

# RASTREAMENTO DE REFERÊNCIA CONSTANTE VIA REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA DINÂMICA PARA SISTEMAS LINEARES RESTRITOS

TIAGO A. ALMEIDA\*, CARLOS E. T. DÓREA\*

\* *Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)*  
*Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA)*  
*59078-900, Natal, RN, Brasil*

Emails: [tiagoalves@dca.ufrn.br](mailto:tiagoalves@dca.ufrn.br), [cetdorea@dca.ufrn.br](mailto:cetdorea@dca.ufrn.br)

**Abstract**— Set-invariance techniques are proposed to provide a solution to the problem of tracking constant reference signals for constrained, linear, discrete-time, single-output systems via output feedback control. In this regard, Output-Feedback Controlled-Invariant Polyhedra are used to ensure that the constraints are satisfied all time. In particular, based on the evolution of the sets of possible states consistent with present and previous output measurements, we design a dynamic output feedback controller which is able to achieve reference tracking under state and control constraints during the transient period. Then, a dynamic compensator structure is presented based on a pair composed by a conditioned-invariant and a controlled-invariant polyhedron. Results with both controllers are illustrated by numerical examples.

**Keywords**— Linear Systems, Set Invariance, Dynamic Output Feedback, Reference Tracking, Constraints.

**Resumo**— Técnicas de invariância de conjuntos são propostas para fornecer uma solução para o problema de rastrear sinais de referência constantes para sistemas lineares de tempo discreto restritos com uma única saída através do controle por realimentação de saída. A esse propósito, Poliedros Invariantes Controlados por Realimentação de Saída são usados para garantir que as restrições sejam satisfeitas a todo tempo. Em particular, com base na evolução dos conjuntos de possíveis estados consistentes com as medições presentes e passadas da saída, construímos um controlador por realimentação de saída dinâmica que é capaz de alcançar o rastreamento de referência sob restrições nos estados e na ação de controle durante o período transitório. Depois, é apresentada uma estrutura de um compensador dinâmico baseada em um par composto por um poliedro invariante condicionado e invariante controlado. Resultados com os dois controladores são ilustrados por exemplos numéricos.

**Palavras-chave**— Sistemas Lineares, Conjuntos Invariantes, Realimentação de Saída Dinâmica, Rastreamento de Referência, Restrições.

## 1 Introdução

A abordagem da invariância positiva tem sido descrita como uma valiosa ferramenta para a síntese de controladores para sistemas lineares restritos. Um conjunto não vazio no espaço de estados é dito positivamente invariante em relação a um certo sistema dinâmico se possuir a propriedade de que, para qualquer condição inicial pertencente a esse conjunto, a trajetória do vetor de estado do referido sistema se mantém no interior do mesmo (Hennet, 1995). Uma visão abrangente nesta área de invariância de conjuntos pode ser encontrada em Blanchini and Miani (2015).

De modo geral, as restrições impostas às variáveis de estado e controle podem ser traduzidas em conjuntos admissíveis no espaço de estados, isto é, regiões nas quais a trajetória do vetor de estado deve ser mantida. Quase sempre, tais regiões não são positivamente invariantes e, por consequência, não é possível garantir que as restrições sejam satisfeitas a todo tempo. No entanto, quando um conjunto inicial de restrições não é positivamente invariante sob uma dada dinâmica, é possível construir um conjunto *invariante controlado* contido no conjunto inicial (Blanchini, 1994; Dórea and Hennet, 1999). Neste caso, existe um controle por realimentação de estados de tal forma que, para qualquer condição

inicial nesse conjunto, a trajetória do vetor de estado não viola as restrições.

Em contraste com a elaborada literatura de invariância de conjuntos sob realimentação de estados, poucos trabalhos consideraram invariância sob realimentação de saída. Em Dórea (2009) foi estudada uma estrutura de realimentação de saída e condições foram estabelecidas para avaliar se um dado conjunto poliédrico é *invariante controlado por realimentação de saída* (do inglês *Output-Feedback Controlled-Invariant* - OFCI). Conjuntos OFCI são conjuntos em que a trajetória do vetor de estado pode ser confinada através de uma sequência adequada de ações de controle, que são tomadas com base apenas nas saídas medidas. Em Artstein and Rakovic (2011) foi, numa abordagem teórica mais geral, definida e analisada a noção de invariância em relação à realimentação de saída sob perturbações não-paramétricas. Tal abordagem incorpora informações coletadas pelo controlador durante o processo e tais informações são representadas dentro de uma dinâmica de conjuntos. A evolução dos conjuntos de informações resultantes determinam conjuntos invariantes.

Em muitas aplicações, ao menos uma estimativa do estado do sistema se torna necessária, e a dificuldade em medi-las, seja por razões físicas ou econômicas, muitas vezes pode ser contornada pela construção de um observador que estima as

variáveis de estado inacessíveis. Esse é o caso das abordagens baseadas nos *set-valued observers* (Shamma and Tu, 1999) e *set-invariant estimators* (Dórea and Pimenta, 2005).

Neste artigo, examinamos o controle por realimentação de saída aplicado ao problema de rastreamento de sinais de referência constantes em sistemas lineares de tempo discreto com uma única saída sujeitos a restrições nos estados e na ação de controle. Consideramos restrições lineares que correspondem a conjuntos poliédricos convexos definidos no espaço de estados. Em particular, partindo de um controlador estático será proposto, com base nos *set-valued observers*, o cálculo *online* de uma sequência de controle por realimentação de saída dinâmica. O desempenho do controlador proposto é ilustrado por meio de exemplos numéricos e comparado com um controlador dinâmico construído com base nos *set-invariant estimators* propostos em Dórea (2009).

**Notação:**  $\bar{1}$  e  $\bar{0}$  representam vetores (ou matrizes) de dimensões apropriadas cujos componentes são todos iguais a 1 e 0, respectivamente.  $I$  representa uma matriz identidade.  $F_i$  denota a  $i$ -ésima linha da matriz  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $f_i$  a  $i$ -ésima componente do vetor  $f \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ . Conjuntos poliédricos convexos contendo a origem serão caracterizados por  $R[F, f] = \{x : Fx \leq f\}$ ,  $f_i > 0, \forall i$ . A operação  $AX$  é definida por  $AX = \{Ax : x \in X\}$  quando  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

## 2 Conjuntos Invariantes

Considere o sistema linear, discreto, invariante no tempo de saída única, descrito por:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (2)$$

em que  $k \in \mathbb{N}$  é o instante de amostragem,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle e  $y \in \mathbb{R}$  é a saída medida.

Neste ponto, vamos assumir que os vetores de estado  $x$  e controle  $u$  estão restritos aos conjuntos convexos e compactos (fechados e limitados)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\mathfrak{U} \subset \mathbb{R}^m$ , definidos por:

$$\Omega = \{x : Gx \leq \bar{1}\}, \quad \mathfrak{U} = \{u : Vu \leq \bar{1}\}, \quad (3)$$

em que  $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$  e  $V \in \mathbb{R}^{v \times m}$ .

**Definição 1 (Invariância Controlada)** *Dada uma taxa de contração  $0 < \lambda < 1$ , o conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é dito invariante controlado  $\lambda$ -contrativo em relação ao sistema (1) se  $\forall x \in \Omega, \exists u \in \mathfrak{U} : Ax + Bu \in \lambda\Omega$  (Blanchini, 1994).*

Se  $\Omega$  é invariante controlado  $\lambda$ -contrativo, e uma vez que  $x(0) \in \Omega$ , então existe uma sequência de controle por realimentação de estados  $u(x(k)) \in \mathfrak{U}$  tal que se  $x(k) \in \Omega$ , então  $x(k+1) \in \lambda\Omega$ .

A  $\Omega$  está associado o seguinte conjunto de saídas admissíveis:

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \{y : y = Cx \text{ para } x \in \Omega\}. \quad (4)$$

O conjunto  $\mathcal{Y}(\Omega)$  representa todos os valores de  $y$  que podem ser associados a  $x \in \Omega$ . Assim, se  $x \in \Omega$ , então  $y \in \mathcal{Y}(\Omega)$ .

Considere agora o seguinte conjunto:

$$\mathfrak{C}(y) = \{x : Cx = y\}. \quad (5)$$

$\mathfrak{C}(y)$  representa o conjunto de possíveis estados associados a uma única medição  $y$ . Consequentemente, invariância sob realimentação de saída pode ser caracterizada pela seguinte definição.

**Definição 2 (Conjunto OFCI)** *Dada uma taxa de contração  $0 < \lambda < 1$ , o conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é dito invariante controlado por realimentação de saída (do inglês Output-Feedback Controlled-Invariant - OFCI), em relação ao sistema (1)-(2) se  $\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u \in \mathfrak{U} : Ax + Bu \in \lambda\Omega, \forall x \in \Omega$  tal que  $Cx = y$  (Dórea, 2009).*

Quando  $\Omega$  é OFCI, se  $x(k) \in \Omega$ , então existe uma sequência de controle  $u(y(k)) \in \mathfrak{U}$ , calculada a partir da medição da saída no instante  $k$ , tal que  $x(k+1) \in \lambda\Omega, \forall k$ . Em Dórea (2009) condições necessárias e suficientes foram propostas para verificar se um conjunto invariante controlado é OFCI com taxa de contração  $\lambda$ , a partir da solução de Problemas de Programação Linear (PPL).

### Definição 3 (Invariância Condicionada)

*Dada uma taxa de contração  $0 < \lambda < 1$ , o conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é dito invariante condicionado  $\lambda$ -contrativo em relação ao sistema (1)-(2) se  $\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists v(\cdot) : Ax + v(\cdot) \in \lambda\Omega, \forall x \in \Omega$  tal que  $Cx = y$  (Dórea and Pimenta, 2005; Dórea, 2009).*

A propriedade da invariância condicionada de um conjunto poliédrico em relação a um dado sistema, permite manter o erro de observação limitado a tal conjunto por meio de uma injeção de saída  $v(\cdot)$  adequada. A partir das definições 1-3, pode-se concluir que um conjunto é OFCI somente se ele é simultaneamente invariante controlado e invariante condicionado.

Até agora, nenhum método geral foi proposto para calcular diretamente os conjuntos OFCI. Porém, pode-se calcular um conjunto invariante controlado e verificar se é ou não OFCI. Se o sistema for estável em malha aberta, um máximo conjunto invariante positivo pode ser calculado com  $B = \bar{0}$  (Gilbert and Tan, 1991). É claro que um conjunto invariante com  $B = \bar{0}$  também é um conjunto OFCI, desde que  $u = \bar{0}$  pertença ao conjunto de restrições  $\mathfrak{U}$ . Caso contrário, um controlador por realimentação de saída estabilizador pode ser calculado e um conjunto invariante positivo pode ser obtido com respeito a esse sistema estável em

malha fechada. Também é certo que o conjunto calculado com  $B = \bar{0}$  será menor, em geral, do que aquele obtido quando  $B \neq \bar{0}$ .

### 3 Rastreamento de Referência Constante

O objetivo agora é obter uma solução para o problema de rastrear sinais de referência constantes sob restrições, em outras palavras, calcular uma sequência de controle  $u(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  com base nas medições  $y(k)$  de tal forma que a saída  $y$  rastree uma referência constante  $r$ , respeitando ao mesmo tempo todas as restrições, isto é,

$$\forall x(0) \in \Omega : \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = r(k), \\ x(k) \in \Omega, u(k) \in \mathfrak{U}, \forall k \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

A partir de agora, assumimos que  $\Omega$  em (3) é um poliedro OFCI.

O conjunto de saídas admissíveis (4) é também um poliedro convexo e compacto definido por:

$$\mathcal{Y}(\Omega) = \{y : y = Cx \text{ para } x : Gx \leq \bar{1}\}. \quad (7)$$

Considerando a Definição 2, pode ser visto que  $\Omega$  é OFCI com taxa de contração  $\lambda$  se, e somente se,

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u : G(Ax + Bu) \leq \lambda \bar{1}, Vu \leq \bar{1} \quad (8)$$

$$\forall x : Cx = y, Gx \leq \bar{1}.$$

Como o vetor de estado não está sendo medido, precisamos encontrar um único vetor de controle  $u$  que “funcione” para todos os  $x \in \Omega$  consistentes com a saída  $y$  medida. Isto é, em um instante  $k$ , a decisão quanto a  $u(k)$  é tomada sem saber qual é o estado  $x(k) \in \Omega$  que gerou a saída  $y(k)$  (para cada saída medida um conjunto de estados está associado). Isto pode ser conseguido calculando o pior caso  $x$ , linha por linha, que pode ocorrer. Sejam os elementos do vetor  $\phi(y) \in \mathbb{R}^g$  definidos por:

$$\phi_j(y) = \max_x G_j Ax, \quad j = 1, \dots, g \quad (9)$$

$$\text{s.a. } Gx \leq \bar{1}, Cx = y.$$

Consequentemente, a condição (8) pode ser reescrita como:

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u : \phi(y) + GBu \leq \lambda \bar{1}, Vu \leq \bar{1} \quad (10)$$

ou

$$\forall y \in \mathcal{Y}(\Omega), \exists u \in \mathfrak{U} : \begin{bmatrix} \phi(y) \\ \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} GB \\ V \end{bmatrix} u \leq \begin{bmatrix} \lambda \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

As inequações (11) são cruciais, pois uma vez satisfeitas, podemos assegurar a invariância do poliedro  $\Omega$ . Na sequência, devemos encontrar condições que possibilitem o rastreamento de referência.

A fim de rastrear referências constantes, presume-se que elas sejam admissíveis. (Veja Blanchini and Miani (2000), Dórea (2004) para o cálculo das referências constantes rastreáveis em relação às restrições.) O erro de rastreamento é definido como  $e(k) = r(k) - y(k)$ , em que  $y(k)$  é a saída medida e presumida ter a forma (2). Consideramos a estratégia de minimizar um passo à frente o valor absoluto do erro  $|e(k+1)|$ , isto é, o objetivo é ter o erro no instante seguinte tão pequeno quanto possível. Uma vez que estamos assumindo que  $r(k+1) = r(k) = r$  (sinal de referência constante), temos que:

$$|e(k+1)| = |r - \underbrace{(CAx + CBu)}_{y(k+1)}| \leq \varepsilon$$

$$\begin{cases} CAx + CBu - r \leq \varepsilon \\ -CAx - CBu + r \leq \varepsilon \end{cases}. \quad (12)$$

Portanto,  $|e(k+1)|$  pode ser minimizado minimizando-se  $\varepsilon$ . Então, as inequações (12) podem ser reescritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} CA \\ -CA \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} CB & -1 \\ -CB & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Seja  $\gamma(y)$  o vetor cujos componentes são dados pelas soluções dos seguintes PPL:

$$\gamma_{\bar{j}}(y) = \max_x \begin{bmatrix} CA \\ -CA \end{bmatrix}_{\bar{j}} x, \quad \bar{j} = 1, \dots, \bar{g} \quad (14)$$

$$\text{s.a. } Gx \leq \bar{1}, Cx = y.$$

O cálculo desse vetor segue o mesmo tipo de raciocínio usado anteriormente para construir o vetor  $\phi(y)$  em (9). Para  $\gamma(y)$  consideramos o pior caso  $x$  em relação à minimização de  $\varepsilon$ .

Por conseguinte, a condição (13) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} CB & -1 \\ -CB & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \leq \bar{r} - \gamma(y), \quad (15)$$

em que  $\bar{r} = [r \quad -r]^T$ .

Juntando as condições (11) e (15), é possível calcular a ação de controle  $u(y)$  de tal forma que o sistema possa rastrear a referência  $r$  satisfazendo simultaneamente as restrições nos estados e controle. Tal ação pode ser calculada *online* a partir da solução do seguinte PPL.

$$u(y) = \arg \min_{u, \varepsilon} \varepsilon \quad (16)$$

$$\text{s.a. } \begin{bmatrix} GB & \bar{0} \\ V & \bar{0} \\ CB & -1 \\ -CB & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varepsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \lambda \bar{1} - \phi(y) \\ \bar{1} \\ \bar{r} - \gamma(y) \end{bmatrix}.$$

A ação de controle (16) foi examinada em Silveira Jr (2016) com aplicação ao seguimento de

referência constante para sistemas lineares incertos. No entanto, corresponde a um controlador por realimentação de saída estática e pode resultar em baixo desempenho do rastreamento. Na próxima seção será abordada a construção de um controlador por realimentação de saída dinâmica com base na dinâmica dos conjuntos de informações produzidos pelos *set-valued observers*. Também será apresentada a formulação do controlador dinâmico com base nos *set-invariant estimators*.

## 4 Controladores por Realimentação de Saída Dinâmica

### 4.1 Set-Valued Observers

Um mapa avaliado em conjunto, denotado por  $\mathfrak{C} : Y \rightsquigarrow \Omega$ , é um mapeamento de pontos  $y \in Y$  em subconjuntos  $\mathfrak{C}(y) \subset \Omega$ . Essa operação é o ponto-chave para a construção de uma classe de observadores chamados *set-valued observers*, os quais aplicam esquemas de computação adaptativos das estimativas dos estados, calculados *online* com base nas saídas medidas e modelos de sinais exógenos (Shamma and Tu, 1999). Em outras palavras, para cada instante de tempo, o conjunto (poliédrico) de estados que poderiam gerar a saída medida é calculado e um estado ótimo é selecionado. Quanto ao nosso propósito, o mesmo conceito será usado como base para o cálculo de  $u(y)$  no conjunto de possíveis estados  $x$  consistentes com as medições presentes e passadas da saída. Sem, no entanto, selecionar um estado ótimo.

Embora a localização do estado não seja conhecida pelo controlador, um conjunto ao qual ele pertence está disponível. Ou seja, com base em uma medição  $y$ , o controlador sabe que o estado verdadeiro  $x$  pertence ao conjunto  $\mathfrak{C}(y)$  (5), então os vetores  $\phi(y)$  (9) e  $\gamma(y)$  (14) podem ser calculados e o problema (16) resolvido. O conjunto  $\mathfrak{C}(y)$  é ilimitado, mas, como as restrições em (9) e (14) correspondem à interseção  $\mathfrak{C}(y) \cap \Omega$ , isso delimita o cálculo da ação de controle nos estados consistentes com a saída e que pertencem a  $\Omega$ .

De forma geral, a saída  $y(k)$  em (2) pode ser escrita como:

$$y(k) = c_1 x_1(k) + \dots + c_n x_n(k). \quad (17)$$

A equação (17) especifica uma família de hiperplanos de dimensão  $(n-1)$  em espaço  $n$ -dimensional, cada elemento da família é obtido fazendo-se  $y(k)$  igual a algum número real. Em particular,  $y(k)$  representa a saída medida em um instante  $k$ , o que gera um hiperplano que intersecta  $\Omega$ . Consequentemente, a ação de controle calculada da forma anteriormente mencionada deve ser capaz de manter, no instante  $k+1$ , todos os estados que pertençam à interseção entre esse hiperplano e  $\Omega$  ( $\mathfrak{C}(y(k)) \cap \Omega$ ) em  $\Omega$ . Essa exigência pode ocasionar o baixo desempenho do rastreamento.

Suponha que o conjunto atual de possíveis estados no instante  $k$  consistentes com  $y(k)$  seja  $\mathfrak{C}(y(k)) \cap \Omega$ . Quando a decisão referente à entrada de controle  $u(k)$  é tomada, o controlador está assegurado de que o estado  $x(k+1)$  pertence ao seguinte conjunto:

$$X_{k+1} = \{x(k+1) : A[\mathfrak{C}(y(k)) \cap \Omega] + Bu(k)\}. \quad (18)$$

A operação (18) fornece o próximo conjunto de possíveis estados se o conjunto atual for  $\mathfrak{C}(y(k)) \cap \Omega$  e o controle usado for  $u(k)$ .  $X_{k+1}$  é gerado pelo controlador e indica o conjunto antecipado de possíveis estados no instante  $k+1$ .

Nossa convenção é de que o controlador por realimentação de saída dinâmica incorpora no instante  $k+1$  as informações relativas à localização do estado obtidas no instante  $k$ . Ou seja, o conjunto  $X_{k+1}$  deve ser levado em consideração e, desse modo, o problema (16) pode ser resolvido de forma mais eficiente, uma vez que o controlador terá mais informações a respeito da localização do estado. Quando  $y(k+1)$  é revelado, o conjunto  $\mathfrak{C}(y(k+1)) \cap \Omega$  de possíveis estados  $x(k+1)$  está disponível, no entanto, o controlador também tem a informação de que os possíveis estados  $x(k+1)$  pertencem ao conjunto  $X_{k+1}$  representado em (18). Então, como pode ser visto, a interseção  $\mathfrak{X} = \{\mathfrak{C}(y(k+1)) \cap \Omega\} \cap X_{k+1}$  resulta em um menor conjunto que contém o verdadeiro estado  $x(k+1)$ . Em geral, o conjunto de informações  $\mathfrak{X}$  pode ser obtido e propagado alterando-se as restrições em (9) e (14), onde agora  $\phi(y)$  e  $\gamma(y)$  serão calculados com restrições variantes.

Seja  $y(k) = Cx(k)$  ( $y(k)$  conhecido) para  $k = 0, 1, \dots$  as observações dos estados  $x(k)$  e  $u(0), u(1), \dots$  as ações de controle associadas. Seja também  $\bar{\mathfrak{C}}(y(k)) = \{x : Cx = y(k)\} \cap \Omega$  o hiperplano limitado  $(n-1)$ -dimensional determinado pela medição no  $k$ -ésimo passo. Defina

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}^0 &= \bar{\mathfrak{C}}(y(0)) = \underbrace{\{x : Cx = y(0)\}}_{\mathfrak{C}(y(0))} \cap \Omega \\ \mathfrak{X}^1 &= \underbrace{[A\mathfrak{X}^0 + Bu(0)]}_{X_1} \cap \bar{\mathfrak{C}}(y(1)) \\ &\quad \vdots \\ \mathfrak{X}^k &= \underbrace{[A\mathfrak{X}^{k-1} + Bu(k-1)]}_{X_k} \cap \bar{\mathfrak{C}}(y(k)) \end{aligned} \quad (19)$$

então após  $n$  passos  $\mathfrak{X} \rightarrow x$ , ou seja, a evolução dos conjuntos  $\mathfrak{X}^k$  resultará em um *singleton* contendo o estado verdadeiro (Artstein and Rakovic, 2011). Note que todos os conjuntos em (19) são construídos com uma dependência causal da trajetória de medição  $y$  (cada conjunto  $\mathfrak{X}^k$  é obtido após o conhecimento de  $y(k)$ ). Portanto, em vez de o controlador lidar em cada passo com um conjunto de estados em um hiperplano limitado (controlador

estático), sendo o sinal de controle calculado baseado nos conjuntos  $\mathfrak{X}^k$ , após  $n$  passos, se baseará no estado verdadeiro (controlador dinâmico).

O algoritmo a seguir descreve uma implementação computacional do controlador por realimentação de saída dinâmica.

**Algoritmo 1** Dado:  $\Omega = \{x : Gx \leq \bar{1}\}$  um conjunto poliédrico OFCI e  $\mathfrak{U} = \{u : Vu \leq \bar{1}\}$ .

1. Defina  $r$ ; Inicialize  $\bar{G}^0 = G$ ,  $\bar{\rho}^0 = \bar{1}$ .
2. **Para** cada saída  $y^k$  **faça**
  - (a) Para  $j = 1, \dots, g$ : calcule  $\phi_j(y)$  a partir de (9) sujeito a
$$\bar{G}^k x \leq \bar{\rho}^k \text{ e } Cx = y^k;$$
  - (b) Para  $\bar{j} = 1, \dots, \bar{g}$ : calcule  $\gamma_{\bar{j}}(y)$  a partir de (14) sujeito a
$$\bar{G}^k x \leq \bar{\rho}^k \text{ e } Cx = y^k;$$
  - (c) Resolva por Programação Linear o problema (16). Seja  $u^k$  o resultado correspondente;
  - (d) Seja  $\Gamma$  o resultado da seguinte interseção

$$\Gamma = \{\bar{G}^k x \leq \bar{\rho}^k\} \cap \underbrace{\{Cx = y^k\}}_{\mathfrak{C}(y^k)}$$

- (e) Calcule o conjunto  $X^{k+1}$  como

$$X^{k+1} = \{A\Gamma + Bu^k\};$$

- (f) Calcule a interseção  $X^{k+1} \cap \Omega$  e obtenha sua representação como

$$\bar{G}^{k+1} x \leq \bar{\rho}^{k+1}.$$

(Essa restrição deve ser utilizada nos passos (a), (b) e (d) para a próxima medição.)

3. Envie ao sistema o sinal  $u^k$  e obtenha a próxima saída  $y^{k+1}$ .

A partir do algoritmo 1, deve-se ter em mente que o sistema está equipado com um controlador projetado para minimizar o erro futuro a fim de rastrear sinais de referência constantes e, ao mesmo tempo, cumprir as restrições nos estados e controle. Além disso, a solução para o controle depende do conjunto de informações sobre a localização do estado obtidas *online* e da evolução dos conjuntos  $\mathfrak{X}^k$  (19), que é refletida em  $\bar{G}^k x \leq \bar{\rho}^k$  e  $Cx = y^k$  à medida que  $k$  aumenta.

Com relação à implementação do algoritmo 1, é necessário resolver problemas de programação linear e manipular poliedros (como calcular

vértices, invólucro convexo e outros). Vários métodos estão disponíveis para tais cálculos (veja Schrijver (1986) e Herceg et al. (2013)). Em particular, os cálculos correspondentes foram implementados utilizando o Multi-Parametric Toolbox (MPT) para o *software Matlab*<sup>®</sup> (Herceg et al., 2013).

#### 4.2 Set-Invariant Estimators

Invariância condicionada é definida como a possibilidade de manter o erro de observação/estimação em um determinado conjunto. Isso significa que, se sabe-se que o erro de observação inicial pertence a um conjunto invariante condicionado, então o conhecimento da saída é suficiente para impor que a trajetória do erro de observação pertença a esse conjunto através do cálculo de uma injeção de saída adequada. Os observadores de estado para os quais o erro de estimação é limitado por um conjunto invariante condicionado são denominados *set-invariant estimators* (Dórea and Pimenta, 2005).

Considere o sistema (1)-(2) e o seguinte compensador, possivelmente não-linear:

$$\begin{aligned} z(k+1) &= v[z(k), y(k)], \\ u(k) &= \kappa[z(k), y(k)]. \end{aligned} \quad (20)$$

O sistema (1)-(2) sob o compensador (20) pode ser representado em uma formulação de espaço de estados estendido como segue (Dórea, 2009):

$$\xi(k+1) = \hat{A}\xi(k) + \hat{B}\omega(k), \quad (21)$$

$$\zeta(k) = \hat{C}\xi(k), \quad (22)$$

em que  $\xi = [x \ z]^T$  é o vetor de estado estendido,  $\omega = [u \ v]^T$  é o vetor de controle estendido,  $\zeta = [y \ z]^T$  é o vetor de saída estendido e  $\hat{A} = \begin{bmatrix} A & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$ ,  $\hat{B} = \begin{bmatrix} B & \bar{0} \\ \bar{0} & I \end{bmatrix}$ ,  $\hat{C} = \begin{bmatrix} C & \bar{0} \\ \bar{0} & I \end{bmatrix}$ .

As restrições no controle são agora representadas por:  $\omega(k) \in \hat{\mathfrak{U}} = \{\omega = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} : \hat{V}\omega \leq \bar{1}\}$ , com  $\hat{V} = [V \ \bar{0}]$ .

Considere agora um par de conjuntos poliédricos convexos e compactos ( $\mathcal{S}, \mathcal{V}$ ), representados por:

$$\mathcal{S} = \{x : G_s x \leq \bar{1}\}, \mathcal{V} = \{x : G_v x \leq \bar{1}\},$$

e satisfazendo as seguintes suposições:  $\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \subset \Omega_x$ ,  $\mathcal{S}$  é invariante condicionado  $\lambda_s$ -contrativo e  $\mathcal{V}$  é invariante controlado  $\lambda_v$ -contrativo, sendo  $\Omega_x$  um conjunto de restrições iniciais no espaço de estados.

A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em Dórea (2009). O poliedro

$$\widehat{\Omega} = \{\xi : \widehat{G}\xi \leq \overline{1}\}, \text{ com } \widehat{G} = \begin{bmatrix} G_v & \overline{0} \\ G_s & -G_s \end{bmatrix} \quad (23)$$

é simultaneamente invariante controlado e condicionado em relação ao sistema (21)-(22). Dessa forma,  $\widehat{\Omega}$  satisfaz à condição necessária para ser OFCI em relação ao sistema (21)-(22), mencionada na seção 2. Isso significa que mesmo que o poliedro invariante controlado  $\mathcal{V}$  não seja OFCI em relação ao sistema (1)-(2), existe a possibilidade de que com a inserção do compensador o poliedro construído da forma (23) seja OFCI em relação ao sistema aumentado. Em caso positivo, as restrições podem ser satisfeitas por meio de uma escolha adequada de  $(u(k), v(k))$  como funções de  $(y(k), z(k))$ . Além disso, se considerarmos  $z(k)$  (o estado do compensador) como uma estimativa do estado  $x(k)$ , então de (23)  $G_s[x(k) - z(k)] \leq \overline{1} \forall k$ , isto é, o erro de estimação é limitado pelo conjunto invariante condicionado  $\mathcal{S}$  (Dórea, 2009).

O par  $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$  pode ser obtido a partir dos algoritmos disponíveis para o cálculo dos poliedros invariantes controlados (por exemplo (Blanchini, 1994; Dórea and Henet, 1999)) e invariantes condicionados (Dórea and Pimenta, 2005). Então, desde que  $\widehat{\Omega}$  seja OFCI, o sinal de controle  $\omega$  pode ser calculado de forma semelhante a (16) com, no entanto, a seguinte consideração: sendo  $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$  invariante condicionado  $\lambda_s$ -contrativo ( $0 < \lambda_s < 1$ ), propõe-se também levar em conta a taxa de contração  $\lambda_s$  no cálculo de  $\omega$ . Portanto,

$$\omega(\zeta) = \arg \min_{\omega, \varepsilon} \varepsilon \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{G}\widehat{B} & \overline{0} \\ \widehat{V} & \overline{0} \\ C_x\widehat{B} & -1 \\ -C_x\widehat{B} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \varepsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \overline{1} \\ \lambda_s^k \overline{1} \end{array} \right] - \widehat{\phi}(\zeta) \\ \overline{1} \\ \overline{r} - \widehat{\gamma}(\zeta) \end{bmatrix}.$$

em que  $C_x = [C \ \overline{0}]$ , pois o objetivo é fazer com que apenas  $y$  rastreie a referência  $r$ . Os vetores  $\widehat{\phi}(\zeta)$  e  $\widehat{\gamma}(\zeta)$  são as soluções dos seguintes PPL's:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_j(\zeta) &= \max_{\xi} \widehat{G}_j \widehat{A} \xi, \\ \text{s.a. } \widehat{G} \xi &\leq \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \lambda_s^k \overline{1} \end{bmatrix}, \widehat{C} \xi = \zeta. \end{aligned} \quad (25)$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma}_j(\zeta) &= \max_{\xi} \begin{bmatrix} C_x \widehat{A} \\ -C_x \widehat{A} \end{bmatrix}_{\overline{j}} \xi, \\ \text{s.a. } \widehat{G} \xi &\leq \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \lambda_s^k \overline{1} \end{bmatrix}, \widehat{C} \xi = \zeta. \end{aligned} \quad (26)$$

em que  $k = 0, 1, 2, \dots$  representa as iterações. A justificativa é dada a seguir.

Uma vez que  $\widehat{\Omega}$  é OFCI e  $\mathcal{S}$  é invariante condicionado  $\lambda_s$ -contrativo a ação de controle calculada

em (24) força o estado aumentado  $\xi(k) \forall k$  pertencer a:

$$\begin{bmatrix} G_v & \overline{0} \\ G_s & -G_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ z(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \lambda_s^k \overline{1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

e, em particular, que o erro de estimação  $e(k) = x(k) - z(k)$  esteja limitado, em cada iteração, pelos conjuntos:

$$G_s[x(k) - z(k)] \leq \lambda_s^k \overline{1} \quad (28)$$

que é equivalente à contração de  $\mathcal{S}$ . Portanto, pode ser mostrado que, se  $[x(k) - z(k)] \in \lambda_s^k \mathcal{S}$  ( $\lambda_s < 1$ ), então  $[x(k+1) - z(k+1)] \in \lambda_s^{k+1} \mathcal{S}$  e, desta forma,  $[x(k) - z(k)] \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . É evidente que essa estratégia busca aumentar a taxa de convergência da estimativa do estado  $x(k)$ .

Uma escolha natural para  $\mathcal{V}$  seria o máximo conjunto invariante controlado contido em  $\Omega_x$ . Para a escolha do conjunto invariante condicionado  $\mathcal{S}$ , pode ser considerada a seguinte situação: Em um problema típico de projeto de observador de estado, o estado inicial do sistema não é conhecido, mas é possível definir uma região à qual ele pertence. Portanto, se o estado inicial pertence a um conjunto de “confiança”  $x(0) \in \mathcal{S}_{0_x} = \{x : H(x - z_0) \leq \overline{1}\}$ , com  $z_0$  conhecido, tal que, se  $z(0) = z_0$ , então  $e(0) = x(0) - z(0) \in \mathcal{S}_0 = \{e : He \leq \overline{1}\}$ . No entanto, não é comum que o poliedro definido pela incerteza no estado inicial seja invariante condicionado. Nesse caso,  $\mathcal{S}$  pode ser construído como o mínimo conjunto invariante condicionado contendo  $\mathcal{S}_0$  (Dórea, 2009).

## 5 Exemplo Numérico

Considere o sistema (1)-(2) com:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0, 2 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 1].$$

As restrições nas variáveis de estado e controle são dadas respectivamente por:  $\Omega_x = \{x : -3 \leq x_i \leq 25, i = 1, 2\}$  e  $\mathcal{U} = \{u : |u| \leq 5\}$ . Assumimos que o estado inicial pertence ao seguinte conjunto de confiança:  $\mathcal{S}_0 = |x_i(0) - z_{0_i}| \leq 0, 4$ , com  $z_{0_i}$  conhecido.

O conjunto invariante controlado  $\lambda_v$ -contrativo  $\mathcal{V}$  contido no conjunto de restrições iniciais  $\Omega_x$  com taxa de contração  $\lambda_v = 0, 99$  foi calculado usando o algoritmo proposto em Dórea and Henet (1999). Porém, foi verificado que  $\mathcal{V}$  não satisfaz as condições propostas em Dórea (2009) para ser OFCI. Portanto, a ação de controle estática (16) não pode ser implementada. Então, procedemos com o projeto de um compensador dinâmico (seção 4.2) calculando um conjunto invariante condicionado  $\lambda_s$ -contrativo  $\mathcal{S}$  contendo  $\mathcal{S}_0$  com taxa de contração  $\lambda_s = 0, 9$  usando o algoritmo proposto em Dórea and Pimenta (2005). Foi verificado que o par  $(\mathcal{S}, \mathcal{V})$

forma um poliedro OFCI em relação ao sistema aumentado, com taxa de contração  $\lambda = 0,99$ . Na verdade, qualquer par  $(\alpha\mathcal{S}, \mathcal{V})$ , com  $1 \leq \alpha \leq 4,65$  também forma um poliedro OFCI (com uma taxa de contração maior à medida que  $\alpha$  aumenta). Os conjuntos  $\alpha\mathcal{S}$  (com  $\alpha = 4,65$ ),  $\mathcal{V}$  e  $\Omega_x$  são mostrados na Fig. 1.

A condição requerida para os sinais a serem rastreados é que estejam no conjunto de referências constantes rastreáveis. Esse conjunto de referências admissíveis é um poliedro e pode ser calculado como em Blanchini and Miani (2000) e Dórea (2004). O cálculo do conjunto de referências admissíveis produz:  $\mathcal{Y}_R = \{r : -3 \leq r \leq 25\}$ .

Para as simulações consideraremos a seguinte situação: inicialmente, o sistema deve rastrear uma referência constante  $r = -3$ ; então, após 20 segundos, a referência muda para  $r = 1$ ; finalmente, após 30 segundos,  $r = 25$ . A fim de comparar o desempenho dos controladores dinâmicos, o algoritmo 1 foi inicializado com  $\bar{G}^0 = G_s$ ,  $\bar{\rho}^0 = 4.65 * \bar{1}$  (que corresponde ao poliedro  $\alpha\mathcal{S}$  com  $\alpha = 4.65$ ) e  $x(0) \in \alpha\mathcal{S}$ .

Na Fig. 1 é possível ver as trajetórias do vetor de estado que resultam dos controladores dinâmicos desenvolvidos nas seções 4.1 (*controlador 1* - algoritmo 1) e 4.2 (*controlador 2* - ação de controle (24)), com  $x(0) = [0 \ 0]^T$  e  $z(0) = [0 \ 0]^T$ . Na verdade, para o *controlador 2* as restrições são de fato satisfeitas para qualquer condição inicial satisfazendo  $|x_i(0) - z_{0_i}| \leq 0.4$ , com  $z_{0_i}$  conhecido. Se for considerado o par de poliedros  $(\alpha\mathcal{S}, \mathcal{V})$ , então uma incerteza maior sobre o estado inicial é admissível ( $|x_i(0) - z_{0_i}| \leq 4,65 * 0,4$ ). Nas Figuras 2 e 3 são mostradas, respectivamente, a evolução da saída  $y(k)$  e do sinal de controle  $u(k)$ .

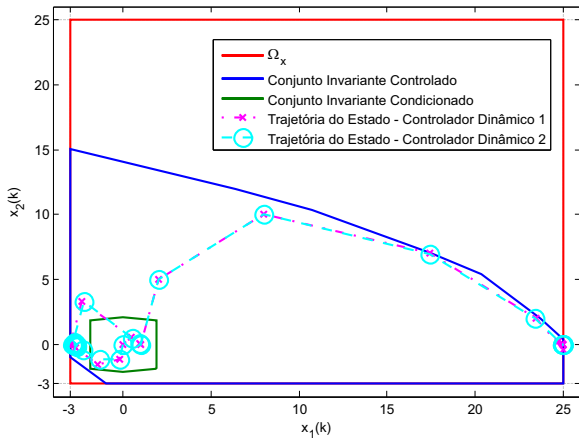


Figura 1: Conjuntos  $\alpha\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \subset \Omega_x$  e as trajetórias do vetor de estado satisfazendo as restrições.

Ressaltamos que, se um dado conjunto poliédrico invariante controlado não for OFCI, a trajetória do vetor de estado durante o transitório do rastreamento de referência pode assumir valores fora desse conjunto. Todavia, sendo o conjunto OFCI, é um dever do controlador assegu-

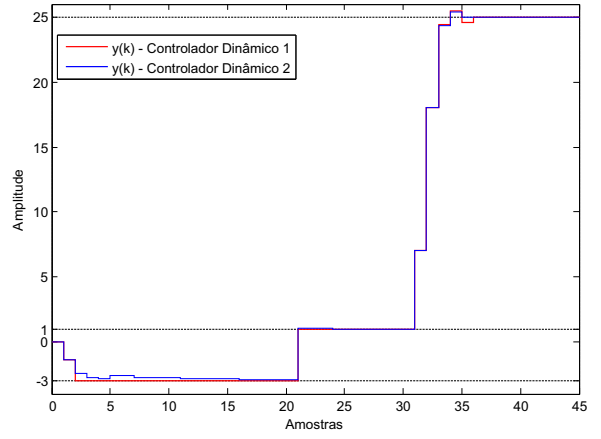


Figura 2: Resposta  $y(k)$ .

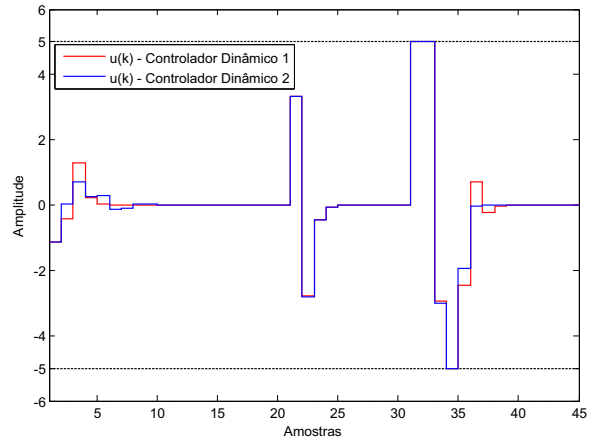


Figura 3: Sinal de controle  $u(k)$ .

rar que as restrições não sejam violadas. Em vista disso, uma vez que  $\mathcal{V}$  não é OFCI, não há garantia de que com o *controlador 1* as restrições serão sempre satisfeitas  $\forall x(0) \in \mathcal{V}$ . Entretanto, se, pelo contrário,  $\mathcal{V}$  fosse OFCI, então  $\forall x(0) \in \mathcal{V} \Rightarrow x(k) \in \mathcal{V} \subset \Omega_x, \forall k$ .

Observa-se, na Fig. 2, que nos instantes iniciais o *controlador 1* apresentou melhor desempenho, visto que a ação de controle é determinada em função do estado verdadeiro mais rapidamente. Foi verificado que a inicialização do algoritmo 1 com  $\bar{G}^0 = G_v$  e  $\bar{\rho}^0 = \bar{1}$  (que corresponde ao poliedro  $\mathcal{V}$ ) de fato não cumpre as restrições. Logo, em razão dos resultados obtidos, trabalhos futuros serão direcionados para verificar para o *controlador 1* (baseado nos *set-valued observers*) inicializado com o poliedro  $\alpha\mathcal{S}$ , se  $\forall x(0) \in \alpha\mathcal{S}, \exists u : x(k) \in \mathcal{V} \subset \Omega_x, \forall k$ , com o par  $(\alpha\mathcal{S}, \mathcal{V})$  OFCI.

A tabela 1 apresenta o tempo médio computacional gasto pelos dois controladores para obtenção do sinal de controle  $u(k)$ . Para os *controladores 1* e *2* foram considerados, respectivamente, o tempo gasto para execução do *passo 2* do algoritmo 1 e o tempo total para resolução dos

problemas (25), (26) e (24).

Tabela 1: Tempo computacional por iteração.

Controlador	$t_{segundos}$
Controlador 1	0,0304
Controlador 2	0,0101

## 6 Conclusões

Neste trabalho foram apresentados dois projetos de controladores por realimentação de saída dinâmica para rastreamento de sinais de referências constantes para sistemas lineares de tempo discreto restritos. Um com base nos conceitos de conjuntos poliédricos OFCI, *set-valued observers* e dinâmica de conjuntos (*controlador 1*). O outro com base nos *set-invariant estimators* e também nos poliedros OFCI (*controlador 2*). Com ambos os controladores uma sequência de controle adequada pode ser calculada *online* para impor as restrições e minimizar o erro de rastreamento para referências constantes.

A ação de controle calculada com o *controlador 1* tem de lidar com muito mais cálculos do que o *controlador 2*, pois são necessárias várias operações envolvendo poliedros. Dado que tais operações precisam ser realizadas *online*, a carga computacional pode ser excessiva e sua implementação prática em sistemas com dinâmica rápida pode se tornar inviável. No entanto, uma vez que são consideradas medições presentes e passadas da saída, rapidamente o controlador descobre a localização do estado. Com o *controlador 2* é considerado para os cálculos do sinal de controle um sistema aumentado que é composto pelo próprio sistema e por um compensador. Como nessa representação, as variáveis de estado estão sendo estimadas pelo compensador inserido no sistema, essa abordagem elimina a necessidade de cálculos excessivos, mas lidará com modelos de dimensão elevada, já que o compensador tem a mesma ordem do sistema.

## Agradecimentos

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação da UFRN (PPgEEC-UFRN) e CAPES, Brasil.

## Referências

- Artstein, Z. and Rakovic, S. V. (2011). Set invariance under output feedback: A set-dynamics approach, *International Journal of Systems Science* **42**(4): 539–555.
- Blanchini, F. (1994). Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced lyapunov functions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(2): 428–433.
- Blanchini, F. and Miani, S. (2000). On the tracking problem for constrained linear systems. Proc. 14th International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems.
- Blanchini, F. and Miani, S. (2015). *Set-Theoretic Methods in Control*, Systems & Control: Foundations & Applications, 2nd edn, Birkhäuser.
- Dórea, C. E. T. (2004). Self-bounded (A,B)-invariant polyhedra and constant reference tracking in constrained linear systems, *Sba: Controle & Automação. Sociedade Brasileira de Automatica* **15**(1): 10–16.
- Dórea, C. E. T. (2009). Output-feedback controlled-invariant polyhedra for constrained linear systems, *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, China, pp. 5317–5322.
- Dórea, C. E. T. and Hennes, J. C. (1999). (A,B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems, *Journal of Optimization Theory and Applications* **103**(3): 521–542.
- Dórea, C. E. T. and Pimenta, A. C. C. (2005). Design of set-invariant estimators for linear discrete-time systems, *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, pp. 7235–7240.
- Gilbert, E. G. and Tan, K. T. (1991). Linear systems with state and control constraints: the theory and application of maximal output admissible sets, *IEEE Transactions on Automatic Control* **36**(9): 1008–1020.
- Hennes, J.-C. (1995). Discrete time constrained linear systems, in C. Leondes (ed.), *Discrete-Time Control System Analysis and Design*, Vol. 71 of *Control and Dynamic Systems*, Academic Press, pp. 157–213.
- Herceg, M., Kvasnica, M., Jones, C. N. and Morari, M. (2013). Multi-parametric toolbox 3.0, *2013 European Control Conference (ECC)*, Zurich, Switzerland, pp. 502–510.
- Schrijver, A. (1986). *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA.
- Shamma, J. S. and Tu, K.-Y. (1999). Set-valued observers and optimal disturbance rejection, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(2): 253–264.
- Silveira Jr, J. I. S. (2016). *Seguimento de Referência para Sistemas Lineares Incertos Sujeitos a Restrições*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.