

FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY: COMPARAÇÃO NUMÉRICA ENTRE DUAS FORMULAÇÕES BASEADAS EM LMIS

FLÁVIO A. FARIA*, LEANDRO J. ELIAS†, VILMA A. OLIVEIRA‡

**Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Química de Araraquara*

†*Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de São Paulo
Campus de Araraquara*

‡*Universidade de São Paulo, Campus São Carlos*

Emails: flaviof15@iq.unesp.br, leandro.elias@ifsp.edu.br, vilma@sc.usp.br

Abstract— This work performs numerical comparisons between two approaches that use fuzzy Lyapunov functions to check the asymptotic stability of Takagi Sugeno fuzzy systems. Each methods use a distinct strategy to achieve stability conditions based on linear matrix inequalities. Numerical examples are used to illustrate the efficiency of the methods analyzed.

Keywords— Takagi Sugeno fuzzy systems, fuzzy Lyapunov functions, linear matrix inequalities.

Resumo— Este trabalho realiza comparações numéricas entre dois métodos que usam funções de Lyapunov fuzzy para verificar a estabilidade assintótica de sistemas fuzzy Takagi Sugeno. Os métodos usam estratégias distintas para gerar condições de estabilidade baseadas em desigualdades matriciais lineares. Exemplos numéricos são utilizados para ilustrar a eficiência dos métodos analisados.

Palavras-chave— Sistemas fuzzy Takagi Sugeno, funções de Lyapunov fuzzy, desigualdades matriciais lineares (LMIs).

1 Introdução

Os modelos fuzzy Takagi Sugeno (TS) representam uma importante ferramenta para a análise de estabilidade de sistemas não lineares (Takagi and Sugeno, 1985). Esses modelos consistem basicamente em representar um sistema não linear com uma média ponderada de sistemas lineares. As ponderações usadas na média são funções convexas não lineares chamadas de funções de pertinência. Dependendo da escolha dos modelos locais (sistemas lineares) e das funções de pertinência o modelo fuzzy pode fornecer uma representação aproximada ou exata do sistema não-linear em uma região compacta do espaço de estado (Tanaka and Wang, 2001).

Uma das vantagens de se usar modelos fuzzy TS é que sua estrutura permite que a análise de estabilidade, ou o projeto de controladores, seja formulado como um problema de otimização com restrições descritas por desigualdades matriciais lineares (LMIs). LMIs podem ser facilmente resolvida em microcomputadores usando os pacotes “SeDuMi” (Sturm, 1999) ou MOSEK (ApS, 2015) do MATLAB.

Este trabalho analisa condições para a estabilidade assintótica da origem em sistemas não lineares usando sistemas fuzzy TS. Normalmente, as condições de estabilidade são obtidas empregando o método direto de Lyapunov. Este método consiste em verificar a existência de uma função $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{x}(t)) > 0 \text{ e } \dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0, \quad (1)$$

$\forall \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$. Ou seja, o método permite estudar a estabilidade assintótica de sistemas fuzzy TS sem calcular

suas soluções. O problema é que não existem métodos sistemáticos para obter a função $V(\mathbf{x}(t))$ e o que se faz, em geral, é usar condições baseadas em LMIs para verificar a existência de uma função candidata satisfazendo as restrições (1). Logo, a eficiência de uma estratégia para garantir a estabilidade está diretamente relacionada com a estrutura da função candidata escolhida e da modelagem usada para gerar as LMIs.

A classe de funções mais simples de se usar para estudar a estabilidade assintótica de sistemas fuzzy TS são as funções de Lyapunov quadráticas (FLQs). Quando o sistema é quadraticamente estável o resultado é aplicável em toda a região de validade do sistema fuzzy TS (Tanaka and Wang, 2001; Chen et al., 2016; da Silva Campos et al., 2017; Elias et al., 2016). Contudo, já é conhecido na literatura que FLQs conduzem a resultados conservadores e que em certos casos não é possível encontrar uma FLQ para um sistema fuzzy localmente estável (Johansson et al., 1999). Quando a função quadrática falha torna-se necessário a utilização de funções candidatas mais complexas, tais como funções de Lyapunov por partes (Johansson et al., 1999) ou funções de Lyapunov fuzzy (Jadbabaie, 1999).

Esse trabalho irá focar em comparações numéricas de resultados propostos na literatura que usam funções de Lyapunov fuzzy (FLFs) como candidatas para checar a estabilidade assintótica de sistemas fuzzy. Essa classe de funções permite incluir propriedades de funções de pertinência no processo de modelagem das restrições baseadas em LMIs reduzindo o conservadorismo nas condições de estabilidade. Dessa forma, FLFs tem sido bastante empregadas no estudo de sistemas fuzzy TS (Jadbabaie, 1999; Tanaka et al., 2003;

Guerra and Bernal, 2009; Mozelli et al., 2009; Lee et al., 2011; Faria et al., 2013).

Nem sempre é possível demonstrar analiticamente que um método proposto é menos conservador que outro existente na literatura. Uma alternativa viável para checar a eficiência entre métodos consiste em realizar comparações numéricas. É comum encontrar esse tipo de comparação na literatura (da Silva Campos et al., 2017; Mozelli et al., 2010).

O foco deste trabalho é comparar os métodos apresentados em (Faria et al., 2013) e (Guerra and Bernal, 2009). Exemplos numéricos extraídos da literatura ilustram a eficiência entre os métodos.

2 Formulação do problema

Considere um sistema não linear na forma

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{z}(t))\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

sendo $f(\mathbf{z}(t))$ uma função não linear, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado e $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^p$ uma função limitada e suave num conjunto compacto C .

Seja $nl_j(\mathbf{z}(t)) \in [\underline{nl}_j, \overline{nl}_j]$, $j \in \{1, \dots, p\}$, o conjunto de não linearidades do sistema (2). Aplicando o método apresentado em (Tanaka and Wang, 2001), as seguintes funções são construídas:

$$w_0^j(\mathbf{z}(t)) = \frac{\overline{nl}_j - nl_j(\mathbf{z}(t))}{\overline{nl}_j - \underline{nl}_j}, \quad (3)$$

$$w_1^j(\mathbf{z}(t)) = 1 - w_0^j(\mathbf{z}(t)),$$

onde $j \in \{1, \dots, p\}$. As funções de pertinência são definidas como

$$h_k(\mathbf{z}(t)) = h_{1+k_p+k_{(p-1)} \times 2 + \dots + k_1 \times 2^{p-1}} = \prod_{j=1}^p w_{k_j}^j(z_j), \quad (4)$$

onde $k \in \{1, \dots, 2^p\}$ e $k_j \in \{0, 1\}$.

Assim, os modelos fuzzy TS são descritos por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{z}(t)) \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t), \quad (5)$$

sendo $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ as matrizes dos modelos locais e $h_k(\mathbf{z}(t))$ as funções de pertinência dos modelos locais. De (3) e (4) obtém-se as seguintes propriedades:

$$\forall k \in \mathcal{R}, \quad h_k(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^r h_k(\mathbf{z}(t)) = 1, \quad (6)$$

sendo \mathcal{R} o conjunto de números inteiros dados por $\{1, 2, \dots, r\}$. Apenas por facilidade de notação, de agora em diante vamos denotar $h_k(\mathbf{z}(t))$ por h_k .

Os resultados apresentados neste trabalho utilizam funções de Lyapunov candidatas com a seguinte estrutura

$$V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{k=1}^r h_k \mathbf{P}_k \right) \mathbf{x}(t), \quad (7)$$

sendo \mathbf{P}_k matrizes definidas positivas.

A derivada temporal de (7) é dada por:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) &= \mathbf{x}(t)' \left(\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k \right) \mathbf{x}(t) \\ &\quad + 2\mathbf{x}(t)' \left(\sum_{k=1}^r h_k \mathbf{P}_k \right) \dot{\mathbf{x}}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Logo, as condições de estabilidade obtidas com (7) e (8) dependem explicitamente das derivadas temporais das funções de pertinência (6) e para convertê-las em LMI é necessário impor limites nos seus valores. Os resultados comparados nesse trabalho propõem estratégias diferentes para lidar com a limitação da matriz

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k.$$

Explorando a estrutura das funções (3) e (4) em (Guerra and Bernal, 2009) foi verificado que a matriz $\dot{\mathbf{P}}$ pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i=1}^p h_\alpha \frac{\partial w_0^i}{\partial z_i} (P_{g_1(\alpha,i)} - P_{g_2(\alpha,i)}) \dot{z}_i \quad (9)$$

com

$$\begin{aligned} g_1(\alpha, i) &= \lfloor (\alpha - 1) / 2^{p+1-k} \rfloor \times 2^{p+1-k} \\ &\quad + 1 + \text{MOD}(\alpha - 1, 2^{p-k}), \\ g_2(\alpha, i) &= g_1(\alpha, i) + 2^{p-k}, \end{aligned}$$

e $\text{MOD}(n_1, n_2)$ o resto da divisão inteira de n_1 por n_2 . Desse modo, foi apresentado o seguinte resultado para a estabilidade assintótica da origem no sistema (5).

Teorema 1 *Se existem matrizes simétricas $\mathbf{P}_k > 0$, $k \in \{1, \dots, r\}$, satisfazendo as seguintes LMIs*

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\alpha\alpha}^m &< 0, \\ \frac{2}{r-1} \Upsilon_{\alpha\alpha}^m + \Upsilon_{\alpha\beta}^m + \Upsilon_{\beta\alpha}^m &< 0. \end{aligned} \quad (10)$$

com $\alpha, \beta \in \{1, \dots, r\}$, $\alpha \neq \beta$, $m \in \{1, \dots, 2^{p \times n}\}$,

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\alpha\beta}^m &= \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}_\beta + \mathbf{A}'_\beta \mathbf{P}_\alpha \\ &+ \sum_{i=1}^p \sum_{u=1}^n (-1)^{d_{iu}^m} \lambda_{iu} (\mathbf{L} \mathbf{A}_\beta)_{iu} (P_{g_1(\alpha,i)} - P_{g_2(\alpha,i)}) \end{aligned}$$

e d_{iu}^m os coeficientes da representação binária

$$m - 1 = d_{pm}^k + d_{p(n-1)}^k \times 2 + \dots + d_{11}^k \times 2^{p \times (n-1)}.$$

Então, toda solução $\mathbf{x}(t)$ do sistema (5) contida no conjunto

$$Z = \bigcap_{i,u} \left\{ \mathbf{x}(t) : \left| \frac{\partial w_0^i}{\partial z_i} x_u \right| \leq \lambda_{iu} \right\}$$

converge para a origem. ■

Uma outra maneira de estudar a matriz $\dot{\mathbf{P}}$ consiste em explorar a propriedade (6). De (6) segue que

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k = 0 \Leftrightarrow \dot{h}_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \dot{h}_k, \quad \forall i \in \mathcal{R}. \quad (11)$$

Além disso, para qualquer matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não nula, a matriz $\dot{\mathbf{P}}$ pode ser reescrita como

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k = \sum_{k=1}^r \dot{h}_k (\mathbf{P}_k + \mathbf{X}). \quad (12)$$

Considerando (11) e (12) em (Faria et al., 2013) foi proposto resultado a seguir.

Proposição 1 *Considere $h_k, \forall k \in \mathcal{R}$, satisfazendo a propriedade (6). Dado um índice $i \in \mathcal{R}$, para quaisquer matrizes $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{P}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, a seguinte igualdade é verificada:*

$$\sum_{k=1}^r \dot{h}_k \mathbf{P}_k = \dot{h}_i \mathbf{X} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \dot{h}_k (\mathbf{P}_k + \mathbf{X} - \mathbf{P}_i), \quad (13)$$

■

Considerando a Proposição 1 foi apresentado o teorema a seguir.

Teorema 2 *Sejam $\phi_k, k \in \mathcal{R}$, números reais positivos conhecidos. Assumindo que $|\dot{h}_k| \leq \phi_k, \forall k \in \mathcal{R}$, o sistema fuzzy (5) é localmente estável se para os índices $i, j \in \mathcal{R}$, sendo $i \neq j$, existirem matrizes $\mathbf{M}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{M}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{X} = \mathbf{X}' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}'_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, satisfazendo as seguintes LMIs:*

$$\mathbf{P}_\rho \succ \mathbf{0}, \quad \rho \in \mathcal{R}, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_k + \mathbf{X} - \mathbf{P}_i \succeq \mathbf{0}, \quad \forall k \in \mathcal{R} - \{i\}, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_\phi - \mathbf{M}_1 \mathbf{A}_\rho - \mathbf{A}'_\rho \mathbf{M}'_1 & \star \\ \mathbf{P}_\rho + \mathbf{M}'_1 - \mathbf{M}_2 \mathbf{A}_\rho & \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}'_2 \end{bmatrix} \prec \mathbf{0}, \quad (16)$$

com $\rho \in \mathcal{R}$ e

$$\tilde{\mathbf{P}}_\phi = \pm \phi_i \mathbf{X} + \sum_{\substack{\rho=1 \\ \rho \neq i}}^r \phi_\rho (\mathbf{P}_\rho + \mathbf{X} - \mathbf{P}_i),$$

onde \pm indica que a LMI precisa ser testada para os casos positivo e negativo. ■

Os Teoremas 1 e 2 foram elaborados explorando propriedades de funções de pertinência. No entanto, eles utilizam formulações distintas para tratar a matriz $\dot{\mathbf{P}}$, o que dificulta uma comparação analítica entre ambos. Portanto, serão efetuadas comparações numéricas para testar a eficiência de cada um.

Exemplo 1

Considere o sistema não linear (Faria et al., 2013):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - x_2(t) - f(x_1)x_1(t), \end{aligned}$$

onde $f(x_1) \in (0, \delta]$ com $\delta > 0$.

Empregando o método (Tanaka and Wang, 2001), este sistema não linear pode ser representado por um modelo fuzzy TS (5) com o seguintes modelos locais e funções de pertinência

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - \delta & -1 \end{bmatrix}, \\ h_1 &= w_0^1 = \frac{\delta - f(x_1)}{\delta}, \\ h_2 &= w_1^1 = \frac{f(x_1)}{\delta}. \end{aligned}$$

Supondo $|\dot{h}_k| \leq \phi$ e $\lambda_{iu} = \phi, \forall i, u, k$, a Figura 1 exibe o maior valor do parâmetro δ para o qual as LMIs dos Teoremas 1 e 2 são factíveis.

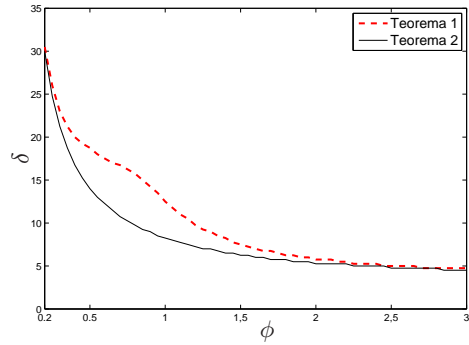


Figura 1: Valor máximo de δ para diferentes valores dos limitantes das derivadas das funções de pertinência.

Conforme ilustrado na Figura 1 os Teoremas 1 e 2 tiveram o mesmo valor máximo de $\delta = 30$ para o caso $\phi = 0.2$. A medida que aumenta-se o valor do parâmetro ϕ o Teorema 1 é capaz de resolver as LMIs para valores superiores de δ . No entanto, a partir do valor $\phi = 2.5$ os métodos passam a ter desempenho equivalente.

Exemplo 2

Considere o sistema fuzzy TS apresentado em (Mozelli et al., 2009):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{3b-2}{5} & \frac{3a-4}{5} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{2b-3}{5} & \frac{2a-6}{5} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} h_1 &= w_0^1(x_1)w_0^2(x_2), \\ h_2 &= w_0^1(x_1)w_1^2(x_2), \\ h_3 &= w_1^1(x_1)w_0^2(x_2), \\ h_4 &= w_1^1(x_1)w_1^2(x_2), \end{aligned} \quad (18)$$

com

$$w_0^i(x_i) = \begin{cases} \frac{1 - \sin(x_i)}{2}, & \text{for } |x_i| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{for } x_i > \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{for } x_i < -\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$w_1^i(x_i) = 1 - w_0^i(x_i).$$

Usando os pacotes YALMIP (Löfberg, 2004) and SeDuMi (Sturm, 1999) do MATLAB, a estabilidade do sistema acima foi verificada com os Teoremas 1 e 2 para a região $a \in [-10 \ -1]$, $b \in [0 \ 100]$ e $\lambda_{iu} = \phi_\rho = 5$, $\forall i$, u e ρ .

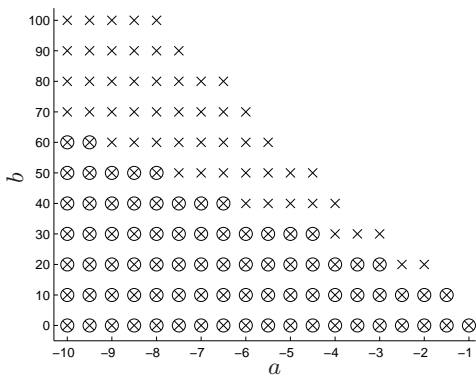


Figura 2: Região de factibilidade do Teorema 1 (o) e Teorema 2 para $i = 1$ (x).

A Figura 2 foi criada a partir da discretização dos intervalos em análise sendo que o intervalo $a \in [-10 \ -1]$ foi discretizado considerando passos de 0.5 enquanto o intervalo $b \in [0 \ 100]$ foi discretizado em passos de 10. Para cada valor de (a, b) na malha de

discretização a estabilidade assintótica do sistema (5), com modelos locais (17), foi verificada com os Teoremas 1 e 2 respectivamente. A região marcada com (o) representa os pontos nos quais o Teorema 1 é factível e a região marcada com (x) os pontos de factibilidade do Teorema 2 para o caso $i = 1$. Conforme discutido em (Faria et al., 2013), a região de factibilidade do Teorema 2 muda de acordo com o valor do parâmetro i e neste exemplo foram testados todos os valores possíveis ($i = 1, 2, 3, 4$). O valor $i = 1$ foi o que obteve a maior região de factibilidade. Pela Figura 2 verifica-se que a região obtida com o Teorema 2 sobrepõe a região do Teorema 1. O aumento do conservadorismo do Teorema 1 pode estar associado a estrutura adotada nas LMIs, cujas restrições aumentam exponencialmente com o número de variáveis premissa e variáveis de estado. Por outro lado, as LMIs do Teorema 2 aumentam apenas com o número de variáveis premissa. Na Tabela 1 são exibidos o total de LMIs dos teoremas para os Exemplos 1 e 2.

Tabela 1: Número total de LMIs resolvidas

	Teorema 1	Teorema 2
Exemplo 1	18	10
Exemplo 2	260	36

A Tabela 1 ilustra o comportamento exponencial do Teorema 1. Quanto maior o número de LMIs, mais complexa fica a solução numérica. Dessa forma, o Teorema 1 possui sérias restrições de uso, podendo inviabilizar sua utilização em sistemas com um número elevado de premissas e variáveis de estado.

Exemplo 3

Os Exemplos 1 e 2 trataram exclusivamente da comparação entre as regiões de factibilidade dos Teoremas 1 e 2. No entanto, é importante enfatizar que funções de Lyapunov fuzzy causam uma restrição na região de validade do sistema fuzzy. Por exemplo, no Teorema 1 está explícito que uma região de atração pode ser obtida com o conjunto Z . O Teorema 2 não discute essa restrição, ele se restringe basicamente à relaxação das LMIs através da inclusão da variável de folga \mathbf{X} . Com o intuito de verificar se a variável de folga afeta a região de atração, serão exibidas estimativas dessas regiões. Para a interpretação dos resultados considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} \Omega_\ell &= \{\mathbf{x}(t) : V(\mathbf{x}(t)) < \ell\}, \\ \mathcal{H} &= \{\mathbf{x}(t) : \dot{h}_k \leq \phi\}. \end{aligned}$$

Logo uma região de atração para os teoremas pode ser obtida considerando o maior valor ℓ tal que $\Omega_\ell \subset \mathcal{H}$.

Considerando $a = -5$ e $b = 30$ no sistema fuzzy do Exemplo 2, as matrizes dos modelos locais são da-

das por:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 17.6 & -3.8 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 11.4 & -3.2 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_4 &= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 30 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

Como pode ser visto na Figura 2, ambos os teoremas são factíveis para estes valores de a e b . Então, abaixo são exibidas as matrizes \mathbf{P}_k , $k \in \mathcal{R}$, encontradas na solução numérica das LMIs. Para a solução foram considerados os mesmos parâmetros do Exemplo 2, isto é, $\lambda_{iu} = \phi_\rho = 5$, $\forall i, u$ e ρ .

Teorema 1

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 0.118 & 0.002 \\ 0.002 & 0.024 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0.119 & 0.002 \\ 0.002 & 0.023 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0.122 & 0.002 \\ 0.002 & 0.022 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0.123 & 0.002 \\ 0.002 & 0.022 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \begin{bmatrix} 0.474 & -0.015 \\ -0.015 & 0.145 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_2 &= \begin{bmatrix} 0.585 & -0.006 \\ -0.006 & 0.123 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_3 &= \begin{bmatrix} 0.579 & -0.008 \\ -0.008 & 0.124 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}_4 &= \begin{bmatrix} 0.826 & 0.004 \\ 0.004 & 0.122 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A partir das matrizes \mathbf{P}_k , $k \in \mathcal{R}$, foram geradas as regiões de atração dos Teoremas 1 e 2 na Figura 3. Como pode ser visto na figura, a variável de folga \mathbf{X} não teve grande influência na região de atração. Por outro lado, conforme pode ser visto na Figura 2, ela ajudou a aumentar a região de factibilidade das LMIs. Para efeito de ilustração o sistema fuzzy com modelos locais (19) e funções de pertinência (18) foi simulado para a condição inicial $x_0 = [-0.5 \ 1]$, a curva em azul na Figura 3 ilustra o comportamento da trajetória ao longo do tempo. Pela figura pode-se ver que ela converge para zero. A Figura 4 exhibe o comportamento das funções de Lyapunov fuzzy.

O objetivo desse exemplo foi ilustrar a região de atração dos resultados originalmente publicados nos trabalhos (Guerra and Bernal, 2009) e (Faria et al., 2013) e, por isso, evitou-se alterar as LMIs. Porém, existem casos onde é interessante maximizar a região de atração. Nessas situações pode-se facilmente adaptar os Teoremas 1 e 2 para encontrar a máxima região

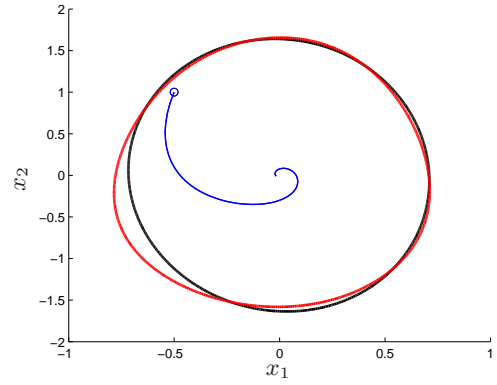


Figura 3: Região de atração do Teorema 1 (Curva em vermelho) e Teorema 2 para $i = 1$ (Curva em preto).

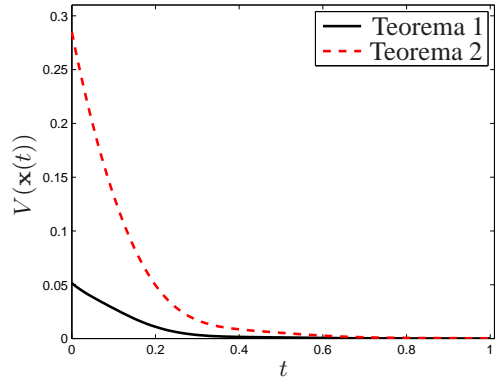


Figura 4: Comportamento das funções Lyapunov fuzzy para a condição inicial $x_0 = [-0.5 \ 1]$.

de atração adicionando mais duas restrições ao conjunto de LMIs. Uma abordagem sobre esse tema pode ser vista no trabalho (da Silva Campos et al., 2017).

3 Conclusão

O trabalho realizou a comparação numérica entre dois métodos existentes na literatura para análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS usando funções de Lyapunov fuzzy. Ambos os métodos exploram propriedades de funções de pertinência para reduzir o conservadorismo das restrições baseadas em LMIs.

Em (Faria et al., 2013) a relaxação das condições de estabilidade ocorre pela adição de uma variável de folga enquanto em (Guerra and Bernal, 2009) é proposto uma maneira de reescrever a matriz $\dot{\mathbf{P}}$. Conforme pode ser visto no Exemplo 1, a formulação apresentada em (Guerra and Bernal, 2009) gera resultados menos conservadores para sistemas fuzzy que possuem poucas variáveis premissas, ou seja, cujas não linearidades do sistema dependem no máximo de uma variável de estado. Para sistemas com duas premissas ou mais a formulação apresentada em (Faria et al., 2013) foi superior, sobrepondo a região de factibilidade de (Guerra and Bernal, 2009). Um outro de-

talhe importante no que diz respeito aos métodos é o custo computacional envolvido. O número de LMIs do resultado apresentado em (Guerra and Bernal, 2009) aumenta exponencialmente com o número de premissas e variáveis de estado. Ou seja, um modelo fuzzy TS que possui apenas dois modelos locais mas possui muitas variáveis de estado já pode inviabilizar o uso do método. Por outro lado, o resultado apresentado em (Faria et al., 2013) acrescenta uma variável de folga nas LMIs, o que implica em adicionar n^2 variáveis escalares nas restrições do modelo. A Figura 3 ilustra que ambas formulações geram regiões de atração equivalentes. Ou seja, a inclusão da variável de folga \mathbf{X} nas LMIs foi capaz de aumentar a factibilidade sem causar prejuízos na região de atração.

Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Referências

- ApS, M. (2015). *The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual. Version 7.1 (Revision 28)*. <http://docs.mosek.com/7.1/toolbox/index.html>.
- Chen, J., Xu, S., Zhang, B., Chu, Y. and Zou, Y. (2016). New relaxed stability and stabilization conditions for continuous-time t-s fuzzy models, *Information Sciences* **329**: 447 – 460.
- da Silva Campos, V. C., Nguyen, A.-T. and Palhares, R. M. (2017). A comparison of different upper-bound inequalities for the membership functions derivative, *IFAC-PapersOnLine* **50**(1): 3001–3006. 20th IFAC World Congress.
- Elias, L. J., Faria, F. A., Vieira, P. P. and Oliveira, V. A. (2016). Controle de um levitador magnético com atenuação de distúrbio, *Anais do XXXVII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Gramado, RS, pp. 010111–1–010111–7.
- Faria, F. A., Silva, G. N. and Oliveira, V. A. (2013). Reducing the conservatism of LMI-based stabilization conditions for TS fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions, *International Journal of Systems Science* **44**(10): 1956–1969.
- Guerra, T. M. and Bernal, M. (2009). A way to escape from the quadratic framework, *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 784–789.
- Jadbabaie, A. (1999). A reduction in conservatism in stability and \mathcal{L}_2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities, *Proceedings of the 14th IFAC World Congress*, Beijing, China, pp. 285–289.
- Johansson, M., Rantzer, A. and Årzén, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(6): 713–722.
- Lee, D. H., Park, J. B. and Joo, Y. H. (2011). A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems, *Information Sciences* **185**(1): 230–248.
- Löfberg, J. (2004). YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB, *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*, Taipei, China, pp. 284–289.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. and Avellar, G. S. C. (2009). A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems, *Information Sciences* **179**(8): 1149–1162.
- Mozelli, L. A., Palhares, R. M. and Mendes, E. M. A. M. (2010). Equivalent techniques, extra comparisons and less conservative control design for Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems, *IET Control Theory & Applications* **4**(12): 2813–2822.
- Sturm, J. (1999). Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones, *Optimization Methods and Software* **11–12**: 625–653.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116–132.
- Tanaka, K., Hori, T. and Wang, H. O. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(4): 582–589.
- Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: An Linear Matrix Inequality Approach*, Wiley, New York, USA.