

# PROJETO DE CONTROLE $\mathcal{H}_2$ DE SISTEMAS LINEARES COM COMUTAÇÃO: UMA ABORDAGEM BASEADA EM FUNÇÃO DE LYAPUNOV VARIANTE NO TEMPO

HELDER R. DAIHA\*, GRACE S. DEAECTO\*

\**Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP  
13083-860, Campinas, São Paulo, Brasil*

Emails: daiha@fem.unicamp.br, grace@fem.unicamp.br

**Abstract**— This paper treats the control design of an output dependent switching function for discrete-time switched linear systems without considering any additional dynamical structure. The conditions are based on a convex but time-varying Lyapunov function and are expressed in terms of Linear Matrix Inequalities (LMIs). The state feedback control design can be obtained as a particular case and is simpler to handle from theoretical and numerical viewpoints compared to other methods available in the literature, as for instance, those based on Lyapunov-Metzler inequalities. The novelty is the adoption of a time-varying Lyapunov-function associated with important concepts of dynamic programming, which together with the presence of a key matrix allow us to treat the static output feedback control, taking into account a guaranteed  $\mathcal{H}_2$  performance index. The efficiency and validity of the control technique are illustrated by means of an academical example.

**Keywords**— Switched linear systems, time-varying Lyapunov function, discrete-time domain.

**Resumo**— Este artigo trata do projeto de controle de uma função de comutação dependente da saída, sem considerar qualquer estrutura dinâmica adicional, para sistemas lineares com comutação a tempo discreto. As condições são baseadas em uma função de Lyapunov convexa, mas variante no tempo e são expressas em termos de desigualdades matriciais lineares. O projeto de controle via realimentação de estado pode ser obtido como um caso particular sendo mais simples de lidar dos pontos de vista teórico e numérico quando comparado a outros métodos disponíveis na literatura, como por exemplo, aqueles baseados em desigualdades de Lyapunov-Metzler. A novidade é a adoção de uma função de Lyapunov variante no tempo associada a conceitos importantes de programação dinâmica, que junto com a presença de uma matriz particular nos permite tratar o controle via realimentação estática de saída, levando em conta um custo garantido  $\mathcal{H}_2$ . A eficiência e a validade da técnica de controle são ilustradas por um exemplo acadêmico.

**Palavras-chave**— sistemas lineares com comutação, função de Lyapunov variante no tempo, domínio de tempo discreto.

## 1 Introdução

O empenho da comunidade científica em estudar sistemas com comutação tem aumentado nas últimas décadas. Os livros (Liberzon, 2003) e (Sun and Ge, 2005) e os artigos (Liberzon and Morse, 1999), (Lin and Antsaklis, 2009) e (Shorten et al., 2007) são referências básicas sobre o assunto. O interesse neste tema justifica-se pela sua importância teórica e diversas aplicações práticas, tais como controle em rede (Deaecto et al., 2015), sistemas embarcados (Song et al., 2008), eletrônica de potência (Cardim et al., 2009), mutação viral no tratamento de HIV (Hernandez-Vargas et al., 2011), amortecimento de vibração em estruturas (Blanchini et al., 2012) e várias outras.

No contexto geral, sistemas com comutação podem ser classificados como sistema dinâmico compostos por um número finito de subsistemas e uma regra de comutação que os governa. Esta regra pode atuar como uma perturbação ou como uma variável de controle cuja a finalidade é assegurar estabilidade e desempenho do sistema global (Geromel and Colaneri, 2006). Para o caso em que a regra atua como variável de controle, a literatura fornece condições suficientes para estabilidade, como apresentado em (Deaecto, 2016) para sistemas afins com comutação, em (Deaecto et al., 2015) para sistemas line-

ares com dados amostrados e (Geromel and Colaneri, 2006; Fiacchini and Jungers, 2014; Fiacchini et al., 2016; Zhai, 2001) para sistemas lineares a tempo discreto. No que se refere a esta última classe de sistemas, as condições propostas em (Geromel and Colaneri, 2006) são baseadas em desigualdades de Lyapunov-Metzler que são não convexas devido ao produto de variáveis matriciais e, portanto, difíceis de resolver. A referência (Fiacchini and Jungers, 2014) propõe condições necessárias e suficientes para estabilizabilidade, baseadas em teoria de conjuntos que, infelizmente, podem ser inviáveis computacionalmente pois exigem verificar se um conjunto particular está contido na união de outros. Para contornar este problema, em (Fiacchini et al., 2016) os mesmos autores apresentam condições suficientes para a estabilizabilidade que combinam generalidade de solução com viabilidade computacional. Estas condições foram generalizadas em (Fiacchini and Tarbouriech, 2017) para tratar o projeto conjunto de ganhos de realimentação de estado e uma função de comutação, mas sem levar em conta qualquer critério de desempenho. Nesta direção podemos também citar as condições propostas em (Zhang et al., 2009; Zhang et al., 2012; Antunes and Heemels, 2017), as duas últimas levando em conta o projeto de um regulador linear quadrático.

Este artigo propõe condições suficientes para

o projeto de uma função de comutação dependente da saída para sistemas lineares com comutação a tempo discreto baseadas na adoção de uma função de Lyapunov convexa, mas variante no tempo. Estas condições são descritas em termos de desigualdades matriciais lineares, do inglês Linear Matrix Inequalities (LMIs), e contêm o projeto de controle via realimentação de estado como caso particular. Este último é baseado em condições mais fáceis de resolver do que outras técnicas de controle disponíveis na literatura, como por exemplo, aquelas descritas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler. Além disso, para uma escolha particular da matriz utilizada na regra de comutação é possível recuperar os resultados recentes disponíveis em (Deaecto and Geromel, 2018) que trata exclusivamente o caso de realimentação de estado. A técnica de controle é validada por meio de um exemplo acadêmico.

A notação utilizada é padrão. Para matrizes quadradas  $\text{Tr}(\cdot)$  denota a função traço. Para vetores e matrizes reais,  $(\cdot)'$  representa o transposto. O conjunto dos números reais e naturais são representados por  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{N}$ , respectivamente. Para uma matriz simétrica real,  $X > 0$  ( $X \geq 0$ ) denota que a matriz é positiva (semi)definida. O conjunto  $\mathbb{K}$  é definido como  $\mathbb{K} = \{1, \dots, N\}$ . O simplex unitário denotado por  $\Lambda$  é composto por vetores não-negativos tais que  $\sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j = 1$ . A combinação convexa de matrizes  $\{X_1, \dots, X_N\}$  é denotada por  $X_\lambda = \sum_{j \in \mathbb{K}} \lambda_j X_j$ , para  $\lambda \in \Lambda$ . A norma ao quadrado de uma trajetória  $z(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , é  $\|z\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} z(n)'z(n)$ . O conjunto de todas as trajetórias tais que  $\|z\|_2^2 < \infty$  é denotado por  $\mathcal{L}_2$ . O maior número inteiro menor ou igual a  $a$  é  $\lfloor a \rfloor$ . Para uma sequência periódica  $f(n)$  com período  $0 < \kappa \in \mathbb{N}$ , o termo genérico  $m_n = \kappa \lfloor n/\kappa \rfloor$  indica o índice do primeiro elemento da  $(\lfloor n/\kappa \rfloor + 1)$ -ésima sequência no intervalo  $[0, n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $f(n) = f(n - m_n)$ . Uma matriz quadrada é Schur estável se todos os seus autovalores pertencem à região  $|z| < 1$  do plano complexo.

## 2 Formulação do problema

Considere o seguinte sistema com comutação

$$x(n+1) = A_\sigma x(n) + H_\sigma w(n) \quad (1)$$

$$z(n) = E_\sigma x(n) + G_\sigma w(n) \quad (2)$$

$$y(n) = C_\sigma x(n) \quad (3)$$

definido para  $n \in \mathbb{N}_- = \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , no qual  $x \in \mathbb{R}^{n_x}$  é o estado,  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  é a entrada externa do tipo impulsiva  $w(n) = \delta(n+1)e_r$ , com  $e_r$  sendo a  $r$ -ésima coluna da matriz identidade,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  e  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  são as saídas controlada e medida, respectivamente, e  $\sigma(\cdot)$  é a função de comutação que seleciona a cada instante de tempo um dos  $N$  subsistemas disponíveis. Assumimos que a matriz de saída  $C_i$ ,  $i \in \mathbb{K}$ , possui posto completo de linhas

e que o sistema evolui de condições iniciais nulas  $x(-1) = 0$ .

Nosso objetivo é projetar uma função de comutação  $\sigma(y) : \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{K}$  de forma a assegurar estabilidade exponencial, definida em (Fiacchini et al., 2016), e um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$  definido em (Geromel et al., 2008) como:

$$J_2(\sigma) = \sum_{r=1}^{n_w} \|z_r\|_2^2 + e_r' G_\sigma' e_r \quad (4)$$

no qual  $z_r(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_-$  é a saída controlada correspondente à entrada impulsiva  $w(n) = \delta(n+1)e_r$ . Posteriormente, desejamos obter condições para o projeto de uma regra de comutação  $\sigma(x) : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{K}$  para o caso particular em que todos os estados estão disponíveis, ou seja,  $C_i = I$  e comparar o resultado com outros da literatura.

Segundo o conhecimento dos autores, a regra de comutação  $\sigma(y)$  foi apresentada pela primeira vez em (Júnior et al., 2015) no contexto de controle robusto de sistemas lineares com comutação. Nesta referência, as funções de Lyapunov adotadas são invariantes no tempo, exigindo que a matriz de saída medida seja independente de índice, ou seja,  $C_i = C$ ,  $\forall i \in \mathbb{K}$ , de maneira a evitar condições muito conservadoras. Como ficará claro em seguida a técnica aqui proposta não impõe esta restrição. No que se refere ao controle via realimentação de estado, a referência (Deaecto et al., 2015) apresenta condições  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  expressas em termos de desigualdades de Lyapunov-Metzler que são de natureza não convexa e, portanto, difíceis de resolver para mais de três subsistemas. Uma maneira de contornar esta dificuldade numérica é considerar condições mais conservadoras porém mais simples de resolver, obtidas a partir de matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal, detalhes sobre estas desigualdades estão disponíveis em (Geromel and Colaneri, 2006) e (Deaecto et al., 2015). Condições de projeto  $\mathcal{H}_2$  baseadas em uma função de Lyapunov variante no tempo foram propostas pela primeira vez em (Deaecto and Geromel, 2018). A vantagem destas condições é que elas são descritas em termos de LMIs e podem fornecer soluções para o caso em que as desigualdades clássicas de Lyapunov-Metzler são infactíveis. Na verdade, elas são um caso particular de desigualdades de Lyapunov-Metzler variantes no tempo, como mostrado em (Daiha et al., 2017). O presente artigo propõe condições alternativas às apresentadas em (Deaecto and Geromel, 2018), que trata exclusivamente o caso de realimentação de estado. Nossa principal contribuição é presença de uma matriz utilizada na regra de comutação que torna possível tratar casos mais gerais como por exemplo, aqueles envolvendo realimentação estática e dinâmica de saída além de proporcionar uma eventual melhoria no desempenho efetivo do sistema.

### 3 Projeto da regra de comutação

Nesta seção são apresentadas condições para o projeto de uma regra de comutação dependente da saída  $\sigma(y)$  levando em conta um índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ . Note, como já discutido em (Geromel et al., 2008), que o sistema (1)-(3) com a entrada de perturbação  $w(n) = \delta(n+1)e_r$  e condição inicial nula  $x(-1) = 0$  pode ser reescrito como:

$$x(n+1) = A_\sigma x(n), \quad x(0) = H_{\sigma(-1)} e_r \quad (5)$$

$$z(n) = E_\sigma x(n) \quad (6)$$

$$y(n) = C_\sigma x(n) \quad (7)$$

definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Antes de apresentar os resultados principais, algumas definições retiradas de (Deaecto and Geromel, 2018) são de suma importância. Para um escalar positivo  $\kappa \in \mathbb{N}$ , denota-se  $\mathfrak{C}(\kappa)$  o conjunto formado por todas as possíveis combinações dos índices  $\{1, \dots, N\}$  cada um com  $\kappa$  elementos, ou seja,  $N^\kappa$  combinações. Neste a  $\ell$ -ésima combinação é denotada por  $\mathfrak{C}_\ell(\kappa)$  e o  $n$ -ésimo elemento de  $\mathfrak{C}_\ell(\kappa)$  é denotado por  $i(n) \in \mathfrak{C}_\ell(\kappa)$  para cada  $0 \leq n \leq \kappa - 1$ . Apresentadas estas definições, o próximo teorema fornece os resultados principais desta seção.

**Teorema 1** *Dado um escalar positivo  $\kappa \in \mathbb{N}$ , assumindo que existam matrizes simétricas  $P(n) > 0$ ,  $U(n)$  e  $R_i(n)$  solução do seguinte problema de otimização*

$$J_2(\sigma) < \min_{\ell \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr}(H'_q P(0) H_q + G'_q G_q) \quad (8)$$

sujeito a

$$A'_i P(n+1) A_i - P(n) + E'_i E_i < U(n) + C'_i R_i(n) C_i \quad (9)$$

$$U(n) + C'_{i(n)} R_{i(n)}(n) C_{i(n)} < 0 \quad (10)$$

com  $\Psi$  sendo o conjunto solução  $\Psi = \{P(n), R_i(n), U(n)\}$ ,  $q = \sigma(-1)$ ,  $i \in \mathbb{K}$ ,  $n = 0, \dots, \kappa - 1$ ,  $i(n) \in \mathfrak{C}_\ell(\kappa)$  e com as condições de contorno  $P(0) = P(\kappa) > 0$ . Então a função de comutação dependente da saída

$$\sigma(y(n)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} y(n)' R_i(n - m_n) y(n) \quad (11)$$

é globalmente exponencialmente estabilizante para o sistema (5)-(7), sendo a solução de (8) um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** Adotando a função de Lyapunov quadrática variante no tempo  $V(\xi, n) = \xi' P(n) \xi$ , assumindo que as desigualdades (9)-(10) sejam satisfeitas no intervalo  $n \in [0, \kappa]$  e que a função de comutação seja dada por (11). Considerando  $x = x(n)$ ,  $z = z(n)$  e definindo  $\Delta V(x, n) = V(A_\sigma x, n+1) - V(x, n)$ , obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta V(x, n) &= x'(A'_\sigma P(n+1) A_\sigma - P(n)) x \\ &< x'(U(n) + C'_\sigma R_\sigma(n) C_\sigma) x - z' z \\ &< \min_{i \in \mathbb{K}} x'(U(n) + C'_i R_i(n) C_i) x - z' z \\ &< -z' z \end{aligned} \quad (12)$$

a primeira desigualdade é decorrente de (9), a segunda é assegurada pela regra de comutação (11) que no intervalo  $n \in [0, \kappa]$  é dada por  $\sigma(y(n)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(n)' C'_i R_i(n) C_i x(n)$  a terceira é uma consequência direta de

$$\begin{aligned} \min_{i \in \mathbb{K}} x'(U(n) + C'_i R_i(n) C_i) x &= \\ &= \min_{\lambda(n) \in \Lambda} x' \left( U(n) + \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i(n) C'_i R_i(n) C_i \right) x \\ &\leq x' \left( U(n) + \sum_{i \in \mathbb{K}} \lambda_i(n) C'_i R_i(n) C_i \right) x \\ &\leq x' \left( U(n) + C'_{i(n)} R_{i(n)}(n) C_{i(n)} \right) x \\ &< 0 \end{aligned} \quad (13)$$

onde a última desigualdade é devido a (10). Neste ponto é importante ressaltar que a igualdade surge do fato de que o mínimo em  $\lambda(n) \in \Lambda$  sempre ocorre nos vértices do simplex e, portanto, podemos restringir a busca de  $\lambda(n)$  aos vértices  $\Lambda_v \subset \Lambda$  utilizando assim as combinações  $\mathfrak{C}_\ell(\kappa)$ . Portanto, dado que  $\Delta V(x, n) < 0$  temos que existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que a desigualdade

$$V(x(n+1), n+1) \leq (1 + \epsilon) V(x(n), n) \quad (14)$$

seja válida para  $n \in [0, \kappa]$ . Agora, levando em conta as condições de contorno  $P(\kappa) = P(0) > 0$  e a continuação periódica  $R_i(n) = R_i(n - m_n)$ , temos que  $P(n) = P(n - m_n)$  e, portanto,  $P(n) > 0$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Definindo  $\mu^2 = 1 - \epsilon$  e aplicando (14) recursivamente, obtemos  $V(x(n), n) \leq \mu^{2n} V(x(0), 0)$  válido para  $n \in \mathbb{N}$ . Consequentemente, a desigualdade  $\|x(n)\| \leq c \mu^n \|x(0)\|$  é garantida, com  $c^2 = \max_{p \in [0, \kappa]} \|P(0)\| / \|P(p)\|$  e, assim, o sistema (5)-(7) é exponencialmente estável. Considerando que  $z_r$  é a saída correspondente à condição inicial  $x(0) = H_q e_r$ , e somando ambos os lados de (12) para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos como resultado  $\|z_r\|_2^2 < x(0)' P(0) x(0)$  e, portanto

$$\begin{aligned} J_2(\sigma) &= \sum_{r=1}^{n_w} \|z_r\|_2^2 + e'_r G'_q G_q e_r \\ &< \sum_{r=1}^{n_w} e'_r (H'_q P(0) H_q + G'_q G_q) e_r \\ &< \text{Tr}(H'_q P(0) H_q + G'_q G_q) \end{aligned} \quad (15)$$

provando assim o teorema proposto.  $\square$

Note que o projeto da regra de comutação é obtido como a solução de um conjunto de subproblemas convexos descritos em termos de LMIs e, portanto, simples de resolver através das rotinas disponíveis para a solução de LMIs. Além disso, como apresentado em (13), o Teorema 1 decorre do fato de que devido à regra de comutação (11) a busca de  $\lambda(n) \in \Lambda$  pode ser restrita aos vértices do simplex  $\Lambda_v \subset \Lambda$ . Este resultado não é trivial e segue de argumentos de programação dinâmica, veja (Deaecto and Geromel, 2018)

para maiores detalhes. Assim, a cada instante de tempo  $n \in [0, \kappa)$  apenas  $R_i(n)$  para  $i = i(n)$  é restrito pela desigualdade (10) enquanto as outras matrizes obtidas para  $\forall i \neq i(n)$  devem ser escolhidas arbitrariamente de forma a satisfazer (9). Dentre as possíveis escolhas, a mais trivial é fazer  $R_i(n) = \alpha I, \forall i \neq i(n)$  com  $\alpha \rightarrow \infty$ . Entretanto, esta escolha restringe a regra de comutação à sequência periódica  $\mathfrak{C}_\ell^*$  que pode não ser aquela que fornece o melhor custo verdadeiro. Uma outra possibilidade é escolher matrizes  $R_i(n), \forall i \neq i(n)$ , que se aproximam da borda de factibilidade de (9). Desta forma, como geralmente o espaço nulo de  $C_i$  denotado por  $\mathcal{N}(C_i)$  não é vazio, podemos definir

$$\mathcal{L}_i(n) = A_i'P(n+1)A_i - P(n) + E_i'E_i - U(n) \quad (16)$$

e determinar a matriz  $\Gamma_i = [\Gamma_{1i} \ \Gamma_{2i}]$  tal que  $C_i\Gamma_i = [I \ 0]$ . Neste caso,  $\Gamma_{1i} = C_i'(C_iC_i')^{-1}$  e  $\Gamma_{2i} = \mathcal{N}(C_i)$ . Assim, podemos escrever

$$\Gamma_i'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_i < \begin{bmatrix} R_i(n) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

o que resulta em

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{1i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{1i} - R_i(n) & \bullet \\ \Gamma_{2i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{1i} & \Gamma_{2i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{2i} \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

Como devido à factibilidade de (9) sempre temos  $\Gamma_{2i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{2i} < 0$ , então aplicando o complemento de Schur com relação a este bloco, obtemos as matrizes

$$R_i(n) = \Gamma_{1i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{1i} - \Gamma_{1i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{2i} \times \quad (19) \\ \times (\Gamma_{2i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{2i})^{-1} \Gamma_{2i}'\mathcal{L}_i(n)\Gamma_{1i} + \epsilon I$$

para todo  $i \neq i(n)$  que é a escolha factível que mais se aproxima do limiar de factibilidade de (9). No caso em que  $\dim(\mathcal{N}(C_i)) = 0$ , a obtenção destas matrizes é simplesmente dada por  $R_i(n) = C_i'^{-1}\mathcal{L}_i(n)C_i^{-1} + \epsilon I$  o que ocorre, por exemplo, quando  $C_i = I, i \in \mathbb{K}$ , e os estados estão disponíveis para realimentação. O corolário a seguir apresenta a versão do Teorema 1 para o projeto via realimentação de estado.

**Corolário 1** *Dado um escalar positivo  $\kappa \in \mathbb{N}$ , assumo que existam matrizes simétricas  $P(n) > 0$  e  $R_i(n)$  solução do seguinte problema de otimização*

$$J_2(\sigma) < \min_{\ell \in [1, N^\kappa]} \inf_{\Psi} \text{Tr}(H_q'P(0)H_q + G_q'G_q) \quad (20)$$

sujeito a

$$A_i'P(n+1)A_i - P(n) + E_i'E_i < R_i(n) \quad (21)$$

$$R_{i(n)}(n) < 0 \quad (22)$$

com  $\Psi$  sendo o conjunto solução  $\Psi = \{P(n), R_i(n)\}, q = \sigma(-1), i \in \mathbb{K}, n = 0, \dots, \kappa - 1, i(n) \in \mathfrak{C}_\ell(\kappa)$  e com as condições de contorno

$P(0) = P(\kappa) > 0$ . Então a função de comutação dependente do estado

$$\sigma(x(n)) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x(n)'R_i(n - m_n)x(n) \quad (23)$$

é globalmente exponencialmente estabilizante para o sistema (5)-(7) com  $C_i = I, \forall i \in \mathbb{K}$ , sendo a solução de (20) um limitante superior para o índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ .

**Prova:** A prova segue o mesmo procedimento realizado no Teorema 1, mas considerando  $C_i = I, \forall i \in \mathbb{K}$ , e  $U(n) = 0, \forall n \in [0, \kappa)$ .  $\square$

Note que as desigualdades (21) associadas com (22) resultam em

$$A_{i(n)}'P(n+1)A_{i(n)} - P(n) + E_{i(n)}'E_{i(n)} < 0 \quad (24)$$

que em conjunto com (20) coincidem com as condições de estabilidade e custo garantido propostas em (Deaecto and Geromel, 2018). Além disso, utilizando a escolha

$$R_i(n) = A_i'P(n+1)A_i - P(n) + E_i'E_i + \epsilon I \quad (25)$$

para  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno,  $i \neq i(n)$  e  $n \in [0, \kappa)$  e definindo  $\vartheta_i(P, n) = A_i'P(n+1)A_i - P(n) + E_i'E_i$ , temos que a regra de comutação (23) se torna

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x'R_i(n - m_n)x \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x'(\vartheta_i(P, n - m_n) + \epsilon I)x \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x'\vartheta_i(P, n - m_n)x \\ &= \arg \min_{i \in \mathbb{K}} x'(A_i'P(n+1 - m_n)A_i + E_i'E_i)x \end{aligned} \quad (26)$$

que é exatamente a regra obtida na referência (Deaecto and Geromel, 2018), indicando que o Corolário 1 apresenta uma condição alternativa que, como ilustrado no exemplo a seguir, pode fornecer um desempenho efetivo melhor através de uma escolha adequada das matrizes  $R_i(n), \forall i \neq i(n) \in \mathbb{K}$ .

**Exemplo 1** *Considere o sistema (5)-(7) composto por três subsistemas instáveis definidos por  $A_i = e^{\mathcal{A}_i T}, i \in \{1, 2, 3\}$  com*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 12 & -22 & -19 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -4 & -33 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -34 & -34 & 0.4 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_3' = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$G_1 = G_2 = G_3 = 0$  para  $T = 0.1$  [s]. Para este exemplo, vamos considerar duas situações distintas. Na primeira denotada RE, as matrizes da

	$\kappa$	$J_{2s}$	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
RE	2	87.0862	87.0862	17.8226	40.2632	19.7765
	4	38.0372	38.0372	7.1735	13.3465	11.4353
RS	2	1365.46	105.8715	49.0456	72.7792	81.7714
	4	263.1494	76.3454	71.5506	76.3378	71.5506

Tabela 1: Custos  $\mathcal{H}_2$  para RE e RS

saída medida são  $C_1 = C_2 = C_3 = I$  indicando que os estados estão disponíveis e as condições de estabilidade são as apresentadas no Corolário 1. Na segunda denotada RS, o terceiro estado não está disponível, ou seja,

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e o problema a ser tratado refere-se à realimentação de saída com condições de estabilidade disponíveis no Teorema 1. Para ambas as situações, consideramos quatro diferentes possibilidades de escolha da matriz  $R_i(n)$  para  $i \neq i(n) \in \mathbb{K}$ , conforme apresentado a seguir:

- **Caso 1** Considere  $R_i(n) = \gamma I$  com  $\gamma \rightarrow \infty$ .
- **Caso 2** Considere  $R_i(n)$  obtida de (19) em (RS) ou de (25) em (RE).
- **Caso 3** Considere  $R_i(n) = \gamma I$  com  $\gamma \rightarrow \infty$  para  $i = 1$ , e  $R_i(n)$  obtida de (19) em (RS) ou de (25) em (RE) para  $i = \{2, 3\}$ .
- **Caso 4** Considere  $R_i(n) = \gamma I$  com  $\gamma \rightarrow \infty$ , para  $i = 2$ , e  $R_i(n)$  obtida de (19) em (RS) ou de (25) em (RE) para  $i = \{1, 3\}$ .

Claramente, todas estas escolhas satisfazem as condições do Corolário 1 e do Teorema 1 relativas ao projeto via realimentação de estado e de saída, respectivamente. A Tabela 1 apresenta o custo garantido  $J_{2s}$  e o custo verdadeiro para ambas as situações, considerando os quatro casos mencionados anteriormente. Observe que a função de comutação do Caso 1 é periódica com sequência definida por  $\mathfrak{C}_\ell^*(\kappa)$  e seu custo verdadeiro coincide com o garantido, no controle via realimentação de estado. Isto indica que as condições do Corolário 1 são, na verdade, necessárias e suficientes para a existência de uma função de comutação periódica, como provado em (Deaecto and Geromel, 2018). O mesmo não é observado no controle via realimentação de saída em que, embora a regra de comutação do Caso 1 e  $\kappa = 2$  seja periódica com sequência  $\mathfrak{C}_6^*(2) = [2\ 3]$ , ela forneceu um custo verdadeiro muito inferior ao garantido  $J_2(\sigma) = 105.8715 < 1365.46$  indicando que para a realimentação de saída as condições do Teorema 1 são apenas suficientes para existência de uma regra de comutação periódica. O custo verdadeiro pode ser ainda melhorado se considerarmos uma escolha diferente para  $R_i(n)$ ,  $i \neq i(n)$ , como, por exemplo, aquela proposta no Caso 2. A Figura 1

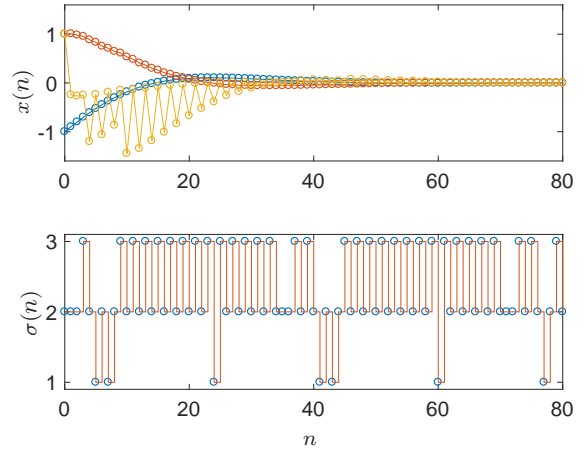


Figura 1: Trajetórias do estado e sequência de comutação

apresenta a evolução dos estados para o projeto via realimentação de saída e a correspondente sequência de comutação. Podemos notar que a sequência não é periódica e que, além disso, a escolha de  $R_i(n)$ ,  $i \neq i(n)$  permitiu a seleção do primeiro subsistema que não estava incluso no conjunto  $\mathfrak{C}_6^*(2)$ , melhorando consideravelmente o desempenho efetivo. Este exemplo deixa claro que para ambas as situações RE e RS o custo verdadeiro pode ser melhorado escolhendo adequadamente a matriz  $R_i(n)$ ,  $i \neq i(n)$ . Outro ponto a ser mencionado é a comparação com as desigualdades de Lyapunov-Metzler no caso de realimentação de estado. Para este exemplo, com  $N = 3$  a solução destas desigualdades não é trivial pois envolve a busca unidimensional de 6 parâmetros escalares positivos e, utilizando a condição mais conservadora proposta em (Geromel and Colaneri, 2006), que leva em conta matrizes de Metzler com elementos iguais na diagonal principal, não há solução factível.

## 4 Conclusões

Neste artigo foram propostas condições suficientes baseadas em desigualdades matriciais lineares para o projeto de uma função de comutação depende de saída com a finalidade de assegurar a estabilidade exponencial e garantir um índice de desempenho  $\mathcal{H}_2$ . As condições propostas foram baseadas em uma função de Lyapunov variante no tempo e contemplam o projeto de controle via realimentação de estado como caso particular. Entretanto, mesmo para este caso mais simples as condições são mais fáceis de resolver do que outros métodos existentes na literatura. A eficiência e a validade dos resultados foram ilustradas através de um exemplo acadêmico.

## 5 Agradecimentos

Este projeto de pesquisa é apoiado pelo “Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tec-

nológico (CNPq)”, processo 306911/2015-9 e pela “Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)”, processo 2017/20343-0.

### Referências

- Antunes, D. and Heemels, W. M. (2017). Linear quadratic regulation of switched systems using informed policies, *IEEE Transactions on Automatic Control* **62**(6): 2675–2688.
- Blanchini, F., Casagrande, D., Gardonio, P. and Miani, S. (2012). Constant and switching gains in semi-active damping of vibrating structures, *International Journal of Control* **85**(12): 1886–1897.
- Cardim, R., Teixeira, M. C., Assunção, E. and Covacic, M. R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter, *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(9): 3505–3513.
- Daiha, H. R., Egidio, L. N., Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2017).  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback control design of discrete-time switched linear systems, *Proceedings of the 56th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 5882–5887.
- Deaecto, G. S. (2016). Dynamic output feedback  $\mathcal{H}_\infty$  control of continuous-time switched affine systems, *Automatica* **71**: 44–49.
- Deaecto, G. S. and Geromel, J. C. (2018). Stability and performance of discrete-time switched linear systems, *Systems & Control Letters* **118**: 1–7.
- Deaecto, G. S., Souza, M. and Geromel, J. C. (2015). Discrete-time switched linear systems state feedback design with application to networked control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **60**(3): 877–881.
- Fiacchini, M., Girard, A. and Jungers, M. (2016). On the stabilizability of discrete-time switched linear systems: Novel conditions and comparisons, *IEEE Transactions on Automatic Control* **61**(5): 1181–1193.
- Fiacchini, M. and Jungers, M. (2014). Necessary and sufficient condition for stabilizability of discrete-time linear switched systems: A set-theory approach, *Automatica* **50**(1): 75–83.
- Fiacchini, M. and Tarbouriech, S. (2017). Control co-design for discrete-time switched linear systems, *Automatica* **82**: 181–186.
- Geromel, J. C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of discrete time switched systems, *International Journal of Control* **79**(07): 719–728.
- Geromel, J. C., Colaneri, P. and Bolzern, P. (2008). Dynamic output feedback control of switched linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **53**(3): 720–733.
- Hernandez-Vargas, E., Colaneri, P., Middleton, R. and Blanchini, F. (2011). Discrete-time control for switched positive systems with application to mitigating viral escape, *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **21**(10): 1093–1111.
- Júnior, E. I. M., Teixeira, M. C. M., Cardim, R., Assunção, E., Moreira, M. R., de Oliveira, D. R. and Carniato, A. A. (2015). Robust control of switched linear systems with output switching strategy, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* **26**(5): 455–465.
- Liberzon, D. (2003). *Switching in systems and control*, Springer Science & Business Media.
- Liberzon, D. and Morse, A. S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems, *IEEE Control systems* **19**(5): 59–70.
- Lin, H. and Antsaklis, P. J. (2009). Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results, *IEEE Transactions on Automatic control* **54**(2): 308–322.
- Shorten, R., Wirth, F., Mason, O., Wulff, K. and King, C. (2007). Stability criteria for switched and hybrid systems, *SIAM review* **49**(4): 545–592.
- Song, I., Kim, S. and Karray, F. (2008). A real-time scheduler design for a class of embedded systems, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **13**(1): 36–45.
- Sun, Z. and Ge, S. S. (2005). *Switched Linear Systems: Control and Design*, Springer, London.
- Zhai, G. (2001). Quadratic stabilizability of discrete-time switched systems via state and output feedback, *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, IEEE, pp. 2165–2166.
- Zhang, W., Abate, A., Hu, J. and Vitus, M. P. (2009). Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems, *Automatica* **45**(11): 2526–2536.
- Zhang, W., Hu, J. and Abate, A. (2012). Infinite-horizon switched LQR problems in discrete time: A suboptimal algorithm with performance analysis, *IEEE Transactions on Automatic Control* **57**(7): 1815–1821.