

NOVOS ALGORITMOS PARA ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE SISTEMAS LPV VIA TRANSFORMADA HAAR

PATRÍCIA T. BANDEIRA*, PAULO C. PELLANDA†, LEONARDO O. DE ARAÚJO‡

**Escola Naval, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

†*Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

‡*Agência de Gestão e Inovação Tecnológica do Exército, Rio de Janeiro, RJ, Brasil*

Emails: patthomp-sonb@gmail.com, pcpellanda@ieee.org, leonardo.araujo@eb.mil.br

Abstract— The application of recent gridding-based algorithms for stability analysis of Linear Parameter-Varying (LPV) systems with general parameter dependencies is illustrated. Non-convex parametric domains and a large class of system parameter functions can be treated by these new Haar-based Lyapunov stability analysis techniques which are computationally implementable and solve the original infinite-dimensional and infinitely constrained problems, without requiring further checks even for arbitrarily sparse parameter grids. In contrast with previous theoretical results which are not constructive from the algorithmic and numerical point of view, approach illustrated here is systematic and amenable for practical implementation, avoiding complex analytical manipulations while considering a vast class of parameter dependencies. Numerical examples are used to validate and illustrate the algorithms.

Keywords— Haar wavelet transform, linear parameter-varying system (LPV), parameter-dependent Lyapunov function, stability analysis.

Resumo— Este artigo ilustra a aplicação de algoritmos recentes baseados em gradeamento para análise de estabilidade de sistemas Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) com dependência paramétrica geral. Domínios paramétricos não convexos e uma ampla classe de funções de dependência paramétricas do sistema podem ser tratados por essas novas técnicas de análise de estabilidade de Lyapunov baseadas em transformadas de Haar. Os algoritmos são implementáveis computacionalmente e capazes de resolver os problemas originais de dimensão infinita e com infinitas restrições, sem no entanto requerer testes suplementares mesmo para gradeamentos paramétricos esparsos. Diferentemente de resultados teóricos anteriores que não são construtivos de um ponto de vista numérico e algorítmico, o método tratado neste artigo é sistemático e passível de implementação prática, evitando manipulações analíticas complexas enquanto considera uma classe ampla de dependências paramétrica. Exemplos numéricos são utilizados para validar e ilustrar os algoritmos propostos.

Palavras-chave— Transformada wavelet Haar, sistema linear a parâmetros variantes (LPV), função de Lyapunov dependente do parâmetro, Análise de Estabilidade.

1 Introdução

Entre os métodos existentes de análise de estabilidade e desempenho e de síntese de controladores para Sistemas Lineares a Parâmetros Variantes (LPV), as abordagens baseadas em gradeamento (Wu et al., 1996; Apkarian and Adams, 1998) continuam sendo reconhecidas como as menos conservadoras quando os mapeamentos dos parâmetros pertencem a uma classe geral de matrizes de funções e o conjunto de possíveis trajetórias define domínios não convexos (de Araujo et al., 2015). Além disso, muitas das técnicas concorrentes não oferecem a possibilidade de considerar limites superiores realistas para as derivadas do parâmetro.

Por outro lado, as técnicas tradicionais de gradeamento fracassam ou por considerar apenas as condições necessárias ou por não fornecer regras sistemáticas para selecionar funções candidatas de Lyapunov dependentes do parâmetro (Apkarian and Adams, 1998; Pellanda et al., 2004). Os projetistas são levados a adotar algumas simplificações para o cálculo computacional das soluções das Desigualdades Matriciais Lineares Parametrizadas (PLMI).

Chesi (2013) introduziu um método capaz de

manipular uma classe particular de dependências paramétricas racionais em domínios politópicos que, depois de alguns cálculos, pode englobar um grande número de casos práticos com pouco conservadorismo. A principal desvantagem desse método, no entanto, é talvez o fato que ele não considera Funções de Lyapunov Dependentes do Parâmetro (FLDP) e, por conseguinte, não permite considerar taxas de variação paramétrica realísticas.

Em (de Araujo et al., 2015), os autores propuseram um método que consegue tratar as dificuldades das técnicas clássicas de gradeamento pelo uso da Transformada Haar (TH). No entanto, os resultados teóricos envolvidos não são sistemáticos nem construtivos de um ponto de vista numérico. Mais recentemente, Bandeira et al. (2018) introduziram novos algoritmos baseados em TH, derivados daqueles resultados, que são adequados para implementação prática e evitam manipulações analíticas e algébricas complexas quando uma ampla classe de dependências e domínios paramétricos irregulares são considerados. Para validar os algoritmos propostos, Bandeira et al. (2018) apresentaram somente exemplos numéricos que permitem comparações com resultados previamente

publicados, a despeito da possibilidade que exemplos com dependência paramétrica muito mais geral pudessem ser tratados. Neste artigo, a aplicabilidade desse método a exemplos de sistemas com dependência paramétrica geral é mostrada. Uma atenção especial é destinada à ilustração gráfica das variáveis calculadas pelos principais passos do algoritmo que são primordiais para o entendimento geral do método proposto.

Notação: Para uma dada matriz real $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, \mathbf{M}^T denota a transposta, $\|\mathbf{M}\|$ é a norma 2 induzida e M^{pq} é o (p, q) -ésimo elemento. \mathbf{I}_n denota a matriz identidade de dimensão n . $\mathbb{N}_{\geq 0}$ ($\mathbb{R}_{\geq 0}$) e \mathbb{N}_+ (\mathbb{R}_+) denotam, respectivamente, os números naturais (reais) estritamente positivos. A notação $\mathcal{S}(\mathbf{M}) \triangleq \mathbf{M} + \mathbf{M}^T$ é utilizada para simplificar expressões matemáticas longas. \mathbb{S}^n representa matrizes reais simétricas de dimensão n . Para $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{S}^n$, a notação $\mathbf{M} \succ \mathbf{N}$ ($\mathbf{M} \succeq \mathbf{N}$) significa que $\mathbf{M} - \mathbf{N}$ é positiva (semi)definida. Além disso, a notação $\pm \mathbf{M} \preceq \mathbf{N}$ significa que ambas as desigualdades $\mathbf{M} \preceq \mathbf{N}$ e $-\mathbf{M} \preceq \mathbf{N}$ são satisfeitas. $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ denota o espaço de funções quadraticamente integráveis e $\ell_2(\mathbb{N})$ denota o espaço de sequências quadraticamente somáveis. Para o mapeamento matricial $\mathbf{M} : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{M}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^{n \times m})$ significa $M^{pq}(\cdot) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$, para todo (p, q) . O produto interno de duas funções $f, g \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ é denotado por $\langle f(\theta), g(\theta) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)g(\theta)d\theta$. Para dois mapeamentos $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle \mathbf{F}(\theta), g(\theta) \rangle$ representa uma matriz cujo elemento (p, q) é dado por $\langle F^{pq}(\theta), g(\theta) \rangle$.

2 Fundamentos Teóricos

Alguns resultados conhecidos sobre análise de estabilidade de Lyapunov, TH, expansões truncadas de Haar e os respectivos limites superiores para o resíduo são recapitulados. Considere a representação em espaço de estados de um sistema LPV

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, and $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^r$ denotam vetores de estados e parâmetros, respectivamente. As trajetórias dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ em (1) evoluem em um domínio compacto, Θ , com taxa de variação $\frac{d\boldsymbol{\theta}(t)}{dt} = \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)$ em um hiper-retângulo Θ_d . Suponha também que $\mathbf{A} : \Theta \mapsto \mathcal{L}_2^{\Theta}(\mathbb{R}^{n \times n})$, que é um mapeamento que engloba uma grande quantidade de aplicações práticas. A análise de estabilidade de uma classe tão ampla de sistemas dinâmicos continua sendo uma tarefa desafiadora.

2.1 Estabilidade Quadrática de Sistemas LPV

Uma condição suficiente para a estabilidade quadrática do sistema (1) é a existência de uma Função de Lyapunov (FL) quadrática dependente do

parâmetro (Barmish and Marco, 1986; Vidyasagar, 2002),

$$V(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}(t))\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

com $\mathbf{P} : \Theta \mapsto \mathbb{S}^n$ sendo continuamente diferenciável por partes. Pode ser demonstrado que $V(\cdot, \cdot)$ em (2) representa uma FL para o sistema (1) se e só se $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{S}^n$ é uma solução viável do seguinte conjunto de PLMI (Shamma, 2012), $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$ e $\forall \dot{\boldsymbol{\theta}} \in \Theta_d$:

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}) \succ 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial t} + \mathcal{S}(\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta})) \prec 0. \quad (4)$$

A viabilidade das PLMIs (3)-(4) é um problema convexo mas de dimensão infinita e com infinitas restrições. Esta última dificuldade se deve à dependência do sistema em relação ao conjunto contínuo $(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})$ pertencendo a $\Theta \times \Theta_d$, enquanto que a primeira resulta da dimensão infinita do conjunto de possíveis funções candidatas de Lyapunov $\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta})$ (Apkarian and Adams, 1998). Para superar estas dificuldades, (de Araujo et al., 2015) propôs o uso da Transformada Discreta Wavelet (TDW) para reduzir o sistema PLMI a um programa de dimensão finita sem perder a propriedade de suficiência da condição de estabilidade ou necessitar de suposições mais conservadoras sobre a dependência paramétrica do estado e das matrizes de Lyapunov, ou sobre a forma do domínio Θ . Curiosamente, as soluções calculadas satisfazem as restrições sobre todo o domínio de análise, mesmo se grade esparsas forem consideradas.

Por questão de clareza, a partir deste ponto, é considerado o caso escalar $\theta \in \Theta$ com $\Theta = [0, 1]$, podendo ser estendida para o caso em que o parâmetro é multidimensional (Mallat, 2009) e para intervalos gerais.

2.2 Transformada Haar

A TH é uma TDW que permite uma representação de dimensão infinita de funções quadraticamente integráveis (Burrus et al., 1998; Mallat, 2009; Boggess and Narcowich, 2009). As funções escala (ϕ) e wavelet (ψ) são definidas como

$$\phi(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta < 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (5a)$$

$$\psi(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq \theta < 0,5, \\ -1, & \text{se } 0,5 \leq \theta < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5b)$$

Estas duas funções geram uma família de funções que são usadas para decompor e reconstruir um sinal ou uma função. As funções $\phi_k(\theta) \triangleq \phi(\theta - k)$ e $\psi_{j,k}(\theta) \triangleq 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j\theta - k)$ geram o espaço $\mathcal{L}_2^{\Theta}(\mathbb{R})$, e a expansão de Haar de uma matriz de funções

$\mathbf{A}(\theta) \in \mathcal{L}_2^\Theta(\mathbb{R}^{n \times n})$, i.e. $\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta)$, é dada por

$$\mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta) \triangleq \mathbf{A}_0 \phi_0(\theta) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{A}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta), \quad (6)$$

onde

$$\mathbf{A}_0 \triangleq \langle \mathbf{A}(\theta), \phi_0(\theta) \rangle \text{ and } \mathbf{A}_{j,k} \triangleq \langle \mathbf{A}(\theta), \psi_{j,k}(\theta) \rangle. \quad (7)$$

A TH (6) satisfaz o Teorema de Parseval, portanto a energia nos coeficientes $\mathbf{A}_{j,k}$ tende a decrescer conforme a resolução j aumenta (Vidakovic, 1999).

2.3 Existência de Limites Superiores para Resíduos Matriciais

Seja $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ a TH da matriz de estados $\mathbf{A}(\theta)$, com o nível de truncamento J . A soma infinita pode ser reescrita como:

$$\mathbf{A}(\theta) = \mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta) \triangleq \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta), \quad (8)$$

onde $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ corresponde à expansão em série truncada e

$$\mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{A}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta) \quad (9)$$

é o resíduo. Note que $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ é constante por partes e pode ser interpretada como um tipo de discretização de $\mathbf{A}(\theta)$.

Uma propriedade interessante da TH é que os coeficientes de mais alta resolução são aqueles com mais baixo nível de energia. Portanto, para J suficientemente grande, o resíduo $\mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)$ carrega informação pobre ou irrelevante e $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ é uma aproximação bastante precisa de $\mathbf{A}(\theta)$. Em (de Araujo et al., 2015), os autores demonstraram que existem funções reais positivas constantes por parte $\{\alpha_m(\theta)\}_{m=0}^{2^J-1}$, para qualquer J , tal que

$$\|\mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)\| \leq \sum_{m=0}^{2^J-1} \alpha_m(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (10)$$

Contudo, o cálculo de α_m para funções de dependência paramétrica geral envolvem análises não triviais.

3 FLIP via TH para Estabilidade Quadrática

O cálculo do limitante superior (10) de $\|\mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)\|$ não é sistemático, exigindo uma análise particular para cada função dependente do parâmetro, notadamente para a determinação de alguns outros coeficientes e expoentes de Hölder, e envolvendo o cálculo dos produtos internos em (7) (Bandeira et al., 2018). Em outras palavras, as provas dos

lemas e teoremas em (de Araujo et al., 2015) não são construtivas do ponto de vista algorítmico e numérico no caso de dependências paraméricas gerais. Nesta seção, novos algoritmos, de fácil implementação, para a análise da estabilidade de sistemas LPV considerando Funções de Lyapunov Independentes do Parâmetro (FLIP) (Bandeira et al., 2018), são revisitados e ilustrados.

3.1 Expansão de Haar Truncada da Matriz da Dinâmica e Limitantes Superiores de Resíduos

Para um nível de truncamento J , considere os intervalos contínuos $\Theta_{J_i} = [\frac{i-1}{2^{J+1}}, \frac{i}{2^{J+1}})$, com $\cup_{i=1}^{2^{J+1}} \{\Theta_{J_i}\} = \Theta$, e $\mathcal{D}_{J_i}^\Theta \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$ como o conjunto discreto dos 2^{J+1} pontos equidistantes

$$\theta_i = \frac{2i-1}{2^{J+2}}, \quad \theta_i \in \Theta_{J_i}. \quad (11)$$

Note que $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta)$ em (8) é uma matriz de funções constantes por partes cujos valores discretos das constantes são $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$. Então, dados $\mathbf{A}(\theta) \in \mathcal{L}_2^\Theta(\mathbb{R}^{n \times n})$, Θ e J , é possível calcular numericamente o conjunto de matrizes discretas $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$, e o conjunto de matrizes de resíduos máximos para cada intervalo correspondente Θ_{J_i} , da seguinte forma:

- Passo 1: Calcular $\mathbf{A}(\theta_{\hat{\ell}})$ para valores discretos igualmente espaçados (congelados) $\theta_{\hat{\ell}} = \hat{\ell}/2^{j^*}$ em uma grade paramétrica fina $\mathcal{D}_{j_{\hat{\ell}}}^\Theta \triangleq \{\theta_{\hat{\ell}}\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{j^*+1}} \subset \Theta$, onde j^* é escolhido suficientemente grande tal que $\|\{\mathbf{A}^{pq}(\theta_{\hat{\ell}})\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{j^*+1}}\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \cong \|\mathbf{A}^{pq}(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{R})}$, $\forall pq$, de forma a evitar perda de informação. O inteiro j^* deve ser escolhido, ao menos, maior do que $J+2$ e, para um dados limiar $\xi \ll 1$, um valor adequado para j^* é alcançado quando o número $2^{j^*} + 1$ de valores amostrados de $\mathbf{A}^{pq}(\theta)$ é tal que $\forall pq$:

$$\left\| \left\{ \mathbf{A}^{pq}(\theta_{\hat{\ell}}) \right\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{(j^*+1)+1}} \right\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} - \left\| \left\{ \mathbf{A}^{pq}(\theta_{\hat{\ell}}) \right\}_{\hat{\ell}=1}^{2^{j^*+1}} \right\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} \leq \xi;$$

- Passo 2: Calcular a TH de $\mathbf{A}(\theta_{\hat{\ell}})$ conforme (6), mas truncando o primeiro somatório em $j = J$ e guardando os primeiros 2^{J+1} coeficientes wavelet, $J \ll j^*$, para obter $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_{\hat{\ell}})$ e $\mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_{\hat{\ell}}) = \mathbf{A}(\theta_{\hat{\ell}}) - \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_{\hat{\ell}})$, $\forall \theta_{\hat{\ell}} \in \mathcal{D}_{j_{\hat{\ell}}}^\Theta$, assim como em (8);
- Passo 3: Selecionar $\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)$, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$, como as matrizes cujos elementos são os máximos absolutos dos resíduos dos respectivos elementos de $\mathbf{A}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_{\hat{\ell}})$, para cada um dos 2^{J+1} intervalos Θ_{J_i} de tamanho 2^{j^*-J-1} , i.e., para cada conjunto de valores $(i-1)2^{j^*-J-1} + 1 \leq \hat{\ell} < (i)2^{j^*-J-1}$;

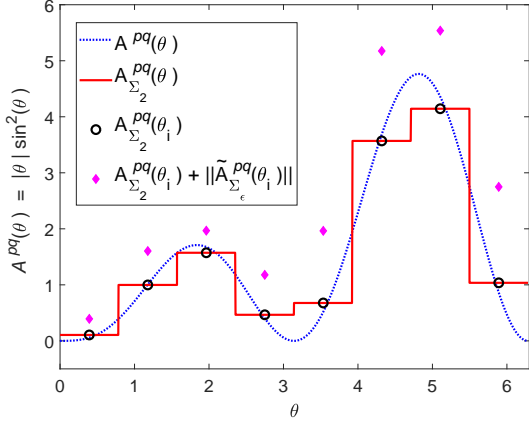


Figura 1: $A^{pq}(\theta) = |\theta| \sin^2(\theta)$ para $J = 2$

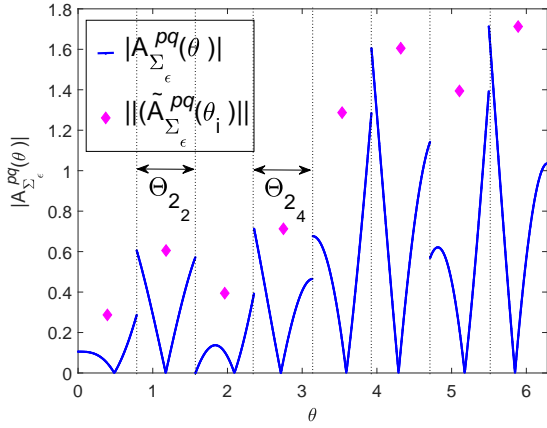


Figura 2: $|A^{pq}(\theta)|$ para $J = 2$

- Passo 4: Selecionar os valores $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ nos pontos médios de Θ_{J_i} e calcule $\|\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\|$ e seus resíduos máximos para os intervalos correspondentes $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\epsilon}(\theta_i)\|$, $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$.

Para ilustrar as principais variáveis de saída desse algoritmo, seja $A^{pq}(\theta) = |\theta| \sin^2(\theta)$ with $\theta \in [0, 2\pi)$, um elemento de $\mathbf{A}(\theta)$. A Fig. 1 a expansão truncada de para $J = 2$, $A_{\Sigma_2}^{pq}(\theta)$, $A_{\Sigma_2}^{pq}(\theta_i)$ e $\|\tilde{A}_{\Sigma_\epsilon}^{pq}(\theta_i)\|$ para cada intervalo $\Theta_{2,i}$, $i = 1, \dots, 8$. A Fig. 2 mostra os máximos resíduos relativos a essa função e os correspondentes intervalos $\Theta_{2,i}$.

3.2 Condições Suficientes para Estabilidade Quadrática

Considere as matrizes $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ e seus resíduos máximos nos intervalos correspondentes $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\epsilon}(\theta_i)\|$ calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$, como indicado na Seção 3.1. Então o seguinte teorema apresenta um número finito de condições suficientes para a existência de uma FLIP que garante a estabilidade quadrática do sistema (1).

Teorema 1 (Bandeira et al., 2018) O sistema LPV (1) é quadraticamente assintoticamente estável se existir $\gamma \in \mathbb{R}_+$ e uma matriz independente do parâmetro $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ tal que o seguinte conjunto de PLMIs é válido $\forall \theta_i \in \Theta_J \triangleq \{\theta_i\}_{i=1}^{2^{J+1}} \subset \Theta$:

$$\mathbf{P} \succ 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}_n \preceq 0, \quad (13)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{P} \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)) + 2\gamma \mathbf{I}_n \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\epsilon}(\theta_i)\| \prec 0. \quad (14)$$

Prova: (Bandeira et al., 2018). \square

Note que a viabilidade do programa do Teorema 1 implica a viabilidade do problema de dimensão infinita dado pela PLMI (3)-(4) que permite inferir a estabilidade exponencial do sistema LPV(1). O termo $2\gamma \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\epsilon}(\theta_i)\|$ in (14) é uma medida do conservadorismo introduzidos pelos algoritmos de discretização e truncamento do Teorema 1. Este conservadorismo adicional tende a decrescer com o aumento do nível de truncamento J e tende a zero assintoticamente. De fato, devido às propriedades da HT, quando $J \rightarrow \infty$, $\mathbf{A}_{\Sigma_\epsilon}(\theta) \rightarrow \mathbf{0}$ e $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) \rightarrow \mathbf{A}_{\Sigma_\infty}(\theta) = \mathbf{A}(\theta)$, o que anula assintoticamente os limitantes superiores $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\epsilon}(\theta_i)\|$. Sendo assim, as condições suficientes para a estabilidade quadrática do Teorema 1 se tornam também necessárias assintoticamente.

Enquanto o número de variáveis escalares livres no programa (12)-(14) depende somente da dimensão do vetor de estado n , sendo dado por $1 + \frac{n(n+1)}{2}$, o número de restrições PLMI depende apenas do nível de truncamento J e é dado por $2^{J+1} + 2$.

4 FLDP via TH para a Estabilidade Quadrática

A adoção de uma FLDP pode reduzir o conservadorismo no Teorema 1. Considere inicialmente a seguinte função constante por partes construída por funções da base Haar (de Araujo et al., 2015):

$$\mathbf{Q}(\theta) = \mathbf{Q}_0 \phi_0(\theta) + \sum_{g=0}^G \sum_{h=0}^{2^g-1} \mathbf{Q}_{g,h} \psi_{g,h}(\theta), \quad (15)$$

onde $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_{g,h} \in \mathbb{S}^n$ e $G \in \mathbb{N}$. A matrix $\mathbf{Q}(\theta)$ pode ser reescrita como abaixo (Bandeira et al., 2018), onde $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$:

$$\mathbf{Q}(\theta) = \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} \mathbf{Q}_h \phi_h(2^{G+1}\theta). \quad (16)$$

Diferentemente de (de Araujo et al., 2015), Bandeira et al. (2018) propuseram obter matrizes de Lyapunov candidatas $\mathbf{P}(\theta)$ a partir de $\mathbf{Q}(\theta)$ em (16) em vez de (15). Isto permite a construção de um algoritmo computacional geral para solucionar o problema de análise de estabilidade da seguinte

forma:

$$\mathbf{P}(\theta) \triangleq \int \mathbf{Q}(\theta) d\theta = \sum_{h=0}^{2^{G+1}-1} (\mathbf{Q}_h \theta + \hat{\mathbf{Q}}_h) \phi_h(2^{G+1}\theta), \quad (17)$$

onde \mathbf{Q}_h e $\hat{\mathbf{Q}}_h \in \mathbb{S}^n$, $h = 0, \dots, 2^{G+1} - 1$, são variáveis a serem determinadas. A matriz candidata de Lyapunov $\mathbf{P}(\theta)$ em (17) é afim por partes mas não necessariamente continuamente diferenciável por partes. Assim sendo, algumas restrições devem ser impostas sobre as variáveis $\hat{\mathbf{Q}}_h$, conforme estabelecido pelo próximo lema.

Lema 2 (Bandeira et al., 2018) *Considere $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $h = 0, \dots, 2^{G+1} - 1$, e $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$. A função afim por partes $\mathbf{P}(\theta)$ em (17) também é continuamente diferenciável por partes se e só se $\hat{\mathbf{Q}}_h$, $h = 1, \dots, 2^{G+1} - 1$, for obtida recursivamente da seguinte forma*

$$\hat{\mathbf{Q}}_h = \sum_{r=1}^h (\mathbf{Q}_{r-1} - \mathbf{Q}_r) \frac{r}{2^{G+1}} + \hat{\mathbf{Q}}_0. \quad (18)$$

Prova: (Bandeira et al., 2018). \square

Por outro lado, analogamente a $\mathbf{A}(\theta)$ em (8), $\mathbf{P}(\theta)$ em (17) pode ser precisamente representada por sua TH:

$$\mathbf{P}(\theta) \triangleq \mathbf{P}_{\Sigma_\infty}(\theta) = \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) + \mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta), \quad (19)$$

em que $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$ representa a expansão Haar truncada

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) = \mathbf{P}_0 \phi_0 + \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{P}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta) \quad (20)$$

e $\mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta)$ é o resíduo

$$\mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) = \sum_{j=J+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \mathbf{P}_{j,k} \psi_{j,k}(\theta), \quad (21)$$

com $\mathbf{P}_0 = \langle \mathbf{P}(\theta), \phi_0(\theta) \rangle$ e $\mathbf{P}_{j,k} = \langle \mathbf{P}(\theta), \psi_{j,k}(\theta) \rangle$.

Um exemplo de um elemento genérico $Q^{pq}(\theta)$ para $G = 1$ é ilustrado na Fig. 3. Na Fig. 4, é mostrado o correspondente elemento de $\mathbf{P}(\theta)$ em (17), sob as restrições em (18) com $\hat{Q}_0^{pq} = 0.5$, e $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta)$ em (20) para $J = 3$. Neste caso, visto que $J \geq G$ a expansão em TH (20) captura todas as informações relevantes de $\mathbf{P}(\theta)$ em (17).

O nível de truncamento G define os intervalos $\Theta_{G_h} = [\frac{h}{2^{G+1}}, \frac{h+1}{2^{G+1}}]$, com $\cup_{h=0}^{2^{G+1}-1} \{\Theta_{G_h}\} = \Theta$. Então, como $\mathbf{P}(\theta)$ em (17) é afim por partes e $\mathbf{Q}(\theta)$ em (16) é constante por partes, para a condição $J \geq G$ as seguintes propriedades são verdadeiras $\forall \theta_i \in \Theta_{G_h}$ (Fig. 4):

$$\mathbf{P}(\theta_i) = \mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) = (\mathbf{Q}_h \theta_i + \hat{\mathbf{Q}}_h) \phi_{i-1}(2^{J+1}\theta_i), \quad (22)$$

$$\mathbf{Q}(\theta_i) = \mathbf{Q}_h. \quad (23)$$

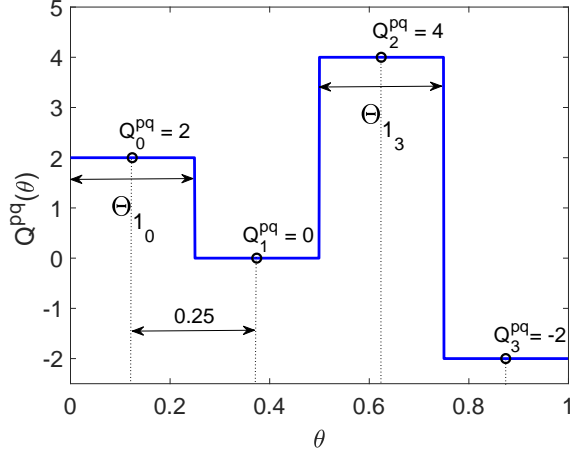


Figura 3: Exemplo de $Q^{pq}(\theta)$ para $G = 1$

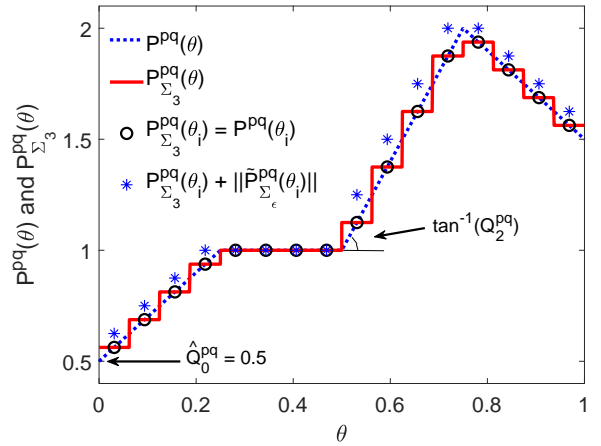


Figura 4: $P^{pq}(\theta)$ e $P_{\Sigma_J}^{pq}(\theta)$ para $J = 3$, $G = 1$ e $Q^{pq}(\theta)$ da Fig. 3

Além disso, para $\theta \in \Theta_{J_i}$, os resíduos máximos dependem das inclinações Q_h^{pq} , $\forall \theta_i \in \Theta_{G_h}$:

$$\tilde{P}_{\Sigma_\varepsilon}^{pq}(\theta_i) \triangleq \max\{P_{\Sigma_\varepsilon}^{pq}(\theta)\} = Q^{pq}(\theta_i)/2^{J+2}. \quad (24)$$

Suponha agora $\theta(t) \in \Theta$ e $|\dot{\theta}(t)| \leq \rho \in \mathbb{R}_+$ $\forall t$. Considere o sistema LPV (1) e a TH da matriz da dinâmica em (8), com o conjunto de matrizes truncadas $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)$, suas normas induzidas e limites superiores correspondentes $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$ calculados $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$ como indicado na Seção 3.1. Considere também $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i)$ em (22) sob a condição (18) com o conjunto correspondente $\tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)$, cujos elementos são dados por (24), e $\mathbf{Q}(\theta_i)$ em (23). Então o teorema a seguir estabelece as condições para a existência de $\mathbf{P}(\theta)$ em (17) que garante a estabilidade quadrática do sistema (1).

Teorema 3 (Bandeira et al., 2018) *O sistema (1) é quadraticamente estável se existirem matrizes $\hat{\mathbf{Q}}_0 \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{Q}_h \in \mathbb{S}^n$, $0 \leq h \leq 2^{G+1} - 1$, e escalares $\gamma_{J_i}, \gamma_{\varepsilon_i} \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq 2^{J+1}$, tal que as*

seguintes condições sejam satisfeitas $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$:

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n \succ 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) - \gamma_{J_i} \mathbf{I}_n \preceq 0, \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n & \tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i) & \gamma_{\varepsilon_i} \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \pm \rho \mathbf{Q}(\theta_i) + \mathcal{S}(\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta_i) \mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)) + 2\gamma_{j_i} \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\| \mathbf{I}_n \\ & + 2\gamma_{\varepsilon_i} \left(\|\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\| + \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\| \right) \mathbf{I}_n \prec 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Prova: (Bandeira et al., 2018). \square

Em resumo, a viabilidade do problema de dimensão finita no Teorema 3 implica na viabilidade do problema de dimensão infinita em (3)-(4), o que permite verificar a estabilidade do sistema LPV (1). O número de variáveis escalares de decisão nas $5(2^{J+1})$ PLMIs (25)-(28) é $2(2^{J+1}) + (2^{G+1} + 1)(n(n+1)/2)$. Enquanto o Teorema 1 envolve uma FL quadrática no estado, o Teorema 3 oferece um grau de liberdade muito maior permitindo a síntese conjunta de uma FL quadrática no estado e com dependência paramétrica no \mathcal{L}_2^Θ .

O Teoremas 1 e 3 fornecem somente condições suficientes para only sufficient conditions for quadratic stability when truncated Haar expansions are used. On the other hand, for Theorem 3, as $J \rightarrow \infty$, $\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta) \rightarrow \mathbf{A}(\theta)$, $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\| \rightarrow 0$, $\mathbf{P}_{\Sigma_J}(\theta) \rightarrow \mathbf{P}_{\Sigma_\infty}(\theta) = \mathbf{P}(\theta)$, $\mathbf{P}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta) \rightarrow 0$, and last terms in (28) $2\gamma_{j_i} \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\| \mathbf{I}_n + 2\gamma_{\varepsilon_i} \left(\|\mathbf{A}_{\Sigma_J}(\theta_i)\| + \|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\| \right) \mathbf{I}_n \rightarrow 0$. Hence conservatism introduced by Theorem 3 disappears and sufficient conditions to quadratic stability become also necessary asymptotically. Furthermore, as G increases, more degree of freedom is provided to find a feasible solution for the piecewise affine matrix function $\mathbf{P}(\theta)$ in (17). Then G determines the smoothness of $\mathbf{P}(\theta)$ if a feasible solution is found. For high values of G , the search space for (quadratic) LF candidates tends to the \mathcal{L}_2^Θ -space. Whereas Theorem 1 involves a quadratic-in-the-state LF, algorithm in Theorem 3 offers the possibility of considering a much greater degree of freedom by allowing the jointly synthesis of both quadratic-in-the-state and \mathcal{L}_2^Θ -in-the-parameter LF. Finally, the number of scalar decision variables in the $5(2^{J+1})$ PLMIs (25)-(28) is $2(2^{J+1}) + (2^{G+1} + 1)(n(n+1)/2)$.

5 Experimentos Numéricos

Os exemplos apresentados nesta seção envolvem dependências paramétricas gerais e são usados para demonstrar a validade dos algoritmos propostos por Bandeira et al. (2018) nesses casos.

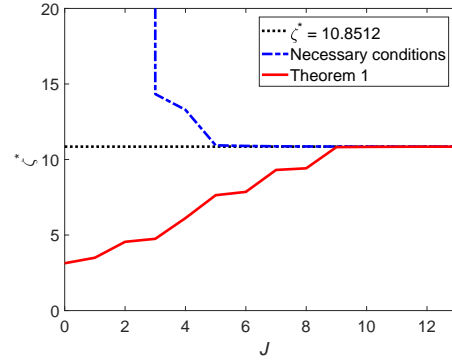


Figura 5: Estimativas de ζ^* para diferentes valores de J no Exemplo 1

5.1 Exemplo 1

Considere o modelo de sistema introduzido em (Chesi, 2013) e utilizado em (de Araujo et al., 2015; Bandeira et al., 2018), com um elemento adicional que depende do parâmetro variante no tempo $\theta(t)$:

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & (2.01) \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) \\ \frac{-1+\theta-\theta^2}{1+\theta} & -1 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

em que $\theta(t) \in [0, \zeta]$. O objetivo é determinar o máximo ζ , denotado ζ^* , tal que a origem seja assintoticamente estável mesmo para uma taxa de variação ilimitada.

Analogamente a (Bandeira et al., 2018), para cada nível de truncamento J , uma estimativa de ζ^* é encontrada por um algoritmo de bisseção em ζ o qual define o domínio Θ . A Fig. 5 ilustra as estimativas de ζ^* fornecidas pelo Teorema 1 para diferentes níveis de truncamento J . As estimativas se aproximam de $\zeta^* = 10,8518$ por baixo conforme J aumenta e para $J \geq 9$ o conservadorismo é quase desprezível. A Fig. 5 também mostra as estimativas de ζ^* que garantem a condição necessária para a estabilidade quadrática de (1), obtidas testando (3)-(4) somente $\forall \theta_i \in \mathcal{D}_{J_i}^\Theta$, e desprezando os resíduos da matriz dinâmica, que resulta em limitantes superiores aos fornecidos pelo Teorema 1. Na Fig. 6, é mostrado que o termo $\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|$ tende a decrescer com o aumento do nível de truncamento J , tendendo a zero assintoticamente. Então, o conservadorismo introduzido pelo algoritmo de discretização e truncamento do Teorema 1 também esvanece assintoticamente.

O Teorema 3 também permite analisar a estabilidade do sistema (29) para valores finitos da derivada paramétrica, como ilustra o próximo exemplo, o que é mais realístico em muitos casos práticos e impossível pelo método de Chesi (2013).

5.2 Exemplo 2

Considere o sistema de segunda ordem translacional do tipo massa-mola-amortecedor descrito a

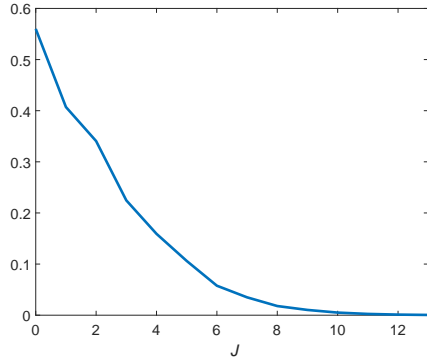


Figura 6: $\max_{\theta_i \in \mathcal{D}_i^\theta} \{\|\tilde{\mathbf{A}}_{\Sigma_\varepsilon}(\theta_i)\|\}$ para o sistema (29)

seguir, em que os estados x_1 e x_2 são, respectivamente, o deslocamento em torno do ponto de equilíbrio (sistema em repouso) e a velocidade da massa m (Pellanda and Apkarian, 2003):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k(\theta)}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Assume-se que $m = 1 \text{ kg}$ e que o coeficiente de fricção viscosa $b = 0.1 \text{ Nsm}^{-1}$ são constantes, enquanto que o coeficiente da mola $k(\theta)$ varia em torno de um valor constante $k_0 = 1 \text{ Nm}^{-1}$:

$$k = k_0 + \frac{\theta(t)}{2} \text{ Nm}^{-1}, \quad \theta(t) = \cos(\omega t) \in [-1, 1].$$

As condições do Teorema 1 com $J = 10$ são satisfeitas para $\theta \in [-0.1996, 0.1996]$, *i.e.* esta gama de variação determina o máximo deslocamento paramétrico para o qual o sistema (30) seria quadraticamente estável considerando taxas de variação arbitrariamente altas ou mesmo ilimitadas ($\rho \rightarrow \infty$). Também, as condições do Teorema 3 com $J = 9$ e $G = 6$ são satisfeitas para $\theta \in [-1, 1]$ e para um ρ máximo denotado $\rho^* = 0.563$, *i.e.* o sistema é quadraticamente estável para o domínio paramétrico admissível inteiro se a condição $|d\theta/dt| \leq 0.563$ for satisfeita.

Na Fig. 7, é mostrado o comportamento dinâmico de $x_1(t)$ para uma condição inicial $x(0) = [1 \ 0]^T$. Nota-se que $|d\theta/dt| = |-\omega \sin(\omega t)| \leq \omega = \rho$ e, para $\omega = 1.762$, o sistema é instável. De fato, o sistema é estável para valores fixos de $\theta \in [-1, 1]$ e para $\omega = \rho \leq 1.761$ para a função particular $\theta(t) = \cos(\omega t)$. O limitante superior $\rho^* = 0.563 < 1.762$ é válido para qualquer dependência paramétrica em $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$. Na Fig. 8, é ilustrada a reconstrução de $P(\theta)$ utilizando (18) e (17) para $J = 9$, $G = 6$, $\theta \in [-1, 1]$ e $\rho = 0.563$ estimado pelo algoritmo do Teorema 3.

6 Conclusões

A base teórica para as caracterizações PLMI introduzidas por de Araujo et al. (2015) e aquelas

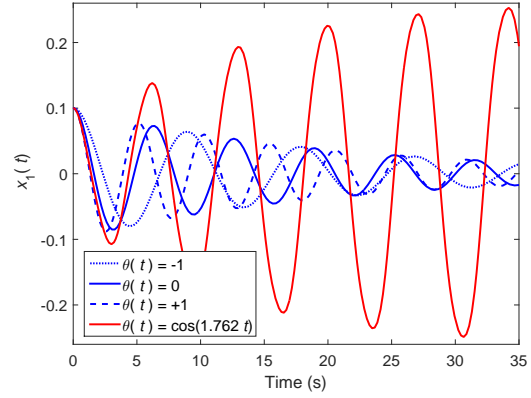


Figura 7: Time responses of system (30) for different values of θ

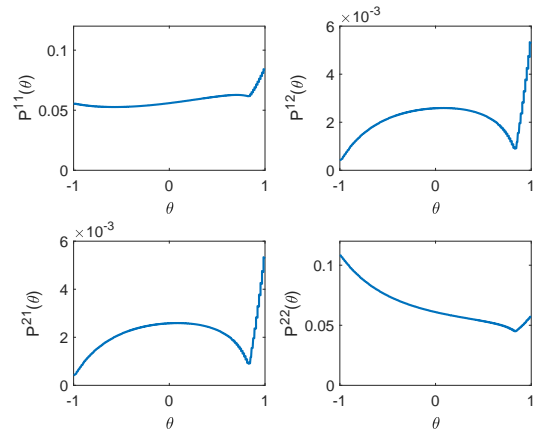


Figura 8: $P(\theta)$ obtained for system (30) with $J = 9$, $G = 6$ and $\rho = 0.563$

apresentadas em (Bandeira et al., 2018) e discutidas neste artigo são similares. Contudo, quando o foco está na implementação computacional, essas técnicas apresentam diferenças significativas, principalmente quando LFDP são consideradas. Este últimos resultados permitem uma abordagem sistemática e numericamente tratável para aplicar a sistemas com qualquer tipo de dependência paramétrica, enquanto que os anteriores requerem análise algébrica particular para cada classe de dependência paramétrica das matrizes de estado. Além disso, múltiplos parâmetros podem ser tratados, mas da mesma forma que para a maioria das técnicas de análise de estabilidade de sistemas LPV, conforme o número de parâmetros aumenta a carga computacional pode se tornar proibitiva. Entretanto, esta dificuldade pode ser superada considerando níveis de truncamento Haar baixos, o que resulta em um maior conservadorismo, pois o método obtém soluções que garantem a estabilidade para qualquer nível de truncamento e, por conseguinte, de conservadorismo.

Finalmente, extensões deste método para análise e síntese de desempenho robusto são objetos de investigação futura.

Agradecimentos

Este trabalho de pesquisa foi apoiado parcialmente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Referências

- Apkarian, P. and Adams, R. J. (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems, *IEEE Trans. Control Syst. Technol.* **6**(1): 21–32.
- Bandeira, P. T., Pellanda, P. C. and de Araujo, L. O. (2018). New Haar-based algorithms for stability analysis of LPV systems, *IEEE Control Systems Letters* **2**(4): 605–610.
- Barmish, B. and Marco, C. D. (1986). A new method for improvement of robustness bounds for linear state equations, *Proc. Conf. Infor. Sci. Sys.*, Princeton University, pp. 115–120.
- Boggess, A. and Narcowich, F. J. (2009). *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, 2 edn, John Wiley & Sons, Inc.
- Burrus, C., Gopinath, R. and Guo, H. (1998). *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms*, Prentice Hall.
- Chesi, G. (2013). Sufficient and necessary conditions for robust stability of rationally time-varying uncertain systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **58**(6): 1546–1551.
- de Araujo, L. O., Pellanda, P. C., Galdino, J. F. and Simoes, A. M. (2015). Haar-based stability analysis of LPV systems, *IEEE Trans. Autom. Control* **60**(1): 192–198.
- Mallat, S. (2009). *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Elsevier.
- Pellanda, P. C. and Apkarian, P. (2003). Synthesis of controllers for modal shaping in linear parameter-varying systems via the implicit model following formulation, *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003.*, Vol. 6, pp. 5161–5166.
- Pellanda, P. C., Simoes, A. M., Apkarian, P. and Alazard, D. (2004). Synthesis of missile gain-scheduled autopilots using an H_∞ -LPV technique with piecewise continuously differentiable parameter dependent Lyapunov functions, *Nonlinear Studies* **11**(2): 243–276.
- Shamma, J. S. (2012). *Control of Linear Parameter Varying Systems with Applications*, Springer, chapter An Overview of LPV Systems, pp. 3–26.
- Vidakovic, B. (1999). *Statistical Modeling by Wavelets*, John Wiley & Sons, Inc.
- Vidyasagar, M. (2002). *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall.
- Wu, F., Yang, X. H., Packard, A. and Becker, G. (1996). Induced L_2 -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates, *Int. J. of Robust Nonlin. Control* **6**(9-10): 983–998.