

PROJETO DE CONTROLADORES VIA ANÁLISE INTERVALAR MODAL EM UM SISTEMA AMORTECEDOR-MASSA-MOLA

ANDRESSA MOURA DE SOUZA, MÁRCIA L. M. PRADO*

**Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Tecnologia
Feira de Santana, Bahia 3161-8000*

Email: andressamoura91@gmail.com, marcia.lissandra@gmail.com

Abstract— This paper presents a Robust Controller Design proposal that considers the parameters of the plant and the control specifications as intervals due to the uncertainties generated in the identification of plant models. The article presents the design of the compensator for a rectilinear system with a cart. The design also makes use of the Modal Interval Analysis and presents the resulting modal intervals related to compensator gains, as well as the graphical response of the compensated system through simulation.

Keywords— control, robust controller, rectilinear system, modal interval.

Resumo— Este artigo apresenta uma proposta de Projeto de Controlador Robusto que considera os parâmetros da planta e as especificações de controle como intervalos, devido às incertezas geradas na identificação do modelo da planta. O artigo apresenta o projeto do compensador para um Sistema Amortecedor-Massa-Mola. O projeto também faz uso da Análise Intervalar Modal e apresenta os intervalos modais resultantes referentes aos ganhos do compensador, além da resposta gráfica do sistema compensado via simulação.

Palavras-chave— controle, controlador robusto, sistema retilíneo, intervalo modal.

1 Introdução

O modelo matemático de uma planta utilizado no projeto de controladores é normalmente obtido experimentalmente e geralmente contém incertezas em sua descrição. Desta forma, faz-se necessária a utilização de métodos de projeto de controladores que também leve em conta incertezas paramétricas (Prado, 2006). Diante deste cenário, é necessário utilizar técnicas de controle robusto que levem em consideração estas incertezas a fim de garantir um sistema com a estabilidade e a resposta esperadas.

A alocação de polos, método de projeto de controle, o qual torna possível o projetista escolher a localização dos polos de malha fechada (Franklin et al., 2013) garante a localização dos polos em malha fechada, mas não garante a estabilidade do sistema e nem as respostas esperadas, diante das variações dos parâmetros da planta.

O sistema o qual este artigo se propõe trabalhar é o conhecido sistema amortecedor-massa-mola. Este tipo de sistema é composto basicamente por três elementos mecânicos, a massa, a mola e o amortecedor viscoso, no qual dois deles são armazenadores de energia, a mola e a massa, e outro dissipador de energia, o amortecedor viscoso. Por meio das equações de movimento e dos parâmetros constante da mola, coeficiente de atrito viscoso e massa é possível controlar força-deslocamento, através das técnicas de controle.

Este artigo apresenta o projeto de um controlador robusto PI&D (com realimentação de velocidade) por meio do método de projeto de alocação de polos, juntamente com as técnicas de análise intervalar modal, no qual os parâmetros nominais

do sistema, ao invés de valores fixos, passam a ser representados por intervalos reais, nos quais, garantidamente, estariam contidos os parâmetros (desconhecidos) da planta (Prado and Paz, 2008).

Já existem trabalhos na literatura que avaliam o uso da análise intervalar clássica com técnicas de projeto de controle robusto, como por exemplo, LMIs (Lordelo and Ferreira, 2002). Em (Prado, 2006), por exemplo, há o estudo sobre os intervalos modais e o projeto de um controlador robusto, mas neste caso não foi viável utilizar as LMIs devido a complexidade da aplicação matemática dos intervalos modais.

Na Seção 2, apresentam-se os conceitos relacionados à análise intervalar modal. Na Seção 3 é descrito o projeto de um controlador PID com realimentação de velocidade (PI&D) e o mesmo projeto aplicando as técnicas de análise intervalar modal. Na Seção 4 são descritos os resultados dos sistemas compensados e os resultados dos projetos, considerando as técnicas de análise intervalar modal. E por fim, na Seção 5, as considerações finais.

2 Análise Intervalar Modal

Um intervalo modal é definido por um par formado pelo intervalo clássico $[x]'$ (Moore, 1979) e um quantificador $Q[x]$ (Sainz et al., 2014),

$$[x] := ([x]', Q[x]).$$

Os quantificadores revelam a modalidade do intervalo, que pode ser:

- Existencial, existe um $x \in [x]'$, com $Q[x] = E$,

- Universal, para todo $x \in [x]'$, com $Q[x] = U$.

Os predicados são condições que podem ser relacionadas a um intervalo. Usa-se a notação especial para relacionar os quantificadores aos predicados (Sainz et al., 2014):

$E(x, [x]')P(x)$ significa: Existe um $x \in [x]'$ tal que o predicado $P(x)$ é satisfeito.

$U(x, [x]')P(x)$ significa: Para todo $x \in [x]'$ o predicado $P(x)$ é satisfeito.

O conjunto dos intervalos modais é definido por (Sainz et al., 2014):

$$I^*(\mathbb{R}) := \{([x]', \{E, U\}) \mid [x]' \in I(\mathbb{R})\}.$$

A notação canônica de intervalos modais é introduzida pela definição:

$$[x] = \begin{cases} ([\underline{x}, \bar{x}]', E) & \text{se } \underline{x} \leq \bar{x}, \\ ([\bar{x}, \underline{x}]', U) & \text{se } \underline{x} \geq \bar{x}. \end{cases}$$

Por exemplo, considere o intervalo $[5, 2]$. Então $ext([2, 5]', U) := [2, 5]'$ e $mod([2, 5]', U) := U$, $inf([2, 5]', U) := 5$ e $sup([2, 5]', U) := 2$.

Os conjuntos “naturais” dos intervalos modais são:

$$Ie(\mathbb{R}) = \{[x] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{x} \leq \bar{x}\},$$

$$Iu(\mathbb{R}) = \{[x] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{x} \geq \bar{x}\},$$

$$Ip(\mathbb{R}) = \{[x] \in I^*(\mathbb{R}) \mid \underline{x} = \bar{x}\}.$$

Um intervalo $[x] \in Ie(\mathbb{R})$ é qualificado como um “intervalo próprio”; um intervalo $[x] \in Iu(\mathbb{R})$, como “impróprio”; um intervalo $[x] \in Ip(\mathbb{R})$, como pontual (Sainz et al., 2014).

2.1 Aritmética Intervalar Modal

Seja $*$ em $\{+, -, \cdot, /\}$ uma operação aritmética em \mathbb{R} , $\underline{a}, \bar{a}, \underline{b}, \bar{b}, r \in \mathbb{R}$. A extensão de $*$ em $I^*(\mathbb{R})$ se define como uma extensão intervalar da função contínua $*(x, y) = x * y$ sobre os intervalos (Sainz et al., 2014).

Abaixo temos as operações de soma e subtração da aritmética intervalar modal (Sainz et al., 2014):

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}];$$

$$[x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}].$$

As operações de multiplicação e divisão, assim como as propriedades da aritmética intervalar são detalhadas em (Sainz et al., 2014).

2.2 Extensões Intervalares Semânticas

Seja f uma função de n variáveis, x_1, x_2, \dots, x_n , contínua em $[x]' \in I(\mathbb{R}^n)$. Define-se a imagem de f por:

$$R_f([x]') := \min_{x \in [x]'^0} f(x), \max_{x \in [x]'^0} f(x) \quad \#$$

Calcular $R_f([x]')$ pode ser complexo e quando f é uma função racional, então, podemos obter de forma rápida e simples a extensão intervalar racional de f em $[x]'$, $f_R([x]')$, em vez de $R_f([x]')$. Para isto, basta substituir os argumentos escalares da função por intervalos e as operações reais por operações intervalares (Sainz et al., 2014). Temos que $R_f([x]') \subseteq f_R([x]')$ e o significado para $Z := f_R([x]')$ é

$$U(x_1 \in [x_1]') \dots U(x_n \in [x_n]') E(z \in Z), \\ z = f(x_1, \dots, x_n).$$

Assim como nos conceitos de predicado real $P(x)$ leva a um predicado $Q(x, [x])P(x)$, a relação $z = f(x_1, \dots, x_n)$ deve levar à relação intervalar $Z = F([x_1], \dots, [x_n])$ representando um predicado da forma

$$Q_1(x_1 \in [x_1]) \dots Q_n(x_n \in [x_n]),$$

$$Q_z(z \in F([x_1], \dots, [x_n])) z = f(x_1, \dots, x_n).$$

A função $F : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ é chamada de extensão semântica intervalar de f .

Definição 2.1 Seja f uma função contínua de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} , $[x] \in I^*(\mathbb{R}^n)$, e (x_p, x_i) componentes de separação de $[x] = ([x_p], [x_i])$, com $[x_p]$ um subvetor contendo as componentes próprias de $[x]$ e $[x_i]$ as componentes impróprias de $[x]$. Definem-se as extensões intervalares semânticas modais f^* e f^{**} de f em $[x]$ por meio das expressões abaixo (Sainz et al., 2014):

$$f^*([x]) = \min_{x_p \in [x_p]^0} \max_{x_i \in [x_i]^0} f(x_p, x_i) \quad \# \\ \max_{x_p \in [x_p]^0} \min_{x_i \in [x_i]^0} f(x_p, x_i) \quad \# \quad (1)$$

$$f^{**}([x]) = \max_{x_i \in [x_i]^0} \min_{x_p \in [x_p]^0} f(x_p, x_i) \quad \# \\ \min_{x_i \in [x_i]^0} \max_{x_p \in [x_p]^0} f(x_p, x_i) \quad \# \quad (2)$$

Relações de inclusão entre $f^*([x])$ e $f^{**}([x])$ (Prado, 2006):

- $f^*([x]) \subseteq f^{**}([x])$;
- $[x] \subseteq [y] \Rightarrow f^*([x]) \subseteq f^*([y])$, $f^{**}([x]) \subseteq f^{**}([y])$.

Caso f seja unimodal no intervalo $[x]$, e $[x]$ for um intervalo próprio, as extensões são iguais e com $f^* = f^{**} = R_f([x])$ (Prado, 2006).

2.3 Teoremas Semânticos

Os Teoremas Semânticos 2.1 e 2.2 têm como objetivo atribuir predicados aos resultados de cálculos intervalares a partir das extensões semânticas f^* e f^{**} , que por sua vez estão associadas à extensão semântica F (Sainz et al., 2014).

Teorema 2.1 (Teorema Semântico para f^*)
Se $[x] \in I^*(\mathbb{R}^n)$, f for contínua em $[x]'$ e $F[x] \in I^*(\mathbb{R})$, então $f^*([x]) \subseteq F([x])$ se e somente se (Sainz et al., 2014):

$$U(x_p, [x_p]')Q(z, F([x]))E(x_i, [x_i]') \\ (z = f(x_p, x_i)).$$

Teorema 2.2 (Teorema Semântico para f^{**}).
Se $[x] \in I^*(\mathbb{R}^n)$, f for contínua em $[x]'$ e $F[x] \in I^*(\mathbb{R})$, então $f^{**}([x]) \supseteq F([x])$ se e somente se (Sainz et al., 2014):

$$U(x_i, [x_i]')Q(z, \text{dual}(F([x])))E(x_p, [x_p]') \\ (z = f(x_p, x_i)).$$

Os Teoremas 2.1 e 2.2 estabelecem condições gerais para extensões $F : I^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow I^*(\mathbb{R})$ em termos das semânticas $f^*([x])$ ou $f^{**}([x])$, mas não indicam como elas são calculadas (Prado and Paz, 2008).

2.4 Extensões Racionais Modais

Realizar o cálculo de f^* e f^{**} não é algo simples e normalmente determinam-se aproximações internas de f^* e externas de f^{**} que matemam as interpretações semânticas dos Teoremas 2.1 e 2.2.

Definição 2.2 Seja f uma função contínua racional no domínio $[x]'$. A extensão definida pela sequência de operações e indicada pela sintaxe de f é chamada de extensão racional modal, $f_{\mathcal{R}}([x])$ (Sainz et al., 2014).

Teorema 2.3 Se em $f_{\mathcal{R}}([x])$ todos os argumentos forem uniincidentes então (Sainz et al., 2014)

$$f^*([x]) \subseteq f_{\mathcal{R}}([x]) \subseteq f^{**}([x]).$$

E caso os argumentos, além de uniincidentes, possuam a mesma modalidade:

$$f^*([x]) = f_{\mathcal{R}}([x]) = f^{**}([x]).$$

3 Projeto do Compensador para um Sistema Amortecedor-Massa-Mola

3.1 Modelagem do Sistema

Dado o sistema retilíneo da ECP System (Ecpsystems, 2017) da Figura 1.

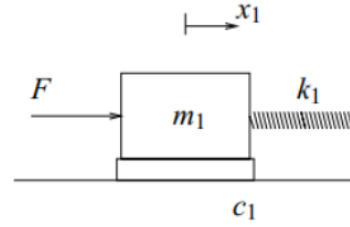


Figura 1: Planta do Sistema Amortecedor-Massa-Mola (Ecpsystems, 2017).

Este sistema tem o objetivo de deslocar linearmente a massa m_1 da sua posição inicial 0 m até a posição final x_1 . Para a configuração acima descrita, a EDO, bem como a função de transferência da planta são dados por:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 = F(t), \quad (3)$$

$$G_p(s) = \frac{K_{hw}}{m_1 s^2 + c_1 s + k_1} = \frac{X_1(s)}{F(s)}. \quad (4)$$

onde,

- K_{hw} (ganho de hardware) = 14732 N/m,
- m_1 (massa) = 1,2780 Kg,
- c_1 (atrito viscoso do sistema) = 2,94 N/m/seg,
- k_1 (constante de mola da mola media) = 338,6 N/m,
- F (força aplicada através do motor),
- X_1 (posição final da massa m_1).

De acordo com as especificações, a massa m_1 deverá percorrer a distância x_1 de 0,01m e a resposta do sistema deverá ter uma sobrelevação máxima de 20%, tempo de estabelecimento de 0,5 segundos e ainda apresentar erro de regime nulo.

3.2 Projeto do Compensador PI^λD

A planta a ser controlada é um sistema do Tipo 0, ou seja, sem integradores no sistema em malha fechada. Desta forma, o uso de um Controlador PID com realimentação de velocidade foi suficiente para compensar este sistema.

Na Figura 2 é mostrada a entrada r . Esta entrada é uma referência para a distância que a massa m_1 deverá percorrer. E a variável x_1 se refere à posição real em qualquer instante t da massa m_1 .

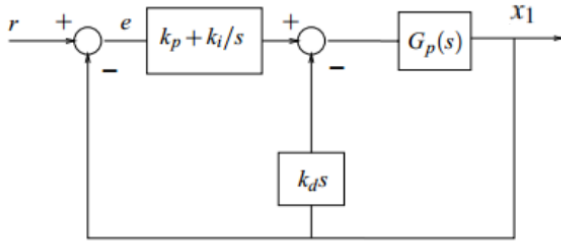


Figura 2: Diagrama de Blocos do Sistema em Malha Fechada com Controlador PI&D.

Na Figura 2, $G_p(s)$, que é descrita na equação 4, representa a planta do sistema retilíneo da ECP System (Ecpystems, 2017) e a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$G(s) = \frac{G_p(s)(K_p + \frac{K_i}{s})}{1 + G_p(s)(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s)}. \quad (5)$$

A partir das especificações relacionadas à resposta transitória, a máxima sobrelevação M_p e o tempo de estabelecimento t_s , é possível encontrar valores de ξ e ω_n (Ogata, 2010) no intuito de alocar os polos dominantes do sistema de acordo com às especificações.

$$M_p = e^{-\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad (6)$$

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n}. \quad (7)$$

Desta forma, pode-se adotar os valores de ξ igual a 0,6 e ω_n de 14 rad/s, os quais permitem uma sobrelevação de 9,4780% e tempo de estabelecimento de 0,3571 segundos, teoricamente.

Neste projeto o modelo do sistema retilíneo será controlado com um PI&D, cujos ganhos são obtidos pelo método de alocação de polos (Nise, 2002).

Ao obter as equações do numerador e do denominador de $G(s)$, notou-se que o sistema compensado é de ordem 3 contendo 3 polos e 1 zero. O polo adicional p foi alocado em $-15,7$, pois o zero adicional estava situado em $-15,8$, para que houvesse o cancelamento deste polo com este zero. Desta forma, foi possível dar ao sistema em malha fechada uma aproximação de ordem 2.

A equação característica da função de transferência $G(s)$ pode ser escrita da seguinte maneira,

$$(s+p)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2), \\ = (s^3 + (p+2\xi\omega_n)s^2 + (2\xi\omega_n + \omega_n^2)s + \omega_n^2 p). \quad (8)$$

Ao comparar a equação 8 com a equação característica de $G(s)$, que é o denominador da equação 5, é possível obter os valores de ganho de K_p , K_d e K_i como mostram as equações abaixo,

$$K_p = \frac{(2\xi\omega_n p + \omega_n^2) \cdot m_1 - k_1}{K_{hw}}, \quad (9)$$

$$K_d = \frac{(p + 2\xi\omega_n) \cdot m_1 - c_1}{K_{hw}}, \quad (10)$$

$$K_i = \frac{\omega_n^2 p m_1}{K_{hw}}. \quad (11)$$

3.3 Projeto de Compensador PI&D via Análise Intervalar Modal

Considerando a função de transferência do sistema na equação 4, obtém-se os valores nominais da planta (K_{hw} , m_1 , c_1 e k_1) e varia-se estes valores nominais em 10% para se obter os limites dos intervalos, sendo que estes intervalos representam os intervalos de possíveis variações das incertezas dos parâmetros da planta. Assim, para $K_{hw} = 14732$, $m_1 = 1,2780$, $c_1 = 2,9$ e $k_1 = 338,6$; seus intervalos clássicos correspondem a $[K_{hw}]' = [13258, 8, 16205, 2]'$, $[m_1]' = [1, 1502, 1, 4058]'$, $[c_1]' = [2, 646, 3, 234]'$ e $[k_1]' = [304, 74, 372, 46]'$.

Adotam-se os intervalos referentes aos parâmetros da planta como universais para que $\forall K_{hw} \in [K_{hw}]$, $\forall m_1 \in [m_1]$, $\forall c_1 \in [c_1]$ e $\forall k_1 \in [k_1]$, a fim de garantir que para qualquer valor dentro do intervalo dos parâmetros da planta, seja possível projetar o controlador. Ou seja, deve-se considerar os intervalos dos parâmetros da planta como intervalos próprios.

Ao invés do uso de valores pontuais de ξ e ω_n , pode-se utilizar intervalos de ξ e ω_n variando em 10% o seu valor nominal de especificação para mais e para menos para serem utilizados como extremos do intervalo clássico. Sendo assim, para $\xi = 0,6$ e $\omega_n = 14$ rad/s seus intervalos clássicos correspondentes se tornam $[\xi]' = [0, 54, 0, 66]'$ e $[\omega_n]' = [12, 6, 15, 4]'$.

Os intervalos referentes aos valores de ξ e ω_n são considerados impróprios e são tratados como existenciais para que $\exists \xi \in [\xi]$ e $\exists \omega_n \in [\omega_n]$, ou seja, para que exista um valor de ξ e ω_n dentro do intervalo que resulte em valores de ganho que compensem o sistema de tal forma que ele consiga atender às especificações.

Definem-se então os intervalos modais do sistema:

- $[K_{hw}] = ([13258, 8, 16205, 2]', U) \in I^*(\mathbb{R})$,
- $[m_1] = ([1, 1502, 1, 4058]', U) \in I^*(\mathbb{R})$,
- $[c_1] = ([2, 646, 3, 234]', U) \in I^*(\mathbb{R})$,
- $[k_1] = ([304, 74, 372, 46]', U) \in I^*(\mathbb{R})$,
- $[\xi] = ([0, 54, 0, 66]', E) \in I^*(\mathbb{R})$,
- $[\omega_n] = ([12, 6, 15, 4]', E) \in I^*(\mathbb{R})$.

Para se obter as extensões semânticas intervalares, substitui-se os valores nominais dos parâmetros e das especificações das equações 9, 10 e 11 pelos intervalos modais, respectivamente. Assim, temos

$$[K_p] = \frac{(2[\xi][\omega_n]p + [\omega_n^2]) \cdot [m_1] - [k_1]}{[K_{hw}]}, \quad (12)$$

$$[K_d] = \frac{(p + 2[\xi][\omega_n]) \cdot [m_1] - [c_1]}{[K_{hw}]}, \quad (13)$$

$$[K_i] = \frac{[\omega_n^2]p[m_1]}{[K_{hw}]}. \quad (14)$$

Ao desenvolver as equações por meio das propriedades e operações da aritmética intervalar modal (Sainz et al., 2014), obtém-se as extensões semânticas intervalares dos ganhos, como:

Para o ganho K_p :

$$[K_p] = \frac{(2\underline{\xi}\underline{\omega}_n p + \underline{\omega}_n^2) \cdot \underline{m}_1 - \underline{k}_1}{\underline{K}_{hw}}, \quad (15)$$

$$\frac{(2\bar{\xi}\bar{\omega}_n p + \bar{\omega}_n^2) \cdot \bar{m}_1 - \bar{k}_1}{\bar{K}_{hw}},$$

para o ganho K_d :

$$[K_d] = \frac{(p + 2\underline{\xi}\underline{\omega}_n) \cdot \underline{m}_1 - \underline{c}_1}{\underline{K}_{hw}}, \quad (16)$$

$$\frac{(p + 2\bar{\xi}\bar{\omega}_n) \cdot \bar{m}_1 - \bar{c}_1}{\bar{K}_{hw}},$$

e para o ganho K_i :

$$[K_i] = \frac{[\omega_n^2] \cdot p \cdot \underline{m}_1}{\underline{K}_{hw}}, \frac{[\omega_n^2] \cdot p \cdot \bar{m}_1}{\bar{K}_{hw}}. \quad (17)$$

Como há multi-incidência de variáveis no cálculo dos ganhos, deve-se fazer uso do Teorema 2.3. Seja $[\omega_n]$ o vetor intervalar e f_R definida no domínio de $[\omega_n]'$. A incidência da variável ω_n com relação à equação 15 é considerada isotônica, pois a derivada da equação 15 em relação a ω_n é positiva no domínio de $[\xi]'$, $[\omega_n]'$, $[c_1]'$, $[m_1]'$ e $[K_{hw}]'$, além da derivada parcial em relação a cada multi-incidência de ω_n ser positiva no domínio de $[\xi]'$, $[\omega_n]'$, $[c_1]'$, $[m_1]'$ e $[K_{hw}]'$. De acordo com o Teorema 2.3, $f^*([\omega_n]) = fR([\omega_n d]) = f^{**}([\omega_n])$.

O intervalo resultante obtido para os parâmetros de ganho do controlador influenciará na semântica do resultado, ou seja, se os intervalos forem próprios, existirá um ganho no intervalo que satisfaz à equação. Caso o intervalo resultante seja impróprio, qualquer valor de ganho satisfará a equação.

4 Resultados

4.1 Resposta do Sistema - Projeto do Compensador PI&D Convencional

A partir da variável p , dos parâmetros nominais da planta (K_{hw} , m_1 , c_1 , k_1) e das especificações

(ξ , ω_n) do sistema, obtém-se os resultados das equações 9, 10 e 11 com $K_p = 0,0173$, $K_i = 0,2720$ e $K_d = 0,0026$.

A Figura 3 mostra uma planta clássica de um sistema amortecedor-massa-mola que é facilmente transformado numa variedade de configurações. Esta planta é composta por um servo atuador (motor DC), capaz de gerar a força F de acionamento da planta, cujo valor máximo de atuação é de $8N$, segundo as especificações da (Ecpsystems, 2017).

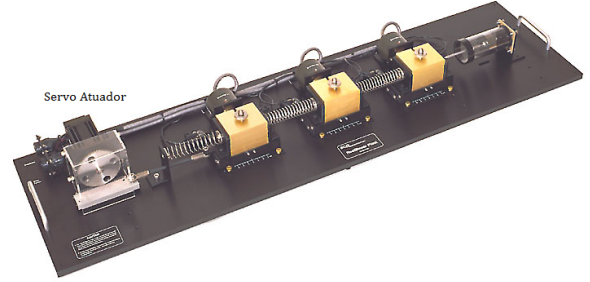


Figura 3: ECP Modelo 210 - Sistema Retilíneo.

A Figura 4 apresenta o esforço do sinal de controle. Nota-se que o sinal de controle chega ao máximo em $0,024N$ de amplitude, ou seja, um sinal pequeno quando comparado ao valor máximo que o sinal do atuador pode atingir, que é $8N$.

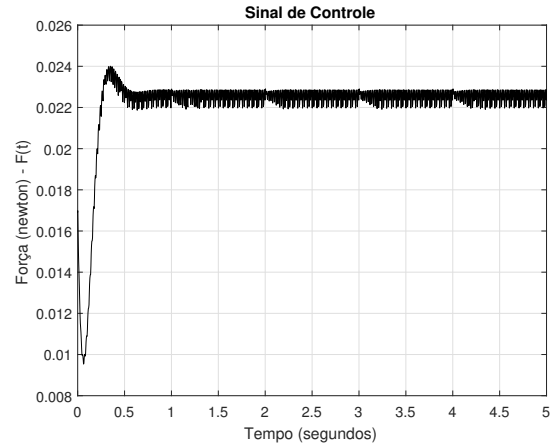


Figura 4: Esforço do Sinal de Controle do Sistema Amortecedor-Massa-Mola.

A Figura 5 mostra a resposta da saída x_1 do sistema compensado. Nota-se que o sistema compensado atende às especificações, apresentando uma sobrelevação máxima de 9% e tempo de estabelecimento menor que 0,5 segundos, resultados estes bastante satisfatórios.

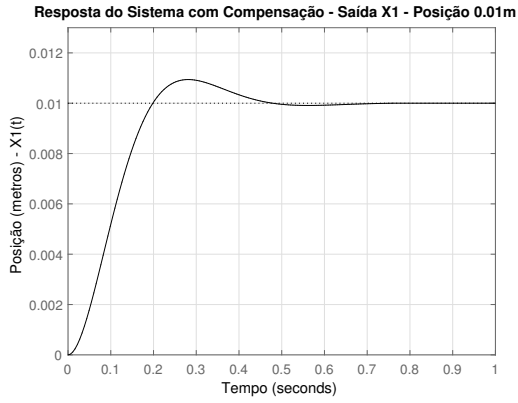


Figura 5: Resposta da Saída x_1 do Sistema Amortecedor-Massa-Mola e com Compensador para a Posição 0,01m.

4.2 Resposta do Sistema - Projeto do Compensador PI&D via Análise Intervalar Modal

Considerando as equações semânticas 12, 13 e 14 e os intervalos modais $([K_{hw}], [m_1], [c_1], [k_1], [\xi], [\omega_n])$ e por meio das propriedades e operações de aritmética intervalar modal (Sainz et al., 2014), os resultados obtidos foram $[K_p] = [0, 0169, 0, 0169]$, $[K_i] = [0, 2693, 0, 2693]$ e $[K_d] = [0, 0029, 0, 0024]$.

De acordo com o Teorema 2.2, a semântica referente à equação 14 é dada por:

$$E(\xi, [\xi]')E(\omega_n, [\omega_n]')U(m_1, [m_1]')U(c_1, [c_1]'),$$

$$U(K_{hw}, [K_{hw}]')U(K_d, [K_d]'),$$

$$K_d = \frac{(p + 2\xi\omega_n) \cdot m_1 - c_1}{K_{hw}},$$

isto é, para qualquer valor de K_d dentro do intervalo $[K_d]$, existirá um valor dentro do intervalo $[\omega_n]'$ e do intervalo $[\xi]'$ que satisfaz à equação 14, para qualquer valor de m_1 , c_1 e K_{hw} , variados em 10% para mais ou para menos.

Para os resultados da simulação, inicialmente selecionou-se os valores máximo, médio e mínimo de cada um dos intervalos dos parâmetros nominais da planta $([K_{hw}], [m_1], [c_1]$ e $[k_1])$, do intervalo do ganho $[K_d]$ e com $K_p = 0, 0169$ e $K_i = 0, 2693$.

Abaixo são apresentados os valores máximo, médio e mínimo dentro dos intervalos de $[K_{hw}]$, $[m_1]$, $[c_1]$, $[k_1]$ e $[K_d]$.

- valores máximos: $K_{hw} = 18205, 2$; $m_1 = 1, 278$; $c_1 = 3, 234$; $k_1 = 372, 46$; $kd = 0, 0029$;
- valores médios: $K_{hw} = 14732$; $m_1 = 1, 4058$; $c_1 = 2, 94$; $k_1 = 338, 6$; $kd = 0, 0026$;
- valores mínimos: $K_{hw} = 13258, 8$; $m_1 = 1, 1502$; $c_1 = 2, 646$; $k_1 = 304, 74$; $kd = 0, 0024$;

Pôde-se gerar todas as respostas do sistema compensado a partir dos valores máximo, médio e mínimo dentro dos intervalos de $[K_{hw}]$, $[m_1]$, $[c_1]$, $[k_1]$ e $[K_d]$. Para isto, permutou-se estes valores a fim de se obter todas as respostas do sistema compensado em malha fechada possíveis a partir destes dados.

A Figura 6 mostra as respostas do sistema compensado para diferentes conjuntos de parâmetros nominais da planta e ganhos. A figura mostra que a máxima sobrelevação é de 20% dada pela saída $X_{1(237)}$, a qual atende às especificações do sistema. Nota-se também que todas as saídas possuem tempo de estabelecimento menor que 0,5 segundos.

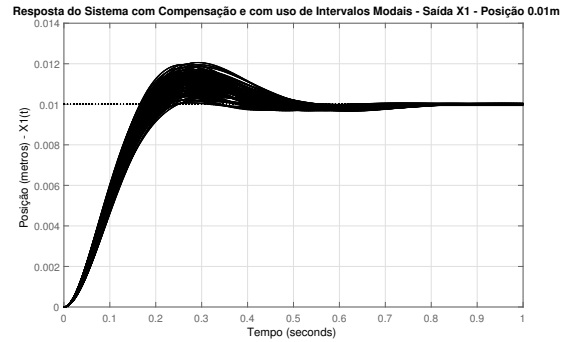


Figura 6: Resposta da Saída x_1 do Sistema Compensado com o uso de Intervalos Modais para a Posição $x_1 = 0, 01m$.

A partir dos valores máximo, médio e mínimo dentro dos intervalos de $[K_{hw}]$, $[m_1]$, $[c_1]$, $[k_1]$ e $[K_d]$, obteve-se também o esforço de controle do sistema compensado, como mostra a Figura 7. Nota-se que todos os sinais de controle referentes à todas as saídas do sistema com o controlador robusto se encontram bastante satisfatórios e apresentando baixa amplitude quando comparado ao valor máximo que o sinal do atuador pode atingir, que é 8N.

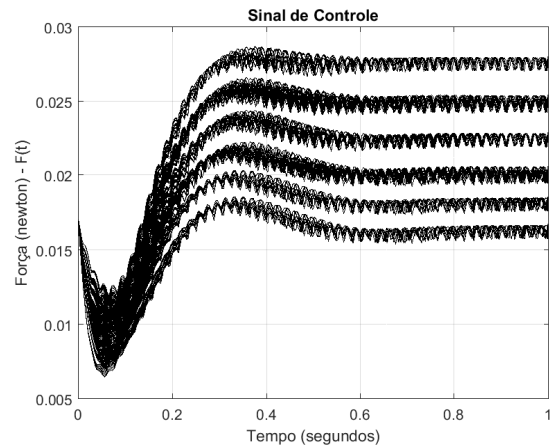


Figura 7: Sinal de Controle do Sistema com o Controlador Robusto com o uso de Intervalos Modais.

