poderiam melhorar ainda mais os resultados, reduzindo, por exemplo, o conservadorismo.

4. CÂMARA TERMOELETRICAMENTE CONTROLADA

Para a aplicação dos dois teoremas apresentados anteriormente foi utilizada uma Câmara Termoeletricamente Controlada (CTC), apresentada na Figura 1. A planta foi desenvolvida no Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas da Universidade Federal de Ouro Preto (ICEA/UFOP), cuja descrição detalhada e modelagem podem ser encontradas em Pereira et al. (2018).

A câmara tem 0,40 m de comprimento, 0,30 m de largura e 0,30 m de altura e o seu sistema de refrigeração foi baseado em módulos Peltier. A faixa de temperatura de operação no seu interior pode variar de 16°C a 40°C. Dois orifícios quadrados de 0,01 m² foram abertos para acomodar duas estruturas, cada uma contendo um módulo Peltier TEC 12706, dois dissipadores de calor e duas ventoinhas. Para aumentar a área superficial do módulo Peltier e, assim facilitar a transferência de calor, cada módulo foi colocado entre dois dissipadores de calor. A câmara conta com um sistema microprocessado composto pelo Arduino Nano, que utiliza o microcontrolador Atmel Atmega 128.

A dinâmica do sistema foi descrita por um modelo poli-tópico discreto representada por cinco temperaturas diferentes (estados do sistema): duas nos dissipadores de calor externos, duas nos dissipadores de calor internos e uma no

¹ O símbolo * representa um bloco simétrico nas LMIs.

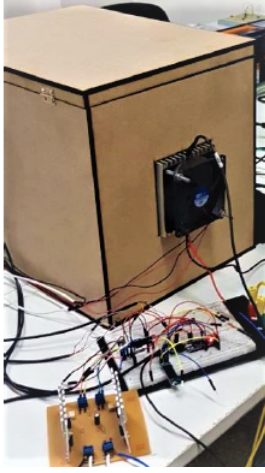


Figura 1. Câmara Termoelectricamente Controlada.

meio da câmara. Para isso, foram utilizados cinco sensores digitais de temperatura do tipo DS18B20. O modelo da planta é descrito por um sistema politópico discreto dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(\alpha)x_k + B(\alpha)u_k \\ y_k &= C(\alpha)x_k \end{aligned} \quad (11)$$

composto por 13 vértices (Pereira et al., 2018). Como entrada do sistema foi aplicado um ruído branco gaussiano de média 0 e variância 1.

Para a aplicação dos projetos de filtro \mathcal{H}_∞ na câmara, as matrizes $B_1(\alpha)$ e $C_2(\alpha)$ do sistema (1) são as matrizes $B(\alpha)$ e $C(\alpha)$ da planta (11), respectivamente. Como referência para o filtro na estimação de todos os cinco estados, foram escolhidos os estados x_1 e x_3 , ou seja, as matrizes $C_1(\alpha)$ e $C_2(\alpha)$ utilizadas são

$$C_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

5. RESULTADOS

Os testes das estratégias citadas neste artigo foram realizados em duas etapas. Na primeira etapa, a estimação dos estados foi realizada por meio da implementação dos filtros de forma *off-line* em um *software*, a partir dos dados reais do sistema. Enquanto que, na segunda etapa, os filtros foram aplicados diretamente no sistema físico. Todos os algoritmos implementados neste trabalho foram realizados no *software MATLAB R2018a* junto com os pacotes SeDuMi (Sturm, 1999) e YALMIP (Löfberg, 2004).

5.1 Projeto de Filtro \mathcal{H}_∞ aplicando o Teorema 1

Para o projeto de filtro \mathcal{H}_∞ aplicando o Teorema 1, a norma obtida para o sistema aumentado é 0,0268, e as matrizes do filtro são

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} 0,2220 & 0,0038 & -0,2675 & -0,5387 & -0,5182 \\ 1,0262 & 0,8715 & 0,7757 & 0,9313 & 0,8765 \\ 0,1223 & -0,0715 & -0,0743 & -0,4692 & -0,3560 \\ -1,0350 & -0,6960 & -1,0482 & -0,4535 & -0,6949 \\ 0,6021 & 0,6822 & 1,4571 & 1,4108 & 1,5801 \end{bmatrix}, \\ B_f &= 10^4 \begin{bmatrix} 0,9379 & -0,6519 \\ -1,7205 & 1,3586 \\ -0,4143 & -0,9990 \\ -0,1840 & -2,1450 \\ 0,6477 & 2,2747 \end{bmatrix}, \\ C_f &= 10^{-4} \begin{bmatrix} -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,5595 & -0,5278 & -0,1584 & -0,4827 & -0,3091 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1458 & -0,1205 & -0,3063 & -0,1785 & -0,2505 \\ -0,2479 & -0,2254 & -0,1883 & -0,2785 & -0,2487 \end{bmatrix}, \\ D_f &= \begin{bmatrix} 1,0000 & -0,0000 \\ -1,1466 & 0,4892 \\ -0,0000 & 1,0000 \\ 0,3291 & -0,1808 \\ -0,2617 & 0,5181 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Os resultados das estimações das temperaturas do sistema térmico com a utilização do filtro \mathcal{H}_∞ são apresentadas nas figuras 2 a 6, nas quais os estados medidos x_1 , x_2 , x_3 , x_4 e x_5 são representados pelas curvas em preto, os estados estimados pela implementação *off-line* no *software* \hat{x}_{s1} , \hat{x}_{s2} , \hat{x}_{s3} , \hat{x}_{s4} e \hat{x}_{s5} pelas curvas na cor azul e os estados estimados pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 , \hat{x}_4 e \hat{x}_5 pelas curvas vermelha.

Observa-se que a matriz C_f encontrada para tal filtro é da ordem de 10^{-4} . No caso da estimação dos estados pela implementação *off-line*, o *software* consegue trabalhar com valores extremamente pequeno, dessa forma foi possível estimar as temperaturas com um erro consideravelmente pequeno. Entretanto, no caso da aplicação do filtro diretamente na câmara, o seu sistema de processamento, composto por um Arduíno Nano, identifica a matriz C_f como uma matriz nula. Com isso, os valores estimados obtidos foram aproximadamente zero que ao ser somado com o ponto de equilíbrio da câmara ($T = 29^\circ\text{C}$), foi obtido um gráfico em torno de 29°C como pode ser visto nas figuras 2 a 6. Ou seja, não foi possível estimar as temperaturas pela aplicação direta do filtro no sistema real pelo fato dos valores da matriz C_f ser da ordem de 10^{-4} .

5.2 Projeto de Filtro \mathcal{H}_∞ aplicando Teorema 2

Analisando a desigualdade (9), observa-se que para a aplicação do Teorema 2 existem duas variáveis escalares λ_1 e λ_2 que podem fornecer graus extras de liberdade para procurar melhores resultados. Dessa forma, foi implementado um algoritmo por busca aleatória para testar vários valores de λ_1 e λ_2 a fim de encontrar melhores resultados. Nesse caso, a norma obtida para o sistema aumentado é de 0,0106, com $\lambda_1 = -0,9509$ e $\lambda_2 = -0,9107$, e as matrizes do filtro são

$$A_f = \begin{bmatrix} 0,1004 & -0,2081 & 0,4306 & 0,2887 & 0,3240 \\ 0,4805 & 0,3312 & -0,1911 & 0,1797 & 0,1764 \\ 0,3392 & 0,2294 & 0,2566 & -0,1873 & 0,3863 \\ -0,2561 & 0,2163 & -0,3153 & 0,7024 & -0,0136 \\ 0,2955 & 0,3711 & 0,3989 & 0,2812 & -0,2498 \end{bmatrix},$$

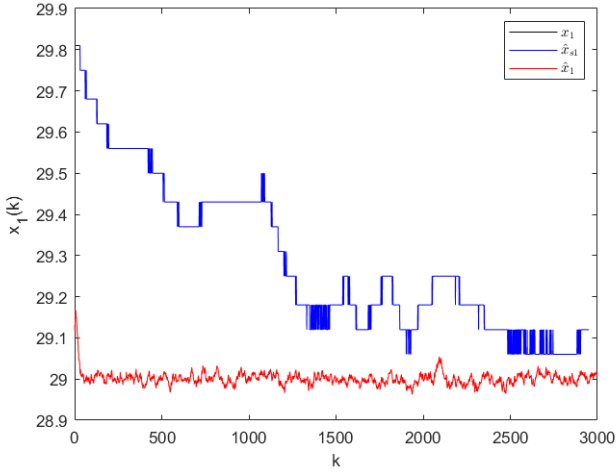


Figura 2. Estado medido x_1 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s1} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_1 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 1.

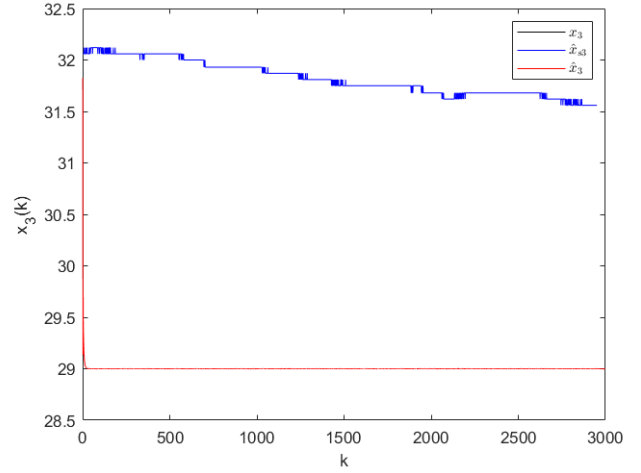


Figura 4. Estado medido x_3 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s3} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_3 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 1.

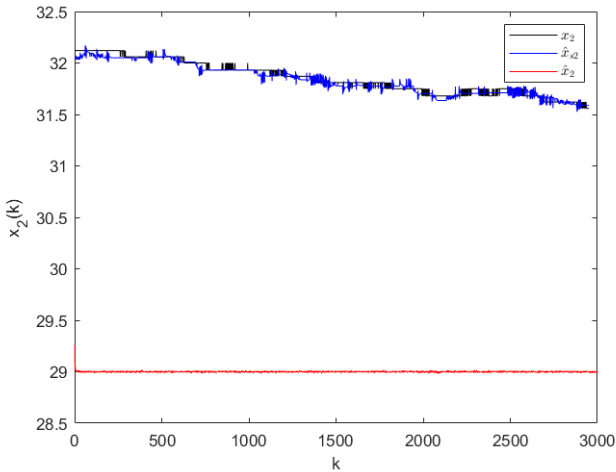


Figura 3. Estado medido x_2 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s2} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_2 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 1.

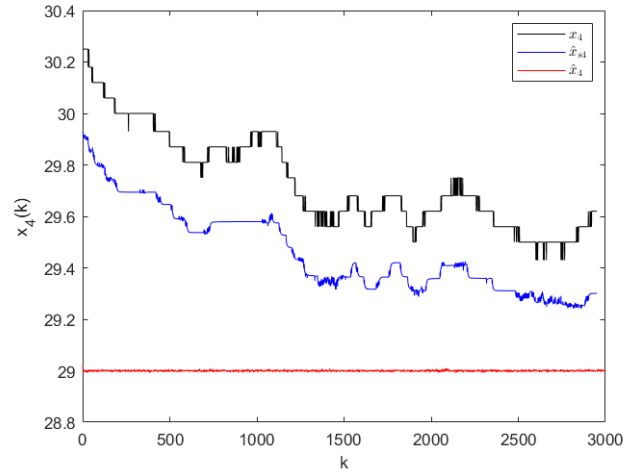


Figura 5. Estado medido x_4 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s4} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_4 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 1.

$$B_f = \begin{bmatrix} -0,3623 & 0,2914 \\ 0,4683 & -0,3727 \\ 0,1818 & -0,0904 \\ -0,2873 & -0,0765 \\ 0,1089 & -0,1945 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & -0,0000 \\ 0,0708 & -0,0659 & -0,2608 & -0,0306 & -0,0547 \\ -0,0000 & 0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,1768 & -0,1387 & -0,0899 & 0,0297 & 0,0462 \\ -0,1259 & -0,0475 & -0,1125 & 0,0208 & -0,1225 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 \\ -0,0578 & 0,8028 \\ -0,0000 & 1,0000 \\ 0,7174 & -0,0258 \\ 0,2237 & 0,7724 \end{bmatrix}.$$

Nas figuras 7 a 11, são apresentados os resultados obtidos, nas quais os estados medidos x_1 , x_2 , x_3 , x_4 e x_5 são

representadas pelas curvas em preto, os estados estimados pela implementação *off-line* no *software* \hat{x}_{s1} , \hat{x}_{s2} , \hat{x}_{s3} , \hat{x}_{s4} e \hat{x}_{s5} pelas curvas na cor azul e os estados estimados aplicando o filtro diretamente na câmara \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , \hat{x}_3 , \hat{x}_4 e \hat{x}_5 pelas curvas vermelhas.

É importante ressaltar que para o segundo filtro, as matrizes encontradas não são compostas por valores extremamente pequenos. Com isso, foi possível obter resultados satisfatórios para a estimação das temperaturas por meio da aplicação direta do filtro no sistema.

5.3 Comparação das técnicas de filtragem

Os resultados obtidos para a estimação de estados pelos dois filtros projetados foram analisados e comparados por meio dos Erros Quadráticos Médios (EQM), entre as temperaturas medidas com as temperatura estimadas. Na

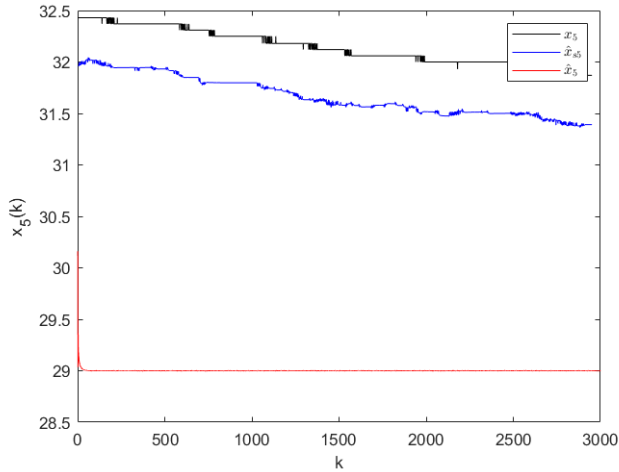


Figura 6. Estado medido x_5 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s5} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_5 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 1.

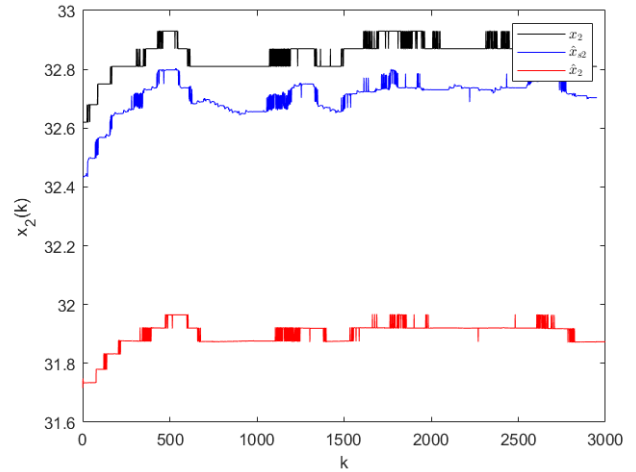


Figura 8. Estado medido x_2 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s2} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_2 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 2.

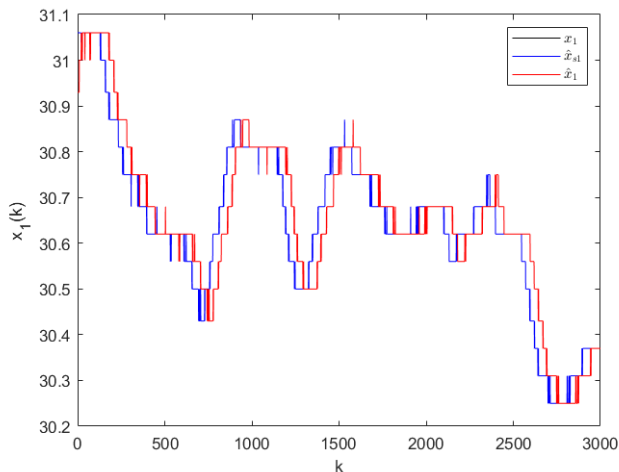


Figura 7. Estado medido x_1 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s1} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_1 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 2.

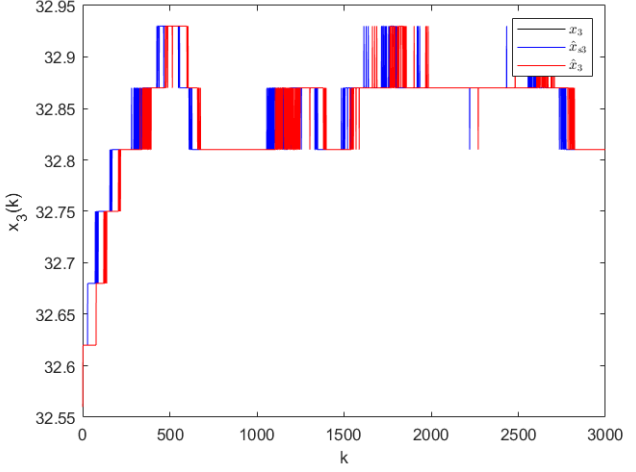


Figura 9. Estado medido x_3 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s3} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_3 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 2.

Tabela 1, são apresentados os EQMs para as temperaturas estimadas pela implementação dos filtros de forma *off-line* no *software*, a partir dos dados reais do sistema. Enquanto que, na Tabela 2, exibem-se os EQMs das temperaturas estimadas aplicando o filtro do teorema 2 diretamente no sistema térmico. Como foi explicado anteriormente, a estimação pelo projeto do filtro 1 aplicado no sistema não obteve sucesso.

Tabela 1. Erro quadrático médio (EQM) para a estimação das temperatura realizada pelos projetos dos filtros \mathcal{H}_∞ por simulação.

Filtro \mathcal{H}_∞	Erro Quadrático Médio				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Teorema 1	0,000	0,009	0,002	0,079	0,240
Teorema 2	0,000	0,017	0,002	0,135	0,056

Tabela 2. Erro quadrático médio (EQM) para a estimação realizada pelo filtro \mathcal{H}_∞ aplicado em tempo real no sistema térmico.

Filtro \mathcal{H}_∞	Erro Quadrático Médio				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Teorema 2	0,000	0,837	0,000	0,534	0,543

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi apresentada a estimação de estados pela implementação *off-line* no *software* e pela aplicação em tempo real de duas estratégias diferentes de projetos de filtros \mathcal{H}_∞ usando dados de um sistema real. Os filtros projetados foram aplicados em uma Câmara Termoeletricamente Controlada composta por cinco sensores digitais de temperatura, representando os estados do sistema. Por meio de uma análise dos resultados obtidos para o caso da

REFERÊNCIAS

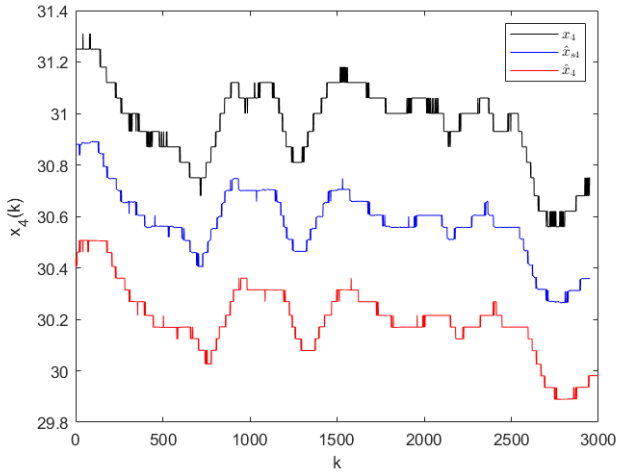


Figura 10. Estado medido x_4 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s4} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_4 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 2.

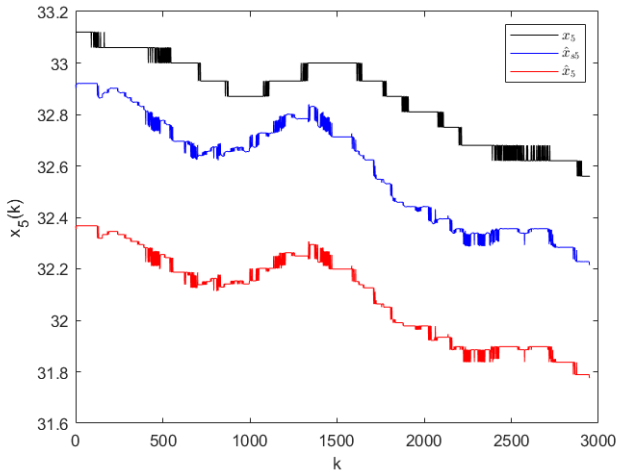


Figura 11. Estado medido x_5 (preto), estado estimado pela implementação *off-line* \hat{x}_{s5} (azul) e estado estimado pela aplicação em tempo real na câmara \hat{x}_5 (vermelho) para a filtragem utilizando o Teorema 2.

implementação dos filtros de forma *off-line* no *software*, ambos os métodos apresentaram bons resultados, considerando os erros quadráticos médios. Entretanto, para o caso da aplicação direta das estratégias na câmara, apenas o projeto do filtro pelo Teorema 2 obteve uma boa estimativa. O sistema não foi capaz de processar a filtragem pelo filtro do Teorema 1 pelo fato de sua matriz C_f apresentar valores na ordem de 10^{-4} .

Para possíveis trabalhos futuros, espera-se empregar outras técnicas de filtragem na planta termoelectricamente controlada a fim de obter novos resultados da estimação de estados com o objetivo de comparar e encontrar qual o melhor método para o caso em questão, ou seja, o menor erro de estimação para a aplicação real.

- Aguirre, L.A. (2000). *Introdução à identificação de sistemas*. Editora UFMG, Belo Horizonte.
- de Oliveira, M.C. e Skelton, R.E. (2001). Stability tests for constrained linear systems. In S.O. Reza Moheimani (ed.), *Perspectives in Robust Control*, volume 268 of *Lecture Notes in Control and Information Science*, 241–257. Springer-Verlag, New York, NY.
- Façanha, T. S., e Filho, J. T. C., e Barreto, G. A. (2019). *Uma nova metodologia para síntese de filtros \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞* . Editora Atena, Belo Horizonte.
- Frazão, R.J.A. (2010). Métodos alternativos para estimação de estado em sistemas de energia elétrica. Dissertação (Mestrado), UFMA (Universidade Federal do Maranhão), São Luís, MA, Brasil.
- Freitas, A.F.d.S., Viera, A., Alves, W., e Alves, R.P. (2017). Controle de Sistemas Lineares baseados em LMIs. *Jornada de Iniciação Científica e Extensão, Instituto Federal do Tocantins*.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A., e Chilali, M. (1995). LMI control toolbox user's guide. *The Mathworks, Natick, Massachusetts*.
- Geromel, J.C., Bernussou, J., Garcia, G., e Oliveira, M.C.D. (2000). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ robust filtering for discrete-time linear systems. *SIAM Journal on Control & Optimization*, 38(5), 1353.
- Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Dynamic Systems; Measurement and Control*, 82, 35–45.
- Lacerda, M.J., Oliveira, R.C., e Peres, P.L. (2011). Robust \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ filter design for uncertain linear systems via lmis and polynomial matrices. *Signal Processing*, 91(5), 1115 – 1122.
- Lacerda, M.J. (2014). *Contribuições ao problema de filtragem H -infinito para sistemas dinâmicos*. Ph.D. thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Leite, V.J., Montagner, V.F., Oliveira, P.J.d., Oliveira, R.C., Ramos, D.C., e Peres, P.L. (2004). Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 15(1), 24–40.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, 284–289. URL <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- Pereira, A.M.F., Vianna, L.M.S., Keles, N.A., e da Silva Campos, V.C. (2018). Tensor product model transformation simplification of takagi-sugeno control and estimation laws—an application to a thermoelectric controlled chamber. *Acta Polytechnica Hungarica*, 15(3).
- Scherer, C. e Weiland, S. (2000). Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3.
- Sturm, J.F. (1999). Using SeDuMi, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. 11(1-4), 625–653. URL <http://sedumi.ie.lehigh.edu>.
- Zhou, K., Doyle, J. C., e Glover, K. (1995). *Robust and Optimal Control*. Editora Prentice, New Jersey.