

# CONTROLE ADAPTATIVO BINÁRIO PARA SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS INCERTOS UTILIZANDO FUNÇÕES DE MONITORAÇÃO

RENATO BORBA TEIXEIRA\*, TIAGO ROUX OLIVEIRA\*

\*PEL Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica, Faculdade de Engenharia,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ  
Rio de Janeiro, RJ, 20550-900

Emails: renatoteixeira13@gmail.com, tiagoroux@uerj.br

**Abstract**— The main goal of this paper is to combine monitoring functions with binary model reference adaptive control (BMRAC) to solve the problem of assuming the leading principal minors of the high-frequency gain matrix (HFG) have unknown signs. Such terms are responsible to define the control direction of the multivariable plant. The proposed method was applied to a multi-input-multi-output (MIMO) system of relative degree one. In the literature, this problem is a major challenge for multivariable adaptive controllers, since in general the signs of the elements of the HFG matrix are assumed to be known. This restriction is aggravated when the number of system inputs and outputs increases. The developed control strategy guarantees global exponential convergence for a small residual set and asymptotic trajectory tracking. Numerical results illustrate the efficiency of the proposed method.

**Keywords**— multivariable systems, uncertain high-frequency gain matrix, adaptive control, monitoring functions.

**Resumo**— Esse trabalho tem o objetivo de aplicar funções de monitoração em conjunto com controladores adaptativos binários por modelo de referência (BMRAC), como forma de resolver o problema do desconhecimento dos sinais dos menores principais da matriz de ganho de alta frequência (HFG), sendo esta responsável por definir a direção de controle. O método proposto foi aplicado em sistemas de múltiplas entradas e saídas (MIMO) e com grau relativo unitário. Na literatura esse problema é um grande desafio para controladores adaptativos multivariáveis, uma vez que em geral os sinais dos elementos da matriz HFG são assumidos conhecidos. Essa restrição é agravada quando o número de entradas e saídas do sistema aumentam. A estratégia de controle desenvolvida garante convergência exponencial global para um conjunto residual pequeno e rastreamento de trajetórias assintótico. Resultados numéricos ilustram a eficiência do método proposto.

**Palavras-chave**— sistemas multivariáveis, matriz de ganho de alta frequência incerta, controle adaptativo, funções de monitoração.

## 1 Introdução

Apesar de todo o progresso alcançado na área de controle adaptativo, as aplicações desse tipo de controlador para sistemas de múltiplas entradas e saídas (MIMO) não obtiveram grande sucesso nem mesmo para casos de grau relativo um, principalmente devido ao fato dos controladores adaptativos por modelo de referência (*Model Reference Adaptive Control – MRAC*) para o caso MIMO necessitarem de premissas muito mais restritivas em relação à planta do que os casos de uma entrada e uma saída (SISO) (Costa et al., 2003). A maioria das dificuldades estão relacionadas à matriz de ganho de alta frequência  $K_p$ . Para o MRAC utilizando abordagem direta (Ioannou, 2012), por exemplo, assumiu-se que a matriz  $S_p$  é conhecida tal que  $K_p S_p = (K_p S_p)^T > 0$ . Por outro lado, utilizando a adaptação indireta é necessário que a estimativa de  $K_p$  seja não-singular para todo instante de tempo.

Nesse artigo será utilizado um controlador BMRAC com fatoração SDU (Costa et al., 2003) aplicado em sistemas MIMO, onde os sinais de matriz de ganho de alta frequência são totalmente desconhecidos. Diferentemente da abordagem em (Costa et al., 2003), aqui será utilizado funções de monitoração para descobrir os sinais corretos

para cada menor principal da matriz ganho de alta frequência (HFG). Portanto, a grande contribuição desse artigo está em apresentar um controlador BMRAC para sistemas MIMO onde não existe nenhum conhecimento prévio dos sinais dos menores principais da matriz HFG.

Esse artigo está organizado em sete outras seções. A segunda seção é uma breve apresentação dos conhecimentos prévios dos sistemas de controle que serão utilizados. Na terceira seção é apresentada a formulação do problema MRAC, abordando de forma sucinta o caso MIMO e mostrando as principais hipóteses admitidas nesse trabalho. São apresentadas também as abordagens anteriormente utilizadas e formas de parametrização. A quarta seção apresenta o MRAC com fator de projeção, denominado aqui BMRAC. A quinta seção apresenta uma introdução às funções de monitoração, enquanto que na sexta seção é apresentada a nova lei de adaptação com função de monitoração. Finalmente, na sétima seção são apresentadas as simulações e resultados obtidos e na oitava e última parte as conclusões.

## 2 Preliminares

Seja  $\{A, B, C\}$  uma realização estritamente própria e não-singular  $m \times m$  com matriz de função

de transferência racional  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ .

O índice de observabilidade do par  $\{C, A\}$  ( $A \in R^{n \times n}, C \in R^{m \times n}$ ) é a menor integral  $\nu$ , ( $1 \leq \nu \leq n$ ), tal que

$$O_\nu = [C^T(AC)^T \dots (A^{\nu-1}C)^T]^T \quad (1)$$

é posto completo. O índice de observabilidade possui um bom sistema de interpretação:  $(\nu - 1)$  é o maior número de derivadas de  $y$ . Em outras palavras, ele fornece informações sobre a ordem dos filtros das variáveis de estado necessários na estrutura do MRAC MIMO.

Se o  $\det(CB) \neq 0$  é possível demonstrar que  $G(s)$  possui grau relativo 1 e a matriz não-singular  $K_p = CB$  a qual é referente à matriz HFG. Essa é uma generalização natural do grau relativo um para sistemas SISO (Bodson and Groszkiewicz, 1997).

A norma Euclidiana de um vetor  $x$  e a correspondente norma de uma matriz  $A$  são representados por  $\|x\|$  e  $\|A\|$ , respectivamente.

Normas  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_\infty$  e funções classe  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}_\infty$  são definidas como em (Khalil, 2002).

### 3 Formulação do problema

Para uma planta MIMO controlável, observável, linear e invariante no tempo, do tipo  $m \times m$  com matriz de transferência dada por  $G(s)$ ,

$$y = G(s)u, \quad (2)$$

podemos assumir as seguintes hipóteses:

(H1) Os zeros de  $G(s)$  possuem parte real negativa;

(H2)  $G(s)$  possui grau relativo 1;

(H3) Um limite superior do índice de observabilidade  $\nu$  de  $G(s)$  é conhecido.

(H4) A matriz de HFG  $K_p$  é totalmente desconhecida.

A hipótese (H1) relacionada à fase não mínima é comum na estrutura clássica MRAC (Ioannou, 2012). Com a hipótese (H2) é possível focarmos no caso do modelo mais simples baseado em funções de Lyapunov. A hipótese (H3) nos permite utilizar somente o conhecimento sobre o limite superior de  $\nu$ , como em (Ioannou, 2012), onde, entretanto, podemos aumentar a ordem dos filtros e do número de parâmetros.

Mesmo com  $K_p$  não-singular, alguns dos menores principais podem ser zero. Utilizando a hipótese (H4), (Weller and Goodwin, 1994) resolveram esse problema utilizando uma espécie de sistema composto com chaveamento lógico, porque de uma maneira adaptativa cada menor principal de  $K_p$  pode ser selecionado e ordenado, considerando serem diferentes de zero. Em (Costa et al., 2003) foi considerado que os sinais de  $K_p$  eram conhecidos, como uma forma de resolver esse problema.

Nesse trabalho a hipótese (H4) considera que a matriz  $K_p$  e os seus sinais são desconhecidos, e a função de monitoração em conjunto com a fatoração SDU é capaz de encontrar a combinação correta de sinais para fazer o sistema convergir.

O controle adaptativo proposto visa obter bons transitórios, reduzir os conhecimentos prévios, como indicado pela hipótese (H4), e atingir o rastreamento do sinal de referência de forma assintótica

$$e(t) = y(t) - y_M(t) \rightarrow 0, \quad \text{quando } t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

onde  $y_m \in R^m$  é a saída do modelo de referência

$$y_M = W_M(s)r, \quad (4)$$

e  $r \in R^m$  é um sinal uniformemente contínuo e limitado. Para selecionarmos o modelo de referência, é importante lembrar o fato de que  $\det(CB) \neq 0$  implica que  $G(s)$  pode ser reescrita como diagonal através da realimentação dinâmica (Rugh, 1996). Sem perda de generalidade, é possível selecionar um modelo de referência diagonal SPR

$$W_M(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{s + a_i} \right\}, \quad (5)$$

onde  $a_i > 0$ , ( $i = 1, \dots, m$ ).

#### 3.1 Revisão de Abordagens Anteriores para o Controle Adaptativo

Se  $G(s)$  é conhecido, então a lei de controle que atinge o casamento entre a matriz de transferência em malha fechada e  $W_M(s)$ ,

$$y = G(s)u^* = W_M(s)r = y_M \quad (6)$$

dado por (Sasthy and Bodson, 2011).

$$u^* = \theta_1^{*T} w_1 + \theta_2^{*T} w_2 + \theta_3^* y + \theta_4^* r = \theta^{*T} w, \quad (7)$$

onde  $\theta^{*T} = [\theta_1^{*T} \theta_2^{*T} \theta_3^* \theta_4^*]$  e o vetor regressor  $w = [w_1^T w_2^T y^T r^T]^T$  podem ser definidos como

$$\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathfrak{R}^{m(\nu-1) \times m}, \theta_3^* \in \mathfrak{R}^{m \times m}, \theta_4^* = K_p^{-1},$$

$$w_1 = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}u, \quad w_2 = \frac{A(s)}{\Lambda(s)}y, \quad w_1, w_2 \in \mathfrak{R}^{m(\nu-1)},$$

$$A(s) = [I \quad Is \quad \dots \quad Is^{\nu-2}]^T, \quad I \in \mathfrak{R}^{m \times m},$$

$$\Lambda(s) = \lambda_0 + \lambda_1 s + \dots + s^{\nu-1} \quad \text{é Hurwitz.}$$

O encontro do sistema em malha fechada é obtido fazendo  $u = u^*$ . Quando  $w_1, w_2, y$  e  $r$  em (7) são expressos em termos de  $u^*$ ,

$$u^* = \theta_1^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)}u^* + \theta_2^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)}G(s)u^* + \theta_3^* G(s)u^* + \theta_4^* W_M^{-1}(s)G(s)u^*, \quad (8)$$

a equação se torna

$$\begin{aligned} I - \theta_1^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)} - \theta_2^{*T} \frac{A(s)}{\Lambda(s)} G(s) - \\ - \theta_3^* G(s) = \theta_4^* W_M^{-1}(s) G(s). \end{aligned} \quad (9)$$

Multiplicando os dois lados da equação (9) por  $u$  obtemos:

$$u = \theta^{*T} w - K_p^{-1} r + K_p^{-1} W_M^{-1}(s) G(s) u. \quad (10)$$

Finalmente, multiplicando (10) por  $W_M(s)K_p$ , rearranjando e utilizando  $e = y - y_M$ ,  $y = G(s)u$ ,  $y_M = W_M(s)r$ , obtemos a equação de erro da saída

$$e = W_M(s)K_p[u - \theta^{*T} w]. \quad (11)$$

Exceto pelo fato de  $W_M(s)$  e  $K_p$  serem matrizes e  $e$  e  $u$  serem vetores, essa equação de erro MIMO possui a mesma forma que a já conhecida equação de erro SISO.

### 3.2 Fatoração da matriz de ganho de alta frequência

Em Costa et al. (2003) foi desenvolvida uma nova forma de fatorar o ganho  $K_p$ , onde foi introduzida a matriz diagonal positiva  $D_+$  como um parâmetro livre, baseando-se no seguinte lema.

**Lema 1** *Toda matriz real  $K_p$   $m \times m$  com menores principais diferentes de zero,  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_m$  pode ser fatorada como*

$$K_p = SDU, \quad (12)$$

onde  $S$  é uma matriz simétrica positiva definida,  $D$  é uma matriz diagonal e  $U$  é uma matriz triangular superior unitária.

Como está provado em Costa et al. (2003), podemos afirmar que se os menores principais de  $K_p$  são diferentes de zero, existe uma fatoração única

$$K_p = L_1 D_p L_2^T, \quad (13)$$

onde  $L_1$  e  $L_2$  são matrizes unitárias triangulares inferiores e

$$D_p = \text{diag} \left\{ \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} \right\}. \quad (14)$$

Fatorando  $D_p$  como

$$D_p = D_+ D, \quad (15)$$

onde  $D_+$  é uma matriz diagonal com elementos positivos, podemos reescrever (13) como  $K_p = L_1 D_+ L_1^T L_1^{-T} D L_2^T$ , de forma que (12) é satisfeita por

$$S = L_1 D_+ L_1^T, \quad U = D^{-1} L_1^{-T} D L_2^T. \quad (16)$$

Para deixar mais clara a fatoração SDU será realizado o exemplo a seguir, considerando

$$K_p = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Através da fatoração LDU (13) obtemos

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_p = \begin{bmatrix} \Delta_1 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_2 & 1 \end{bmatrix},$$

onde  $l_1 = k_{21}/\Delta_1$  e  $l_2 = k_{12}/\Delta_1$ , e para

$$D_+ = \begin{bmatrix} d_1^+ & 0 \\ 0 & d_2^+ \end{bmatrix},$$

utilizando a fatoração SDU (12) junto com  $D = D_+^{-1} D_p$ , obtemos

$$S = \begin{bmatrix} d_1^+ & d_1^+ l_1 \\ d_1^+ l_1 & d_2^+ + d_1^+ l_1^2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & l_2 - \frac{d_1^+ l_1 \Delta_2}{d_2^+ \Delta_1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3 Parametrização do sinal de controle e lei de adaptação

Podemos agora aplicar a fatoração SDU de  $K_p$  para encontrarmos uma nova equação de erro. Substituindo  $K_p = SDU$  em (11) e utilizando (7) obtemos

$$\begin{aligned} e = W_M(s)SD \\ \times [Uu - U\theta_1^{*T} w_1 - U\theta_2^{*T} w_2 - U\theta_3^* y - U\theta_4^* r]. \end{aligned} \quad (17)$$

Analisando melhor essa expressão é possível perceber que a lei de controle é bem definida, com a decomposição

$$Uu = u - (I - U)u, \quad (18)$$

onde  $(I - U)$  é uma matriz triangular superior, sendo possível definir o sinal de controle  $u$  em função de  $(I - U)u$ . Não é possível que a adaptação fique estagnada porque  $u_1$  depende de  $u_2, \dots, u_m$ , enquanto que  $u_2$  depende de  $u_3, \dots, u_m$ , e assim sucessivamente. As entradas desconhecidas de  $U$  são incorporadas na nova parametrização definindo  $K_1 = U\theta_1^{*T}$ ,  $K_2 = U\theta_2^{*T}$ ,  $K_3 = U\theta_3^*$ , e  $K_4 = U\theta_4^*$ , e reescrevendo (17) como

$$\begin{aligned} e = W_M(s)SD[u - K_1 w_1 - K_2 w_2 \\ - K_3 y - K_4 r - (I - U)u]. \end{aligned} \quad (19)$$

Em seguida, introduzimos o novo vetor de parâmetros  $\Theta_i^*$  através da identidade

$$\begin{aligned} [\Theta_1^{*T} \Omega_1 \quad \Theta_2^{*T} \Omega_2 \quad \dots \quad \Theta_m^{*T} \Omega_m]^T \\ \equiv K_1 w_1 + K_2 w_2 + K_3 y + K_4 r + (I - U)u. \end{aligned} \quad (20)$$

Além disso, para concatenar as  $i$ -ésimas linhas da matriz  $K_1, K_2, K_3, K_4$ , cada linha do vetor

$\Theta_i^{*T}$  inclui as entradas desconhecidas das  $i$ -ésimas linhas de  $(I - U)$ . Formamos, então, o seguinte vetor regressor correspondente

$$\begin{aligned}\Omega_1^T &= [w^T \ u_2 \ u_3 \ \dots \ u_m], \\ \Omega_2^T &= [w^T \ u_3 \ \dots \ u_m], \\ &\vdots \\ \Omega_m^T &= [w^T].\end{aligned}\quad (21)$$

A equação de erro (19) passa a ser dada da seguinte forma

$$e = (W_M(s)S)D(u - [\Theta_1^{*T} \Omega_1 \ \Theta_2^{*T} \Omega_2 \ \dots \ \Theta_m^{*T} \Omega_m]^T). \quad (22)$$

A característica chave da equação do erro (22) é que a matriz diagonal  $D$  aparece no lugar de  $K_p$ , onde em (Costa et al., 2003) são feitas premissas em relação aos sinais de  $d_1, \dots, d_m$ . Essa vantagem vem com o preço da condição SPR ser satisfeita por  $W_M(s)S$ , ao invés de  $W_M(s)$  sozinho. De fato,  $W_M(s)$  ser SPR combinado com  $S = S^T$  ser positiva definida não implica que  $W_M(s)S$  é SPR. Felizmente, pode-se provar que para qualquer  $W_M(s)$  em (5), existe  $S = S^T$  definida positiva tal que  $W_M(s)S$  é SPR.

Nessa nova parametrização, a lei de controle adaptativa é

$$u = [\Theta_1^T \Omega_1 \ \Theta_2^T \Omega_2 \ \dots \ \Theta_m^T \Omega_m]^T, \quad (23)$$

onde  $\Theta_i$  são as estimativas de  $\Theta_i^*$  obtidas a partir da lei de adaptação proposta em Costa et al. (2003) dada por:

$$\dot{\Theta}_i = \dot{\tilde{\Theta}}_i = -\gamma_i \text{sign}(d_i) e_i \Omega_i \quad (i = 1, \dots, m). \quad (24)$$

#### 4 MRAC com fator de projeção (BMRAC)

Nessa seção será apresentado o MRAC com fator de projeção, também conhecido como BMRAC (*Binary Model Reference Adaptive Control*), proposto em (Hsu and Costa, 1990) (Hsu and Costa, 1994) para plantas de grau relativo um.

O fator de projeção faz com que o vetor de parâmetros adaptativos  $\theta$  convirja rapidamente para dentro de uma região finita de raio apropriado.

Podemos reescrever (24) como

$$\dot{\Theta}_i = -\text{sgn}(d_i)[\sigma_i \Theta_i + \gamma_i e_i \Omega_i], \quad \sigma_i \text{sgn}(d_i) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m). \quad (25)$$

O fator  $\sigma_i$  é o fator de projeção, definido como

$$\sigma_i = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\Theta_i\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} \text{sgn}(d_i) < 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\Theta_i\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \text{sgn}(d_i) \geq 0 \end{cases} \quad (26)$$

onde

$$\sigma_{eq} = \frac{-\gamma_i e_i \Theta_i^T \Omega_i}{\|\Theta_i\|^2} \quad (27)$$

e  $M_\theta (> \|\Theta_i^*\|)$  é uma constante.

A adaptação é aplicada dentro de um conjunto invariante compacto, por exemplo, uma região definida por  $M_\theta$  para  $\Theta_i$ . Considerando que  $\|\Theta_i(0)\| \leq M_\theta$ , a projeção do vetor de adaptação pode ser interpretado geometricamente da seguinte forma: se o termo  $-\gamma_i e_i \Omega_i$  aparece fora da região  $\|\Theta_i\| \leq M_\theta$ , o vetor de adaptação é projetado para o plano tangente da região, se aparece dentro, o fator  $\sigma_i$  é igual a zero e  $\Theta_i(t)$  se move para o interior da região definida, de acordo com a lei de adaptação do MRAC clássico. Podemos definir essa região como uma bola de raio  $M_\theta$  e, então, se torna fácil provar que essa região é invariante, ou seja,  $\|\Theta_i(t)\| \leq M_\theta, \forall t \geq 0$ .

#### 4.1 Análise de estabilidade

Combinando o estado  $x \in R^n$  da planta (2) com filtros de estado  $w_1$  e  $w_2$ , podemos definir  $X = [x^T \ w_1^T \ w_2^T]^T \in R^{n+2m(\nu-1)}$ . Com  $X_M$  denotamos o estado que corresponde à uma realização não mínima  $C_M(sI - A_M)^{-1}B_M$  de  $W_M(s)$  onde  $C_M B_M = S$ . Então, o estado de erro  $z = X - X_M$  e a saída de erro  $e$  em (22) satisfazem

$$\dot{z} = A_M z + B_M D(u - [\Theta_1^{*T} \Omega_1 \ \dots \ \Theta_m^{*T} \Omega_m]^T), \quad (28)$$

$$e = C_M z, \quad e^T = z^T C_M^T. \quad (29)$$

Os resultados de estabilidade estão resumidos no seguinte teorema.

**Teorema 2** Consideramos o sistema em malha fechada (28), (22), (23), (25) e (26) e supomos  $\|\theta(0)\| \leq M_\theta$  com uma constante  $M_\theta > \|\theta^*\|$ . Assumimos que (H1)-(H4) são mantidas. Então,

1.  $\|\theta(t)\| \leq M_\theta, \forall t \geq 0$ ;
2.  $z$  e  $e$  tendem assintoticamente para zero;
3.  $|z(t)| \leq C|z(0)|e^{-\lambda_1 t} + O(\sqrt{\gamma^{-1}}), \forall t \geq 0$  e alguma constante positiva  $C$  e  $\lambda_1$ .

**Prova:** Porque  $W_M(s)S$  é SPR, existem matrizes  $P_M = P_M^T > 0$  e  $Q_M = Q_M^T > 0$  satisfazendo

$$A_M^T P_M + P_M A_M = -2Q_M, \quad (30)$$

$$P_M B_M = C_M^T, \quad C_M = B_M^T P_M^T. \quad (31)$$

Usando a seguinte função de Lyapunov

$$V = \frac{1}{2} \left( z^T P_M z + \sum_{i=1}^m \gamma_i^{-1} |d_i| \tilde{\Theta}_i^T \tilde{\Theta}_i \right), \quad (32)$$

é possível chegar ao seguinte resultado, como está provado em (Teixeira, 2017):

$$\dot{V} \leq -z^T Q_M z \quad (33)$$

Portanto, o controle adaptativo (23) e a lei de adaptação (25) garantem  $\tilde{\Theta}_i, \Theta_i \in \mathcal{L}_\infty$  e  $z \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ .

Uma vez que  $z = X - X_M$  e  $X_M$  são uniformemente limitados,  $X$  é também uniformemente limitado e, conseqüentemente,  $y$ ,  $w_1$  e  $w_2$  são uniformemente limitados. Desde que  $r(t)$  é uniformemente limitado,  $w$  é uniformemente limitado. Para provar que  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  são uniformemente limitados e, portanto,  $u$  é também uniformemente limitado, retornamos em (21). A vantagem da estrutura de (21), resultando da parametrização do controle, é que  $\Omega_m = w$  é uniformemente limitado, implicando que  $u_m = \Theta_m^T \Omega_m$  é uniformemente limitado. Desta forma  $\Omega_{m-1}^T = [w^T \ u_m]$  é uniformemente limitado. Repetindo esse argumento podemos mostrar que  $u_{m-1}, \dots, u_2, u_1$  são também uniformemente limitados. Ou seja, todos os sinais do sistema em malha fechada são uniformemente limitados. Isso também implica que  $\dot{z}, \dot{e}, \dot{\Omega}_i$  e conseqüentemente  $\dot{V}$  são também uniformemente limitados. Finalmente, o usual argumento invocando o lema de Barbalat prova que  $z(t), e(t) \rightarrow 0$  com  $t \rightarrow \infty$ .

Também é possível provar a estabilidade exponencial para um termo residual utilizando a inequação de Rayleigh (Khalil, 2002), considerando (32) e (33) tal que  $Q_M > 0$ , temos:

$$\lambda_{\min}(P_M)|z|^2 \leq z^T P_M z \leq \lambda_{\max}(P_M)|z|^2 \quad (34)$$

$$\lambda_{\min}(Q_M)|z|^2 \leq z^T Q_M z \leq \lambda_{\max}(Q_M)|z|^2 \quad (35)$$

De (33) e do lado esquerdo de (35) obtemos:

$$\dot{V} \leq -z^T Q_M z \leq -\lambda_{\min}(Q_M)|z|^2. \quad (36)$$

Considerando  $\tilde{\Theta}_i \in \mathcal{L}_\infty$  e lembrando que  $\sum_{i=1}^m O(\gamma_i^{-1}) \leq \sum_{i=1}^m O(\gamma^{-1}) \leq O(\gamma^{-1})$  podemos reescrever (32) como:

$$V \leq \frac{1}{2} (z^T P_M z + O(\gamma^{-1})), \quad (37)$$

sendo  $\gamma = \min \gamma_i$ , a partir de (34) e (37) obtemos:

$$V \leq \lambda_{\max}(P_M)|z|^2 + O(\gamma^{-1}). \quad (38)$$

Substituindo (38) em (36) obtemos:

$$\dot{V}(z) \leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_M)}{\lambda_{\max}(P_M)} [V(z) - O(\gamma^{-1})], \quad (39)$$

e podemos reescrever (39) como:

$$\dot{V}(z) \leq -2\lambda_1 [V(z) - O(\gamma^{-1})] \quad (40)$$

onde  $2\lambda_1 = \frac{\lambda_{\min}(Q_M)}{\lambda_{\max}(P_M)}$ . Resolvendo (40) obtemos:

$$V(t) \leq e^{-2\lambda_1 t} V(0) + O(\gamma^{-1}) \quad (41)$$

sendo:

$$V(0) = \frac{1}{2} [z(0)^T P_M z(0) + O(\gamma^{-1})] \quad (42)$$

e reescrevendo (42):

$$V(0) \leq \frac{1}{2} [\lambda_{\max}(P_M)|z(0)|^2 + O(\gamma^{-1})] \quad (43)$$

A partir de (34), (41) e (43) obtemos:

$$|z(t)| \leq C|z(0)|e^{-\lambda_1 t} + O(\sqrt{\gamma^{-1}}) \quad (44)$$

onde  $C = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_M)}{2\lambda_{\min}(P_M)}}$ .

A partir de (29) e utilizando (44) é possível reescrever  $e$  como

$$|e| = |C_M||z| \leq C_e|z(0)|e^{-\lambda_1 t} + O(\sqrt{\gamma^{-1}}), \quad (45)$$

onde  $C_e = \|C_M\| \|C\|$ .

Desta forma, podemos verificar a convergência exponencial em (44) e (45), existindo um termo residual pequeno, da ordem de  $\gamma^{-1}$ .  $\square$

## 5 Função de monitoração

Nessa seção será explicada como a função de monitoração será capaz de mudar a direção de controle baseada na saída do erro do sistema para atingir a convergência mesmo sem nenhum conhecimento sobre os sinais da matriz HFG  $K_p$ .

Podemos redefinir a lei de adaptação (25)-(27) como

$$\dot{\Theta}_i = \begin{cases} -\sigma_i^+ \Theta_i - \gamma_i e_i \Omega_i, & t \in T^+ \\ \sigma_i^- \Theta_i + \gamma_i e_i \Omega_i, & t \in T^-, \end{cases} \quad (46)$$

$$\sigma_i^+ = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\Theta_i\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} < 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\Theta_i\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \geq 0 \end{cases} \quad (47)$$

$$\sigma_i^- = \begin{cases} 0, & \text{se } \|\Theta_i\| < M_\theta \text{ ou } \sigma_{eq} > 0 \\ \sigma_{eq}, & \text{se } \|\Theta_i\| \geq M_\theta \text{ e } \sigma_{eq} \leq 0 \end{cases} \quad (48)$$

onde uma função de monitoração apropriada decidirá, baseada no erro de trajetória  $e$ , quando  $\dot{\Theta}_i$  irá chavear, permitindo a detecção de qualquer estimativa errada de  $\text{sgn}(K_p)$ . Os conjuntos  $T^+$  e  $T^-$  satisfazem  $T^+ \cup T^- = [0, \infty)$  e  $T^+ \cap T^- = \emptyset$ , e como será mostrado na análise a seguir, ambos  $T^+$  e  $T^-$  possuem a forma  $[t_k, t_{k+1}) \cup \dots \cup [t_j, t_{j+1})$ . Onde  $t_k$  ou  $t_j$  denotam o tempo de chaveamento para  $\dot{\Theta}_i$  e serão definidos futuramente.

Com base no Teorema 2 e (45), é possível escrever

$$|e_i(t)| \leq C_e|z(0)|e^{-\lambda_1 t} + O(\sqrt{\gamma^{-1}}) := \xi(t), \forall t \geq 0. \quad (49)$$

Construímos a função de monitoração  $\varphi_m$  baseada no limite superior de (49). Considerando a função auxiliar  $\varphi_k$  definida como demonstrado a seguir:

$$\varphi_{ik}(t) = e_i^{-\lambda_m(t-t_k)} |\varphi_{k-1}(t_k)| + a_i(k) e_i^{-t/a_i(k)} + a_i(k), t \in [t_k, \infty), \varphi_{i0}(0) = e_i(0), (i=1, \dots, m), \quad (50)$$

onde  $0 < \lambda_m \leq \lambda_1$  e  $a_i(k)$  é qualquer sequência crescente ilimitada e monotonicamente positiva e  $t_k$  sendo o tempo de chaveamento usado para decidir quando o parâmetro de adaptação  $\dot{\Theta}_i$  deverá

chavear de  $\sigma_i^- \Theta_i + \gamma_i e_i \Omega_i$  para  $-\sigma_i^+ \Theta_i - \gamma_i e_i \Omega_i$  e vice versa como definido a seguir. A taxa de decaimento  $\lambda_m$  atua como um fator de esquecimento, o qual provém de uma propriedade de reinicialização para  $\varphi_k$ .

A função de monitoração  $\varphi_m$  é definida como

$$\varphi_{im}(t) := \varphi_{ik}(t), \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \subset [0, \infty), (i=1, \dots, n). \quad (51)$$

A motivação por trás da introdução de  $\varphi_m$  é que  $C_e |z(0)| e^{-\lambda_1 t}$  não está disponível para medição. Relembrando que a inequação (49) é válida se o  $\text{sgn}(K_p)$  é corretamente estimado, é natural utilizar  $\xi$  como uma referência para decidir quando será necessário chavear o parâmetro de adaptação  $\hat{\Theta}_i$  em (46), ou seja, o chaveamento irá ocorrer somente quando (49) é violada.

Entretanto, como  $C_e |z(0)| e^{-\lambda_1 t}$  não está disponível, utilizamos  $\varphi_m$  para substituir  $\xi$  e invocamos o chaveamento de  $\varphi_m$ . Note que de (51), sempre temos  $\|e_i(t_k)\| < \varphi_{ik}(t_k)$  em  $t = t_k$ . Portanto, o tempo de chaveamento  $t_k$  é

$$t_{k+1} = \begin{cases} \min t > t_k : |e_i(t)| = \varphi_{ik}(t), & \text{se existe,} \\ \infty, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (52)$$

onde  $k \in 0, 1, 2, \dots$  e  $t_0 := 0$ . A seguinte inequação é obtida diretamente de (51):

$$|e_i(t)| \leq \varphi_{im}(t), \forall t > 0. \quad (53)$$

## 6 Nova lei de adaptação com função de monitoração

Nesse artigo as funções de monitoração foram utilizadas para descobrir a combinação correta que leva à direção de controle correta, por exemplo, a combinação dos sinais da matriz HFG  $K_p$ . Os resultados principais do sistema em malha fechada são apresentados no teorema a seguir.

**Teorema 3** *Considere o sistema em malha fechada (28), com sinal de controle (23), lei de adaptação (46)-(48) e função de monitoração (50)-(52). Sob as mesmas hipóteses do Teorema 2, supondo  $\|\theta(0)\| \leq M_\theta$  com uma constante  $M_\theta > \|\theta^*\|$ , então o sinal de controle irá parar de chavear com a combinação correta de sinais e o equilíbrio  $z \equiv 0$  é atingido assintoticamente. E ainda, o erro de rastreamento de saída e convergirá para um resíduo pequeno de ordem  $O(\gamma^{-1})$  ao menos exponencialmente e todos os sinais do sistema em malha fechada permanecerão uniformemente limitados.*

**Prova:** Na prova a seguir,  $k_i > 0$  são constantes que não dependem das condições iniciais e  $\Psi_i(\cdot) \in \mathcal{K}$ . A prova é demonstrada em três partes.

1) *A função de monitoração para chavear com o sinal correto:* Suponha que a lei de controle (23) chaveie de acordo com a lei de adaptação definida em (46) e fator de projeção definido em (47) e (48),

sem parar  $\forall t \in [0, t_M)$ , onde  $t_M$  pode ser finito ou infinito. Então,  $a_i(k)$  em (50) e (51) crescerá de forma ilimitada com  $k \rightarrow +\infty$ . Portanto, existe um valor finito  $\kappa$  tal que para  $k \geq \kappa$  o termo  $a_i(k) e_i^{-t/a_i(k)} \geq C_e |z(0)| e^{-\lambda_1 t}$ ,  $a_i(k) > O(\gamma^{-1/2})$  e  $\text{sgn}(K_p)$  é estimado corretamente. Nesse caso,  $\varphi_{im}(t) > \xi(t), \forall t \in [t_k, t_{k+1})$  com  $\xi$  em (49). Além disso,  $\xi$  é um limite superior válido para  $\|e_i\|$ . Portanto, nenhum chaveamento ocorrerá depois de  $t = t_k$ , por exemplo,  $t_{k+1} = t_M$  [ver (52)], o que leva a uma contradição. Desta forma,  $\varphi_{im}(51)$  tem que parar de chavear depois de algum tempo finito  $k = N$  e  $t_N \in [0, t_M)$ .

2) *Estabilidade em relação a um conjunto restrito:* Porque  $N$  é o número de chaveamentos necessários para garantir que as inequações  $a(N) e^{-t/a(N)} |z(0)| e^{-\lambda_1 t}$  e  $a(N) > O(\gamma^{-1/2})$  sejam mantidas, não é difícil concluir que  $N$  pode ser relacionado a  $\|z(0)\|$ . De fato, podemos escrever  $N \leq \Psi_1(\|z(0)\|) + k_1$ , que significa que  $N$  pode ser feito menor (não abaixo de  $k_1$ ) através da redução de  $\|z(0)\|$ . Portanto, temos  $a(N) \leq \Psi_2(\|z(0)\|) + k_2$  e, de (49),

$$\|e(t)\| \leq \Psi_2(\|z(0)\|) + c, \forall t \geq 0, \quad (54)$$

$\forall t \in [0, t_M)$ , onde  $c$  é uma constante positiva. Utilizando a forma regular (Utkin, 1978), (Utkin et al., 2009) para a realização do espaço de estados de (22), todos os estados  $z$  do sistema são dirigidos pela saída  $y$  da planta, a qual é uniformemente limitada porque  $y = e + y_m$  e o modelo de referência de saída  $y_m$  é também uniformemente limitado. Portanto, dado  $R > c$ , para  $\|z(0)\| < R_0$ , com  $R_0 \leq \Psi_3^{-1}(R - c)$ , então  $\|z(t)\|$  é limitado a uma distância de  $R$  com  $t \rightarrow t_M$ . Isso implica que  $z(t)$  é uniformemente limitado ( $t_M = +\infty$ ). Portanto, a estabilidade com relação à bola de raio  $c$  é garantida para  $z(0)$  na bola  $R_0$ .

3) *Limitação do sinal em malha fechada e convergência exponencial:* Primeiro, porque  $z$  e  $e$  são uniformemente limitados, então  $X = z + X_M$  também é uniformemente limitado porque  $X_M$  é o modelo de referência do vetor de estados. Dessa forma, relembrando que  $X = [x^T \ w_1^T \ w_2^T]^T$ , podemos também concluir, de forma subsequente, que  $x, w_1, w_2, w$  são uniformemente limitados. Seguindo os mesmos argumentos apresentados na prova do Teorema 2, podemos verificar que  $\|\theta(t)\| \leq M_\theta, \forall t \geq 0$ . Dessa forma,  $u = [\Theta_1^T \ \Omega_1 \ \Theta_2^T \ \Omega_2 \ \dots \ \Theta_m^T \ \Omega_m]^T$  é também uniformemente limitado.

Porque o controle de direção foi corretamente estimado, o rastreamento global e assintótico é alcançado, de acordo com o Teorema 2. A convergência assintótica de todo o vetor de erro de estado  $z$  para zero pode ser demonstrada utilizando a forma regular (Utkin, 1978), (Utkin et al., 2009) para a realização do espaço de estados de (22), onde todos os estados do sistema são conduzidos

pela saída da planta  $y_m$  que é uniformemente limitada. Finalmente, a partir do Teorema 2, sabemos adicionalmente que todas as trajetórias do sistema convergem para uma vizinhança pequena da ordem de  $O(\gamma^{-1/2})$  perto da origem do espaço do estado de erro, ao menos exponencialmente.  $\square$

## 7 Simulações e resultados

Considerando a seguinte planta MIMO com

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)} K_p,$$

sendo

$$K_p = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix},$$

com  $\phi = 60^\circ$ , assumindo que  $K_p$  e seus sinais são desconhecidos,  $W_M = \text{diag}\{1/(s+1), 1/(s+1)\}$ ,  $u_1 = \Theta_1^T \Omega_1$ ,  $\Omega_1^T = [r_1 \ r_2 \ u_2]$ ,  $u_2 = \Theta_2^T \Omega_2$ ,  $\Omega_2^T = [r_1 \ r_2]$ , e as leis de adaptação são (46)-(48), sendo  $i = 1, 2$  e  $r^T = 10[\sin(t) \ \cos(t)]$ . Foram realizadas simulações com valores de  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$  e  $M_\theta = 5$ .

A função de monitoração irá mudar a direção de controle toda vez que a inequação (53) for violada.

Os resultados obtidos estão apresentados da Figura 1 à Figura 5. É possível ver pelos resultados que as funções de monitoração são capazes de encontrar a direção de controle correta e que os sinais de erro convergem para zero sem sacrificar demasiadamente as amplitudes dos sinais de controle. A Figura 6 e Figura 7 mostram os resultados quando utilizamos  $\gamma_1 = \gamma_2 = 100$ . Os parâmetros são adaptados de forma mais agressiva o que faz com que o fator de projeção tenha um papel ainda mais importante para que a adaptação ocorra dentro de determinada região e, com isso, é possível obter melhores transitórios sem sacrificar o sinal de controle.

## 8 Conclusões

Nesse trabalho foram utilizadas funções de monitoração individualizadas para cada variável do vetor de erros de saída em conjunto com um controlador BMRAC multivariável. As funções de monitoração foram responsáveis por encontrar os sinais de cada menor principal da matriz HFG (responsável pela direção de controle). Assim sendo, a convergência para zero do erro de trajetória e a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada para um conjunto residual pequeno foram rigorosamente demonstradas. As simulações realizadas apresentaram resultados satisfatórios, onde os objetivos propostos foram alcançados, ilustrando assim a eficiência do método.

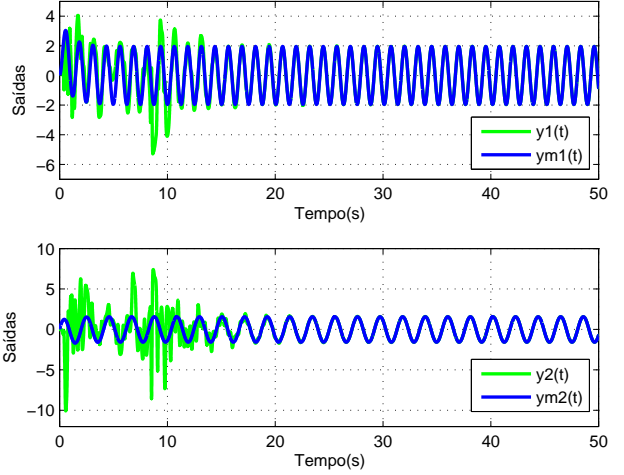


Figura 1: Saídas  $y_{1m}(t)$  com  $y_1(t)$  e  $y_{2m}(t)$  com  $y_2(t)$  sem fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

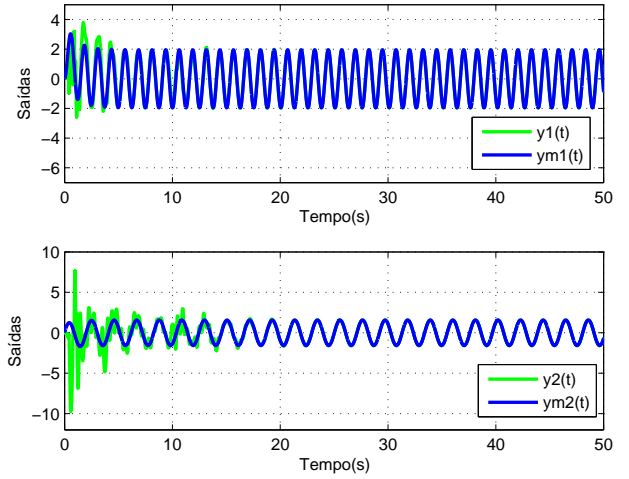


Figura 2: Saída  $y_{1m}(t)$  com  $y_1(t)$  e  $y_{2m}(t)$  e  $y_2(t)$  com fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

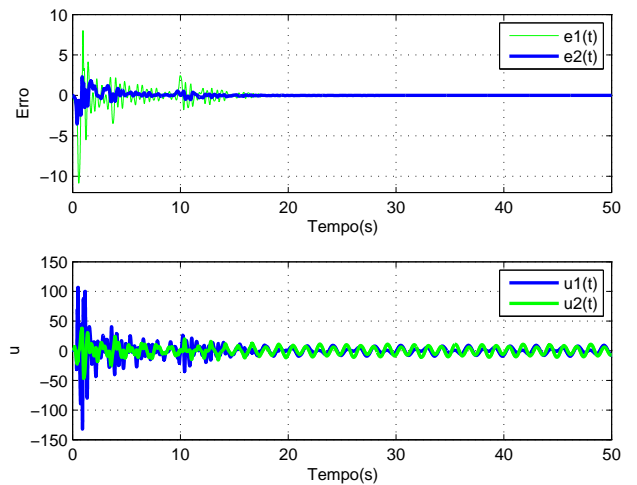


Figura 3: Sinal de erro  $e(t)$  e sinal de controle  $u(t)$  com fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

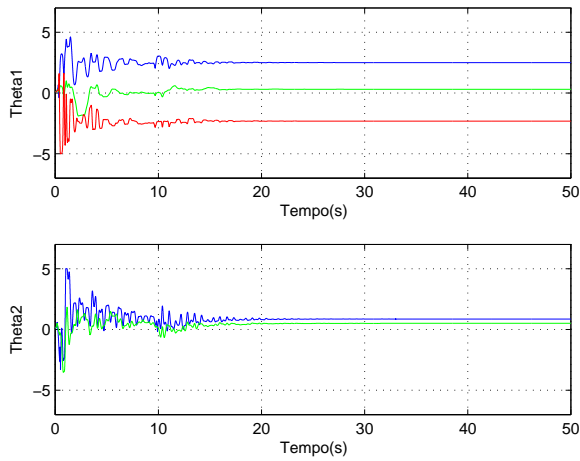


Figura 4: Parâmetros  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  com fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

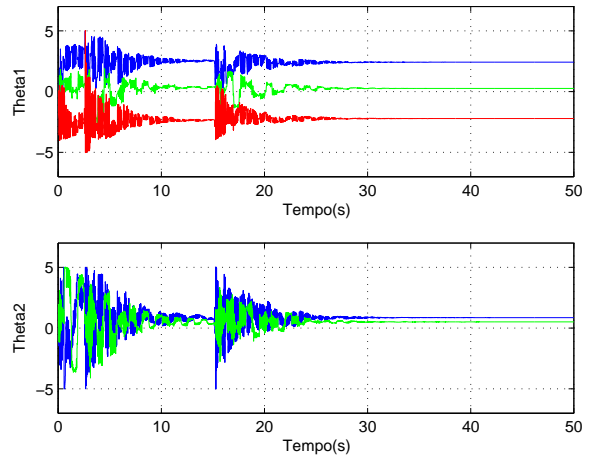


Figura 7: Parâmetros  $\Theta_1$  e  $\Theta_2$  com fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 100$

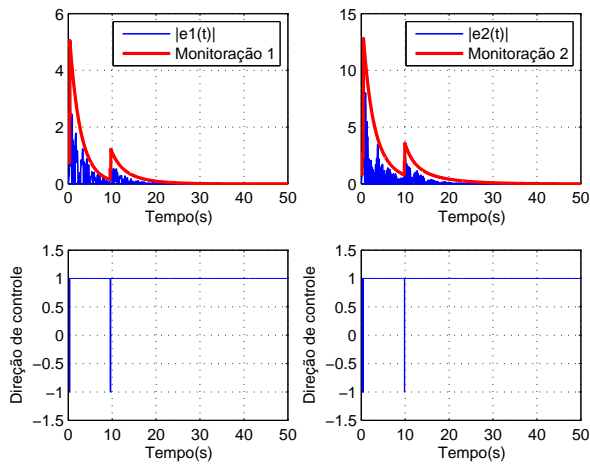


Figura 5: Funções de monitoração 1 e 2 com  $|e_1(t)|$  e  $|e_2(t)|$  e suas respectivas direções de controle - com fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$

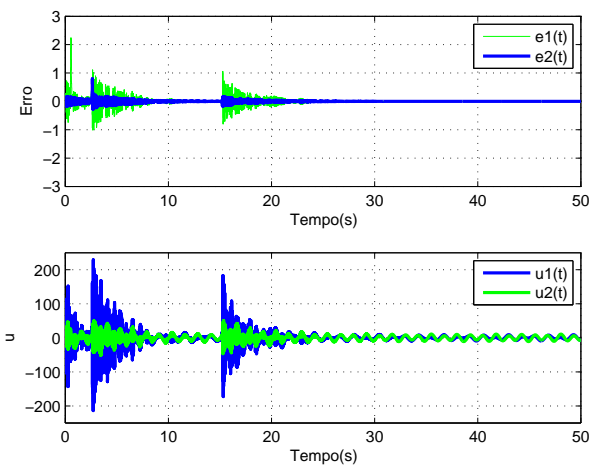


Figura 6: Sinal de erro  $e(t)$  e sinal de controle  $u(t)$  com fator de projeção e  $\gamma_1 = \gamma_2 = 100$

### Referências

Bodson, M. and Groszkiewicz, J. E. (1997). Multivariable adaptive algorithms for reconfigurable flight control, *IEEE transactions on control systems technology* **5**(2): 217–229.

Costa, R. R., Hsu, L., Imai, A. K. and Kokotović, P. (2003). Lyapunov-based adaptive control of mimo systems, *Automatica* **39**(7): 1251–1257.

Hsu, L. and Costa, R. R. (1990). A binary control approach to design globally exponentially stable systems, *Proceedings of the 7th International Conference on Systems Engineering*, pp. 1–9.

Hsu, L. and Costa, R. R. (1994). B-mrac: Global exponential stability with a new model reference adaptive controller based on binary control theory, *Control-Theory and Advanced Technology* **10**(4): 649–668.

Ioannou, Petros A. e Sun, J. (2012). *Robust adaptive control*, Courier Corporation.

Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*, 3rd, *New Jersey, Prentice Hall* **9**.

Rugh, W. J. (1996). *Linear system theory*, Vol. 2, Prentice-Hall Upper Saddle River, NJ.

Sastry, S. and Bodson, M. (2011). *Adaptive control: Stability, convergence and robustness*, Courier Corporation.

Teixeira, R. B. (2017). *Contribuições à teoria de controle adaptativo utilizando técnicas de inteligência computacional e funções de monitoração*, Master's thesis, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ, Rio de Janeiro.

Utkin, V., Guldner, J. and Shi, J. (2009). *Sliding mode control in electro-mechanical systems*, CRC press.

Utkin, V. I. (1978). *Sliding modes and their applications in variable structure systems*, Mir, Moscow.

Weller, S. and Goodwin, G. C. (1994). Hysteresis switching adaptive control of linear multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(7): 1360–1375.