

CONTROLE ROBUSTO VIA ANÁLISE INTERVALAR PARAMÉTRICA COM APLICAÇÃO À ESTABILIZAÇÃO DE UM GIROSCÓPIO

HELOISE ASSIS FAZZOLARI*, PAULO AUGUSTO VALENTE FERREIRA*

* *Universidade Estadual de Campinas - Unicamp*
Av. Albert Einstein, 400.
Campinas, São Paulo, Brasil.

Emails: helo_fm@hotmail.com, valente@dt.fee.unicamp.br

Abstract— This paper presents a computational approach for the robust pole placement controller design problem in the presence of interval uncertainties in the plant parameters. The proposed approach produces a controller with interval coefficients which contains all possible solutions of the robust pole placement problem. In order to reduce the conservativeness of the controller due to the so-called *dependency phenomenon*, present in the classical interval analysis, we adopt a parametric interval analysis approach, which takes into account multi-incident interval parameters. Simulation results from the application of the proposed approach to the problem of stabilizing a gyroscope are compared with those obtained through classical interval analysis. The comparison is favorable to the proposed approach.

Keywords— Control Theory, Interval Systems, Robust Control, Pole Placement, Interval Analysis.

Resumo— Este artigo apresenta uma abordagem computacional para o problema de projeto de controladores por alocação robusta de pólos na presença de incertezas intervalares em parâmetros da planta. A abordagem proposta gera um controlador com coeficientes intervalares que contém todas as possíveis soluções para o problema de alocação robusta de pólos. De forma a reduzir o conservadorismo do controlador devido ao chamado *fenômeno da dependência*, presente na análise intervalar clássica, utiliza-se a análise intervalar paramétrica, que considera parâmetros intervalares multi-incidentes. Resultados de simulação resultantes da aplicação da abordagem proposta ao problema de estabilizar um giroscópio são comparados aos fornecidos pela análise intervalar clássica. A comparação é favorável à abordagem proposta.

Palavras-chave— Teoria de Controle, Sistemas Intervalares, Controle Robusto, Alocação de Polos, Análise Intervalar.

1 Introdução

O problema de projetar um controlador dinâmico de forma a restringir as raízes do polinômio característico de um sistema em malha fechada a uma região pré-determinada do plano complexo s é fundamental no contexto da Teoria de Controle (Chen, 1999), (Rotstein et al., 1991). Um controlador robusto deve alocar os polos de malha fechada em uma região particular do semi-plano esquerdo do plano s considerando incertezas no modelo matemático do sistema, quase sempre presentes em problemas reais. Neste artigo consideramos incertezas estruturadas - paramétricas.

Uma alternativa de abordagem para este problema é a Análise Intervalar (Moore, 1966), (Neumaier, 1990), pela qual assume-se que os parâmetros incertos do sistema são descritos por intervalos reais. Esta abordagem é atraente, pois pode fornecer soluções analiticamente precisas.

Entretanto, a aplicação de métodos de análise intervalar a problemas reais de Engenharia pode levar a superestimação de conjuntos-solução devido ao chamado *fenômeno da dependência* (Muhanna and Mullen, 2001), que ocorre quando uma expressão contém múltiplas incidências de um ou mais parâmetros intervalares. Diversas soluções foram propostas para resolver o problema da multi-incidência de parâmetros intervalares, como a Análise Intervalar Generalizada

(Hansen, 1975) e a Aritmética Afim (Comba and Stolfi, 1993), (Stolfi and de Figueiredo, 2003), com aplicações em áreas diversas, como em análise estrutural (Santoro et al., 2015) e sistemas elétricos e mecânicos (El-Owny, 2014).

Em (Lordelo and Ferreira, 2006) o problema de projetar um controlador robusto foi resolvido utilizando técnicas de Análise Intervalar sem considerar o problema da dependência de parâmetros. O presente artigo apresenta um método computacional para projeto de controladores por alocação robusta de polos com tratamento de multi-incidências de parâmetros (incertezas) intervalares. A metodologia fornece uma solução para este problema quando o projeto do controlador é formulado em termos de equações Diofantinas intervalares. O método proposto fornece soluções bastante menos conservadoras do que as produzidas por métodos intervalares clássicos e problemas de alocação robusta de polinômios característicos passam a ter soluções viáveis por meio de Análise Intervalar. O artigo inclui a solução para o problema de estabilização robusta de um giroscópio como forma de demonstrar a viabilidade e a eficiência do método proposto.

O artigo está organizado como segue. Na Seção 2 apresentamos a notação utilizada no artigo e alguns resultados básicos relacionados a análise intervalar e ao problema de controle em estudo. Na Seção 3 introduzimos o principal resultado em-

única solução \mathbf{x} para qualquer \mathbf{f} se e somente se \mathbf{S} é não singular. Por sua vez, \mathbf{S} é não singular se e somente se os polinômios (numerador e denominador) que descrevem a planta são coprimos (Chen, 1999). A seguinte Proposição estabelece uma condição suficiente para a coprimo robustez de polinômios intervalares.

Proposição 1 *Dois polinômios intervalares são coprimos se a matriz de Sylvester intervalar associada $[\mathbf{S}]$ é não singular.*

A prova da Proposição 1 é simples. Se $[\mathbf{S}]$ é não singular, então cada matriz de Sylvester $\mathbf{S} \in [\mathbf{S}]$ é não singular, implicando que os polinômios intervalares são coprimos. A não singularidade de $[\mathbf{S}]$ é uma condição suficiente para coprimo robustez porque $[\mathbf{S}]$ contém matrizes que não são matrizes de Sylvester. A não singularidade de $[\mathbf{S}]$ é testada a partir dos resultados apresentados a seguir.

Definição 1 *Considere o conjunto de 2^n vetores*

$$\mathcal{Z} := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : z_i = +1 \text{ ou } z_i = -1, 1 \leq i \leq n\}$$

e para cada $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ defina

$$\mathbf{T}_{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n \end{bmatrix} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, defina-se ainda

$$\text{sign}(\mathbf{x})_i = \begin{cases} +1 & \text{se } x_i \geq 0, \\ -1 & \text{se } x_i < 0. \end{cases}$$

e $\text{sign}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Z}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{z} = \text{sign}(\mathbf{x})$, então $\mathbf{T}_{\mathbf{z}}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|$.

Teorema 1 (Jansson and Rohn, 1999) *Uma matriz intervalar $[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_c - \Delta, \mathbf{A}_c + \Delta]$ é robustamente não singular se e somente se o problema de Programação Linear*

$$(P_{\mathbf{z}}) \begin{cases} \text{maximizar} & \mathbf{z}^T \mathbf{x} \\ & \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & (\mathbf{A}_c - \Delta \mathbf{T}_{\mathbf{z}})\mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \\ & (\mathbf{A}_c + \Delta \mathbf{T}_{\mathbf{z}})\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{T}_{\mathbf{z}}\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

é limitado para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$.

Assim, se para algum $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$ a solução do problema de Programação Linear associado é ilimitada, $[\mathbf{A}]$ é singular. O Teorema 1 exige que até 2^n problemas de Programação Linear sejam testados antes que se conclua que a matriz intervalar $[\mathbf{A}]$ é robustamente não singular.

A partir do Teorema 1 é possível mostrar que no máximo metade dos problemas lineares precisam ser considerados, o que reduz substancialmente o custo computacional envolvido na verificação de não singularidade robusta de $[\mathbf{A}]$.

Corolário 1 (Fazzolari and Ferreira, 2017) *Considere o problema de Programação Linear $(P_{\mathbf{z}})$. No máximo 2^{n-1} problemas lineares $(P_{\mathbf{z}})$ precisam ser verificados para estabelecer a não singularidade de $[\mathbf{A}]$.*

Prova: Como $(P_{\mathbf{z}})$ é viável (pois o vetor nulo é viável) para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{Z}$, o Teorema 1 exige que até 2^n - a cardinalidade de \mathcal{Z} - problemas lineares sejam resolvidos antes de se concluir que $[\mathbf{A}]$ é não singular.

Entretanto, no máximo 2^{n-1} problemas lineares precisam ser resolvidos, fixando qualquer componente de \mathbf{z} em 1 ou -1 , por exemplo, $z_1 = 1$, e restringindo \mathbf{z} a

$$\tilde{\mathcal{Z}} := \{\mathbf{z} = (1, z_2, \dots, z_n) : |z_j| = 1, 2 \leq j \leq n\}.$$

De fato, como $\mathbf{T}_{-\mathbf{z}} = -\mathbf{T}_{\mathbf{z}}$, segue que \mathbf{x} é viável para $(P_{\mathbf{z}})$ se e somente se $-\mathbf{x}$ for viável para $(P_{-\mathbf{z}})$, e então os valores das funções-objetivo de $(P_{\mathbf{z}})$ e $(P_{-\mathbf{z}})$ são iguais. Assim sendo, $(P_{\mathbf{z}})$ é ilimitado (limitado), se e somente se $(P_{-\mathbf{z}})$ é ilimitado (limitado). ■

O valor ótimo de $(P_{\mathbf{z}})$ pode ser caracterizado como segue. Defina $\mathbf{y} := \mathbf{T}_{\mathbf{z}}\mathbf{x}$, seja $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de uns e observe que $\mathbf{T}_{\mathbf{z}}^{-1} = \mathbf{T}_{\mathbf{z}}$. Então, o problema $(P_{\mathbf{z}})$ é equivalente a

$$(Q_{\mathbf{z}}) \begin{cases} \text{maximizar} & \mathbf{e}^T \mathbf{y} \\ & \mathbf{y} \\ \text{sujeito a} & (\mathbf{A}_c \mathbf{T}_{\mathbf{z}} - \Delta)\mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \\ & (\mathbf{A}_c \mathbf{T}_{\mathbf{z}} + \Delta)\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Se \mathbf{y} é viável para $(Q_{\mathbf{z}})$, então $\alpha \mathbf{y}$ com $\alpha > 0$ também é viável, e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ implica que $(Q_{\mathbf{z}})$ é ilimitado se $\alpha \rightarrow \infty$. Consequentemente, $(Q_{\mathbf{z}})$, $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, é limitado se e somente se sua solução ótima for $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ e o valor ótimo for 0. De maneira equivalente, $(P_{\mathbf{z}})$, $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, é limitado se e somente se a solução ótima for $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ com valor ótimo 0. Isto é consistente com a condição necessária e suficiente (ii) de (Rohn, 2009), que dá origem ao problema $(P_{\mathbf{z}})$.

O Corolário 1 mostra que o limite existente para o número de problemas lineares que devem ser resolvidos para verificar a não singularidade de matrizes intervalares pode ser melhorado por um fator de 2. Verifica-se também que o valor ótimo de $P_{\mathbf{z}}$ funciona como uma função indicadora para $\mathbf{z} \in \tilde{\mathcal{Z}}$, sendo igual a 0, se $P(\mathbf{z})$ é limitado, e igual a $+\infty$, caso contrário.

3 Tratamento de Multi-incidências de Parâmetros Intervalares

Para um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$, considere sistemas lineares $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x} = \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta})$ dependentes de $\boldsymbol{\theta}$.

Se θ varia no intervalo $[\theta] \in \mathbb{R}^k$, pode-se definir o conjunto-solução

$$\Sigma(\mathbf{A}(\theta), \mathbf{b}(\theta), [\theta]) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \theta \in [\theta] : \mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta), \mathbf{b} = \mathbf{b}(\theta) \text{ e } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Assuma que os coeficientes de $\mathbf{A}(\theta)$ e $\mathbf{b}(\theta)$ dependem linearmente de θ , ou seja, existem vetores $\mathbf{w}(i,j) \in \mathbb{R}^k$ para $0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$, tais que

$$\{\mathbf{A}(\theta)\}_{ij} = \mathbf{w}(i,j)^\top \theta, \quad \{\mathbf{b}(\theta)\}_j = \mathbf{w}(0,j)^\top \theta. \quad (4)$$

Cada coeficiente $\{\mathbf{A}(\theta)\}_{ij}$ e $\{\mathbf{b}(\theta)\}_j$ de $\mathbf{A}(\theta)$ e $\mathbf{b}(\theta)$ é uma função linear de θ .

Teorema 2 *Seja $\mathbf{A}(\theta)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\theta)$ com $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b}(\theta) \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^k$ um sistema linear parametrizado, onde $\mathbf{A}(\theta)$ e $\mathbf{b}(\theta)$ são descritas por (4). Seja $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $[\mathbf{y}] \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$, e defina $[\mathbf{z}] \in \mathbb{R}^m$, $[\mathbf{C}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ como*

$$[\mathbf{z}]_i := \left[\sum_{j,\nu=1}^m \{\mathbf{R}_{ij}(\mathbf{w}(0,j) - \mathbf{x}_\nu \mathbf{w}(j,\nu))\}^\top \right] [\theta] \quad (5)$$

$$[\mathbf{C}] := \mathbf{I} - \mathbf{R}\mathbf{A}([\theta]). \quad (6)$$

Defina $[\mathbf{v}] \in \mathbb{R}^m$ por meio da seguinte recursão do tipo Gauss-Seidel: para $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{v}_i := \{\diamond([\mathbf{z}] + [\mathbf{C}][\mathbf{u}])\}_i \quad \text{onde} \quad [\mathbf{u}] := (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{y}_n)^\top. \quad (7)$$

Se $[\mathbf{v}] \subsetneq [\mathbf{y}]$, então \mathbf{R} e cada matriz $\mathbf{A}(\theta)$ com $\theta \in [\theta]$ é não singular, e para cada $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta), \mathbf{b} = \mathbf{b}(\theta)$ com $\theta \in [\theta]$ a solução única $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ satisfaz $\hat{\mathbf{x}} \in \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{v}]$. Além disso, as seguintes estimativas internas são válidas para $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} x_i^- &:= \tilde{x}_i + \inf([\mathbf{z}]_i) + \sup([\Delta]_i) \geq \inf_{\sigma \in \Sigma} \sigma_i \quad e \\ x_i^+ &:= \tilde{x}_i + \sup([\mathbf{z}]_i) + \inf([\Delta]_i) \leq \sup_{\sigma \in \Sigma} \sigma_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Prova: Ver (Rump, 1994). ■

As aproximações externa e interna do conjunto-solução de $\mathbf{A}(\theta)\mathbf{x} = \mathbf{b}(\theta)$, com $\theta \in [\theta]$, são definidas por $[\mathbf{x}_{\text{out}}] := \tilde{\mathbf{x}} + [\mathbf{v}]$ e $[\mathbf{x}_{\text{inn}}] := [\mathbf{x}^-, \mathbf{x}^+]$, respectivamente. Considera-se $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{b}_c$; $\mathbf{R} = \mathbf{A}_c^{-1}$.

Por meio do Teorema 2 obtém-se tanto uma aproximação interna $[\mathbf{x}_{\text{inn}}]$ quanto uma aproximação externa $[\mathbf{x}_{\text{out}}]$ do conjunto-solução do sistema intervalar parametrizado. Quanto menor a diferença entre $[\mathbf{x}_{\text{out}}]$ e $[\mathbf{x}_{\text{inn}}]$, mais próximas estarão as aproximações da casca intervalar do conjunto-solução. A determinação direta da casca intervalar é computacionalmente inviável na maioria das situações práticas. Para todos os propósitos práticos, adotamos $[\mathbf{x}_{\text{out}}]$ como aproximação do conjunto-solução.

4 Aplicação à Estabilização de um Giroscópio

Nesta seção, o método proposto é aplicado ao problema de estabilizar robustamente um giroscópio. O problema consiste em resolver uma equação Diofantina intervalar, $[\mathbf{S}][\mathbf{x}] = [\mathbf{f}]$, cuja matriz de Sylvester é função de um vetor de parâmetros $[\mathbf{p}]$ dos coeficientes intervalares da planta (Seção 2).

O método consiste em encontrar o conjunto de controladores $[\mathbf{x}_{\text{out}}] \supset \Sigma$. Se, com $[\mathbf{x}_{\text{out}}]$, o conjunto espectral da equação Diofantina intervalar (1) estiver contido no conjunto espectral de $[F(s)]$, que por sua vez define a região de alocação de polos no semiplano esquerdo do plano s , então qualquer controlador em $[\mathbf{x}_{\text{out}}]$ pode ser adotado.

Giroscópios são usados para medir o movimento angular em relação a uma estrutura fixa, sendo de fundamental importância para pilotos automáticos de aeronaves, sistemas de orientação e de navegação (Ruiz-León et al., 2002).

Considere um giroscópio com dois eixos ilustrado esquematicamente na Figura 2, um sistema didático desenvolvido por Quanser Innovate Educate (Quanser, 2018). O giroscópio consiste nos seguintes componentes: uma placa de suporte que contém o módulo de giroscópio com um rotor que gira a uma velocidade constante, sendo seu movimento produzido por um motor de corrente contínua, sensores para os ângulos α e ψ e um cartão de aquisição de dados que liga o giroscópio a um computador.

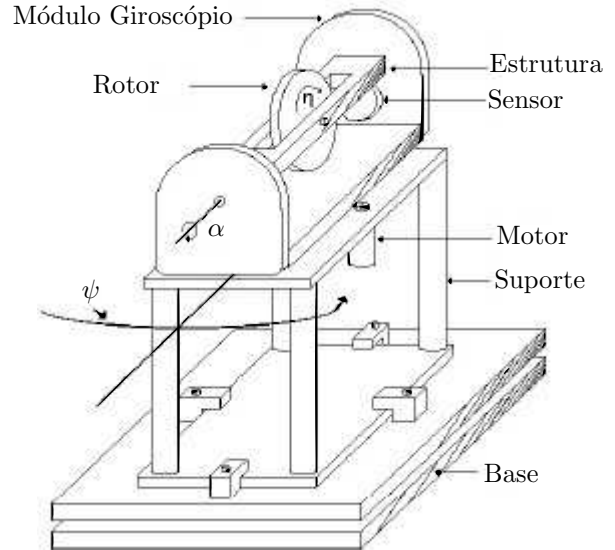


Figura 2: Giroscópio com dois graus de liberdade.

O objetivo do controlador a ser projetado é manter a direção em que o giroscópio está apontando, enquanto a placa de suporte gira em relação à placa base. A entrada de controle do sistema é a integral do ângulo medido pelo encoder α e a saída é o ângulo de rotação da plataforma em relação à base ψ . A função de transferência da planta

é dada por

$$G(s) = \frac{\frac{4}{G_g} s^2 + \frac{4B_{eq}R_s + 4K_m^2 K_g^2 \eta}{G_g J_{eq} R_s} s}{s^2 + \frac{B_{eq}R_s + K_m^2 K_g^2 \eta}{J_{eq} R_s} s - \frac{4K_m K_g \eta}{G_g J_{eq} R_s}},$$

na qual $G_g = 5,207$ é o ganho do giroscópio, $K_m = 7,68 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}/\text{A}$ é a constante de torque do motor, $K_g = 70$ é a relação de transmissão entre as engrenagens, $\eta = 0,621$ é a eficiência total, $R_s = 2,6 \text{ } \Omega$ é a resistência de armadura do motor e $B_{eq} = 0,004 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$ é o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente. Para esta aplicação, consideramos que pode haver variação na carga, resultando em um momento de inércia equivalente intervalar dado por $[J_{eq}] = [6,839 \times 10^{-3}, 7,161 \times 10^{-3}] \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

A matriz de Sylvester associada ao giroscópio é

$$S = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{a_2}{[J_{eq}]} & a_1 & \frac{a_3}{[J_{eq}]} & 1 \\ 0 & \frac{a_2}{[J_{eq}]} & \frac{-a_4}{[J_{eq}]} & \frac{a_3}{[J_{eq}]} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_4}{[J_{eq}]} \end{bmatrix}$$

na qual

$$a_1 = \frac{4}{G_g}, \quad a_2 = \frac{4B_{eq}R_s + 4K_m^2 K_g^2 \eta}{G_g R_s},$$

$$a_3 = \frac{B_{eq}R_s + K_m^2 K_g^2 \eta}{R_s}, \quad a_4 = \frac{4K_m K_g \eta}{G_g R_s}.$$

A utilização do Corolário 1 mostra que esta matriz de Sylvester é robustamente não singular. Então, por meio de um controlador de terceira ordem, deseja-se alocar polos no entorno das raízes da equação característica de malha fechada

$$f(s) = s^3 + 16,8556s^2 + 103,2586s + 545,1182 = 0,$$

correspondentes a $-2,4079 \pm 6,2832i$ e $-12,0397$.

O vetor intervalar de parâmetros $[p]$ é dado por $[p]^T = \left[1 \quad \frac{1}{[J_{eq}]} \right]$. A matriz de Sylvester foi descrita de maneira linearmente dependente do vetor de parâmetros $[p]$ através dos vetores $w(1,1) = [a_1 \ 0]$, $w(1,2) = [0 \ 0]$, $w(1,3) = [1 \ 0]$, $w(1,4) = [0 \ 0]$, $w(2,1) = [0 \ a_2]$, $w(2,2) = [a_1 \ 0]$, $w(2,3) = [0 \ a_3]$, $w(2,4) = [1 \ 0]$, $w(3,1) = [0 \ 0]$, $w(3,2) = [0 \ a_2]$, $w(3,3) = [0 \ -a_4]$, $w(3,4) = [0 \ a_3]$, $w(4,1) = [0 \ 0]$, $w(4,2) = [0 \ 0]$, $w(4,3) = [0 \ 0]$, $w(4,4) = [0 \ -a_4]$.

O polinômio característico de malha fechada foi descrito de maneira linearmente dependente de $[p]$ através dos vetores $w(0,1) = [1 \ 0]$, $w(0,2) = [16,8556 \ 0]$, $w(0,3) = [103,2586 \ 0]$, $w(0,4) = [545,1182 \ 0]$.

A resolução da equação Diofantina intervalar por meio de análise intervalar clássica, que não

considera parâmetros multi-incidentes na matriz de Sylvester, fornece o controlador intervalar

$$[C_{cla}(s)] = \frac{[-1,00, 10,31]s + [52,81, 64,56]}{[-6,92, 1,77]s + [-39,58, -37,75]}.$$

A resolução da equação Diofantina intervalar por meio de análise intervalar paramétrica, que considera parâmetros multi-incidentes na matriz de Sylvester, fornece o controlador intervalar alternativo

$$[C_{out}(s)] = \frac{[4,55, 4,75]s + [57,14, 60,23]}{[-2,65, -2,50]s + [-39,58, -37,75]}.$$

Observa-se que o controlador obtido quando se consideram as multi-incidências é consideravelmente menos conservador (possui coeficientes intervalares de menores raios) do que o obtido por meio da análise intervalar clássica.

A Figura 3 ilustra o espectro de (1) quando o controlador intervalar $[C_{out}(s)]$ é utilizado e a Figura 4 ilustra o espectro de (1) quando o controlador $[C_{cla}(s)]$ é utilizado.

Somente o controlador intervalar $[C_{out}(s)]$ aloca todos os polos do sistema em malha fechada no semi-plano esquerdo do plano s . O controlador baseado em análise intervalar clássica não garante a estabilização do sistema em malha fechada.

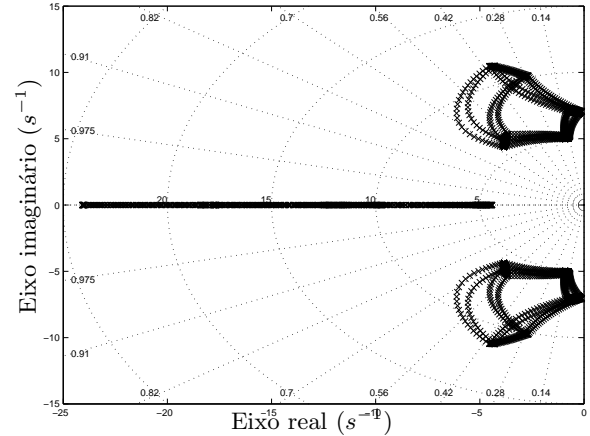


Figura 3: Espectro de malha fechada gerado pelo controlador $[C_{out}(s)]$. Todos os polos de malha fechada estão localizados no semi-plano esquerdo do plano complexo.

5 Conclusões

Neste artigo propomos uma abordagem para o controle robusto de sistemas dinâmicos lineares baseada na resolução de equações Diofantinas intervalares. A consideração explícita de parâmetros intervalares multi-incidentes produziu uma aproximação para o conjunto-solução do sistema de equações muito menos conservadora do que a fornecida pela análise intervalar clássica (não paramétrica). Este resultado ficou evidenciado na aplicação da abordagem proposta ao problema de

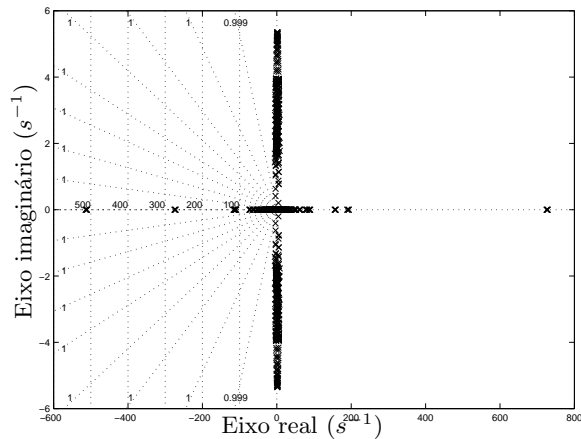


Figura 4: Espectro de malha fechada gerado pelo controlador $[C_{cla}(s)]$. Há polos de malha fechada localizados no semi-plano direito do plano complexo.

estabilização de um giroscópio. Contrariamente à análise intevaral clássica, a análise intervalar paramétrica foi capaz de estabilizar o sistema em malha fechada nas mesmas condições de projeto. Vantagens adicionais da abordagem proposta são a de ser facilmente implementada por meio de *softwares* como INTLAB (*toolbox* para Análise Intervalar do MATLAB) e de possuir baixo custo computacional, essencialmente ligado a resoluções de sistemas de equações lineares. Atualmente os autores investigam aproximações ainda menos conservadoras para conjuntos-soluções de sistemas de equações lineares intervalares, com aplicações em Teoria de Controle.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), Processo: 159829/2013-5.

Referências

- Bhattacharyya, S. P., Chapellat, H. and Keel, L. H. (1995). *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Chen, C. T. (1999). *Linear System Theory and Design, 3rd. edition*, Oxford University Press, Inc., New York.
- Comba, I. L. D. and Stolfi, J. (1993). Affine arithmetic and its applications to computer graphics, *Anais do Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens* pp. 9–18.
- El-Owny, H. B. M. A. (2014). New generalized interval arithmetic and its applications

to structural mechanics and electrical circuits, *IJCSI International Journal of Computer Science Issues* **11**: 85–92.

- Fazzolari, H. A. and Ferreira, P. A. V. (2017). Control design of interval systems with multi incident model parameters, *Annals of IEEE XXIV International Congress on Electronics, Electrical Engineering and Computing ? INTERCON 2017*.
- Hansen, E. R. (1975). A generalized interval arithmetic, *Nicket K editor Interval Mathematics, Lect. Notes Comput Sc* **29**: 7–18.
- Jansson, C. and Rohn, J. (1999). An algorithm for checking regularity of interval matrices, *SIAM Journal on Mathematical Analysis and Applications* **20**: 756–776.
- Lordelo, A. D. S. and Ferreira, P. A. V. (2006). Analysis and design of robust controllers using the interval diophantine equation, *Reliable Computing* **12**: 371–388.
- Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, inc., Englewood Cliffs, N.J.
- Muhanna, R. L. and Mullen, R. L. (2001). Uncertainty in mechanics problems-interval-based approach, *J Eng Mech (ASCE)* **66**: 127–557.
- Neumaier, A. (1990). *Interval Methods for Systems of Equations*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Popova, E. and Krämer, W. (2003). Parametric fixed-point iteration implemented in c-xsc, *Preprint 2003/03, WRSWT, Universität Wuppertal* pp. 1–27.
- Quanser (2018). *Quanser Innovate Educate*. <https://www.quanser.com/products/3-dof-gyroscope/>, 29 mar. 2018.
- Rohn, J. (2009). Forty necessary and sufficient conditions for regularity of interval matrices: A survey, *Electronic Journal of Linear Algebra* pp. 500–512.
- Rotstein, H., na, R. S. P., Bandoni, J., Desages, A. and Romagnoli, J. (1991). Robust characteristic polynomial assignment, *Automatica* pp. 711–715.
- Ruiz-León, J., Orozco-Mora, J. L. and Henrion, D. (2002). Real-time h2 and h-infinity control of a gyroscope using polynomial toolbox 2.5, *Latin-American Conference on Automatic Control (CLCA 2002)*.
- Rump, S. M. (1994). *Verification methods for dense and sparse systems of equations*, Topics in Validated Computations, J. Herzberger, Amsterdam.

- Santoro, R., Muscolino, G. and Elishakoff, I. (2015). Optimization and anti-optimization solution of combined parameterized and improved interval analyses for structures with uncertainties, *Computers and Structures* **149**: 31–42.
- Soh, Y. C., Evans, R. J., Petersen, I. and Betz, R. E. (1987). Robust pole assignment, *Automatica* **23**: 601–610.
- Stolfi, J. and de Figueiredo, L. H. (2003). An introduction to affine arithmetic, *TEMA Tend Mat Apl Comput* pp. 297–312.