

Filtragem Computacional de Kalman *Fuzzy* Tipo-2 para Rastreamento e Previsão da Dinâmica de Propagação da COVID-19: Estudo de Caso Aplicado ao Brasil

Daiana Caroline dos Santos Gomes*
Ginalber Luiz de Oliveira Serra**

* *Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga, São Luís, Maranhão, (e-mail: daianagomes159@gmail.com).*

** *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, Maranhão, (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: In this paper, a computational model for analysis of the COVID-19 dynamic propagation, using type-2 fuzzy systems, is proposed. The adopted methodology consists of recursive parametric estimation of an interval type-2 fuzzy Kalman filter for tracking and forecasting of the dynamics inherited to experimental data, using an interval type-2 fuzzy version of Observer/Kalman Filter Identification (OKID) algorithm. The partitioning of the experimental data is performed by interval type-2 fuzzy Gustafson-Kessel clustering algorithm. The interval Kalman gains in the consequent proposition of interval type-2 fuzzy Kalman filter are updated according to unobservable components computed by recursive spectral decomposition of experimental data. Experimental results illustrate the efficiency and applicability of the proposed methodology for adaptive and real time tracking and forecasting the dynamic propagation behavior of novel Coronavirus 2019 (COVID-19) outbreak in Brazil when compared to relevant approaches from the literature.

Resumo: Neste artigo é proposto um modelo computacional para a análise da dinâmica de propagação da COVID-19 utilizando sistemas *fuzzy* tipo-2. A metodologia adotada consiste na estimação paramétrica recursiva de um filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento e previsão da dinâmica presente nos dados experimentais, usando uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID). O particionamento dos dados experimentais é obtido pelo algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel *fuzzy* tipo-2 intervalar. Os ganhos de Kalman intervalares na proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar são atualizados de acordo com as componentes não observáveis obtidas por meio da decomposição espectral recursiva dos dados experimentais. Resultados experimentais ilustram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta para rastreamento e previsão adaptativa em tempo real do comportamento de propagação dinâmica do novo Coronavírus 2019 (COVID-19) no Brasil quando comparada a abordagens relevantes da literatura.

Keywords: epidemiological data; computational model; interval type-2 fuzzy systems; Kalman filtering; Covid-19.

Palavras-chaves: dados epidemiológicos; modelo computacional; sistemas *fuzzy* tipo-2 intervalares; filtragem de Kalman; Covid-19.

1. INTRODUÇÃO

Com o início do surto epidêmico do novo Coronavírus e sua rápida propagação por diversos países, pesquisadores vêm propondo novos estudos e contribuições como um esforço no combate e entendimento da COVID-19 (Kang et al., 2020; Zhong et al., 2020; Chakraborty and Maity, 2020). A modelagem computacional aplicada a análise de dados epidemiológicos tem recebido grande interesse pela comunidade científica com o objetivo de caracterizar a dinâmica de propagação do novo Coronavírus e contribuir

para seu controle e prevenção (Mohd and Sulayman, 2020; Rustam et al., 2020; Kim et al., 2020b).

Grande parte das estruturas de modelos aplicadas a dados epidemiológicos apresentam limitações de processamento perante a presença de incertezas (subnotificação, período de incubação do vírus, tempo de atendimento e diagnóstico) e de adaptabilidade em tempo real de seus parâmetros perante a variação na dinâmica dos dados. Sistemas *fuzzy* têm sido largamente utilizados para modelagem de dados experimentais incertos com aplicações também na área da saúde (Kim et al., 2020a; Khodaei-Mehr et al., 2018). O sucesso das aplicações de sistemas

fuzzy é devido a sua estrutura baseada em regras, capaz de fazer aproximação de não linearidades e incertezas (Serra, 2012). Recentemente, sistemas *fuzzy* tipo-2 tem se destacado em diversas aplicações devido sua maior capacidade em lidar com informações incertas (Mendel, 2019; Evangelista and Serra, 2019). Ainda, estudos envolvendo a integração de sistemas *fuzzy* e filtros de Kalman (FK) já foram propostos na literatura (Pires and Serra, 2020; Bouhental et al., 2019). O amplo interesse pelo FK é devido a sua característica de otimalidade, forma conveniente para processamento online em tempo real, fácil formulação e implementação (Serra, 2018). Portanto, a metodologia proposta neste artigo está baseada no projeto de filtros de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalares para rastreamento e previsão adaptativa em tempo real do comportamento de propagação dinâmica aplicada aos dados epidemiológicos da COVID-19. Neste contexto, as principais contribuições que garantem a originalidade da metodologia proposta são:

- Aplicabilidade para previsão adaptativa em tempo real de dados experimentais incertos, o que é útil para a análise de propagação da COVID-19;
- Formulação de uma nova versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento Gustafson-Kessel (GK) para estimação da proposição do antecedente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2;
- Formulação de uma nova versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID), para atualização recursiva da proposição do conseqüente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 baseado nas componentes não-observáveis espectrais extraídas a partir dos dados experimentais.

2. MODELAGEM COMPUTACIONAL DO FILTRO DE KALMAN FUZZY TIPO-2 INTERVALAR

Nesta seção, a formulação da metodologia proposta para o projeto do modelo computacional do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, a partir das componentes não-observáveis extraídas dos dados experimentais, é apresentada.

2.1 Pré-Processamento por Análise Espectral Singular

Etapa de Treinamento Seja o conjunto de dados experimentais inicial referente as p saídas do sistema dinâmico sob análise, com N_b amostras, dado por:

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \dots \quad \mathbf{y}_{N_b}], \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p \times N_b} \quad (1)$$

onde $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$, com $k = 1, \dots, N_b$, é o vetor de dados experimentais no instante de tempo k . A partir deste conjunto de dados inicial, uma matriz trajetória \mathbf{H} é definida para cada uma das dimensões de \mathbf{y} , considerando um conjunto de ρ vetores atrasados com dimensão δ , o qual é um número inteiro definido pelo usuário com $2 \leq \delta \leq N_b - 1$ e $\rho = N_b - \delta + 1$, dada por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_\rho \\ y_2 & y_3 & y_4 & \dots & y_{\rho+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_\delta & y_{\delta+1} & y_{\delta+2} & \dots & y_{N_b} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\delta \times \rho} \quad (2)$$

e a matriz de covariância \mathbf{S} é obtida como segue:

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T, \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta} \quad (3)$$

Aplicando-se a decomposição em valores singulares à matriz \mathbf{S} , é obtido um conjunto de autovalores em ordem decrescente tal que $\sigma^1 \geq \sigma^2 \geq \dots \geq \sigma^\delta \geq 0$ com seus respectivos autovetores $\phi^1, \phi^2, \dots, \phi^\delta$. Considerando $d = \max\{\zeta, \text{tal que } \sigma^\zeta > 0\}$ e $\mathbf{V}^\zeta = \mathbf{H}^T \phi^\zeta / \sqrt{\sigma^\zeta}$ com $\zeta = 1, \dots, d$, a decomposição em valores singulares da matriz trajetória \mathbf{H} , pode ser reescrita como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2 + \dots + \mathbf{H}^d \quad (4)$$

onde a matriz $\mathbf{H}^\zeta |^{\zeta=1, \dots, d}$ é elementar (apresenta *rank* igual a 1) e é dada por:

$$\mathbf{H}^\zeta = \sqrt{\sigma^\zeta} \phi^\zeta \mathbf{V}^{\zeta T}, \quad \mathbf{H}^\zeta \in \mathbb{R}^{\delta \times \rho} \quad (5)$$

O reagrupamento das matrizes $\mathbf{H}^\zeta |^{\zeta=1, \dots, d}$ em ξ termos matriciais linearmente independentes $\mathbf{I}^j |^{j=1, \dots, \xi}$, tal que $\xi \leq d$, resulta em

$$\mathbf{H} = \mathbf{I}^1 + \mathbf{I}^2 + \dots + \mathbf{I}^\xi \quad (6)$$

onde ξ é o número de componentes não-observáveis extraídas a partir dos dados experimentais. As componentes não-observáveis espectrais $\alpha^j |^{j=1, \dots, \xi}$ extraídas, obtidas a partir das matrizes $\mathbf{I}^j |^{j=1, \dots, \xi}$, são dadas por:

$$\alpha_k^j = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^{k+1} I_{\nu, k-\nu+1}^j & 1 \leq k \leq \delta^* \\ \frac{1}{\delta^*} \sum_{\nu=1}^{\delta^*} I_{\nu, k-\nu+1}^j & \delta^* \leq k \leq \rho^* \\ \frac{1}{N_b - k + 1} \sum_{\nu=k-\rho^*+1}^{N_b - \rho^* + 1} I_{\nu, k-\nu+1}^j & \rho^* < k \leq N_b \end{cases} \quad (7)$$

onde $\delta^* = \min(\delta, \rho)$, $\rho^* = \max(\delta, \rho)$ e $N_b = \delta + \rho - 1$.

Etapa Recursiva Após a inicialização do algoritmo de análise espectral na etapa de treinamento, os próximos passos são repetidos a cada instante de tempo $k = N_b + 1, N_b + 2, \dots$, conforme método formulado como segue. O valor de ρ é incrementado por:

$$\rho = k - \delta + 1 \quad (8)$$

A matriz de covariância é atualizada recursivamente, como segue:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_{k-1} + \mathbf{Y}_k, \quad \mathbf{S}_k \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta} \quad (9)$$

onde $\mathbf{Y}_k = \psi_k \psi_k^T \in \mathbb{R}^{\delta \times \delta}$ com $\psi_k = [y_\rho, y_{\rho+1}, \dots, y_k]^T \in \mathbb{R}^{\delta \times 1}$. Aplicando-se decomposição em valores singulares à matriz de covariância \mathbf{S}_k , o conjunto de autovalores e seus respectivos autovetores são atualizados tal que a saída y_k do sistema dinâmico pode ser reescrita por:

$$y_k = h_k^1 + h_k^2 + \dots + h_k^d \quad (10)$$

onde $h_k^\zeta = \kappa_k^\zeta \psi_k^T \phi_k^\zeta$, com $\zeta = 1, \dots, d$, tal que κ_k^ζ corresponde ao último elemento do autovetor ϕ_k^ζ . Finalmente, o reagrupamento dos elementos $h_k^\zeta |^{\zeta=1, \dots, d}$ em ξ termos disjuntos $I_k^j |^{j=1, \dots, \xi}$, resulta em

$$y_k = I_k^1 + I_k^2 + \dots + I_k^\xi \quad (11)$$

tal que $I_k^j = \alpha_k^j$, com $j = 1, \dots, \xi$ e $k = N_b + 1, N_b + 2, \dots$, representa as amostras das componentes não-observáveis espectrais extraídas no instante de tempo k .

2.2 Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar

A estrutura adotada para o filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar apresenta a $i^{|i=1,2,\dots,c|}$ -ésima regra *fuzzy* dada por:

$$R^{(i)} : \text{IF } \mathbf{Z}_k \text{ IS } \widetilde{W}^i \\ \text{THEN } \begin{cases} \widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{y}}_k^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (12)$$

com n -ésima ordem, m entradas, p saídas, onde \mathbf{Z}_k é a variável linguística do antecedente; \widetilde{W}^i é o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar; $\widetilde{\mathbf{x}}_k^i \in \mathbb{R}^n$ é vetor de estados estimados intervalar do sistema dinâmico; $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas estimadas intervalar e $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada. As matrizes $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ são, respectivamente, de estados, entrada, saída, transmissão direta e ganho de Kalman, as quais são parâmetros incertos que descrevem a dinâmica do sistema não-linear dentro de uma região de incerteza. O erro residual $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i$ para a i -ésima regra é definido como $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i = \mathbf{y}_k - \widetilde{\mathbf{y}}_k^i$, onde $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ é a saída real do sistema dinâmico e $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída intervalar estimada pelo i -ésimo submodelo linear.

O filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar aproxima o comportamento dinâmico dos dados experimentais através da soma ponderada de filtros de Kalman definidos na proposição do consequente das regras *fuzzy*, de acordo com os graus de ativação intervalares $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$, como segue:

$$\widetilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k \\ + \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \quad (13)$$

$$\widetilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \quad (14)$$

com $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = \left[\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right]$, onde $\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ e $\overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ corresponde aos graus de ativação superior e inferior da i -ésima regra, respectivamente, e c é o número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, tal que:

$$\sum_{i=1}^c \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = 1, \quad \widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \geq 0 \quad (15)$$

Estimação Paramétrica do Antecedente O particionamento dos dados experimentais implica na definição das regiões de operação e do número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar. Uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento Gustafson Kessel (Babuska, 1998), é proposto, o qual é formulado como segue. Dado um conjunto de dados experimentais \mathbf{Z} de tamanho N_b , define-se o número de agrupamentos $1 < c < N_b$; a matriz de partição inicial intervalar $\widetilde{\mathbf{U}}^{(0)} \in \mathbb{R}^{c \times N_b}$,

a tolerância $\mathcal{E} > 0$ e o expoente de ponderação intervalar $\widetilde{m} = [\underline{m}, \overline{m}]$, onde \underline{m} e \overline{m} correspondem, respectivamente, ao expoente de ponderação das funções de pertinência superior e inferior do conjunto *fuzzy* intervalar \widetilde{W}^i .

Repetir para $l = 1, 2, \dots$

Passo 1 - Cálculo dos centros dos agrupamentos $\widetilde{\mathbf{v}}^{i(l)}$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}^{i(l)} = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\widetilde{m}} \mathbf{Z}_k}{\sum_{k=1}^N \left(\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\widetilde{m}}}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (16)$$

Passo 2 - Cálculo da matriz de covariância $\widetilde{\mathbf{F}}^i$ dos agrupamentos:

$$\widetilde{\mathbf{F}}^i = \frac{\sum_{k=1}^N \left(\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\widetilde{m}} (\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i(l)}) (\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T}{\sum_{k=1}^N \left(\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)^{i(l-1)} \right)^{\widetilde{m}}}, \quad (17)$$

$1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N_b$

Passo 3 - Cálculo das distâncias $\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i}^i$:

$$\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i}^i = \sqrt{(\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i(l)})^T \left[\det(\widetilde{\mathbf{F}}^i)^{1/n} (\widetilde{\mathbf{F}}^i)^{-1} \right] (\mathbf{Z}_k - \widetilde{\mathbf{v}}^{i(l)})} \quad (18)$$

Passo 4 - Atualização da matriz de partição $\widetilde{\mathbf{U}}^{(l)}$:

Se $\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i}^i > 0$ para $1 \leq i \leq c, 1 \leq k \leq N_b$

$$\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \left[\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right] \quad (19)$$

onde

$$\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \min \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i}^i}{\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^j}^j} \right)^{2/(\underline{m}-1)}} \right], \quad (20)$$

$$\overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = \max \left[\frac{1}{\sum_{j=1}^c \left(\frac{\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^i}^i}{\widetilde{D}_{k\widetilde{\mathbf{F}}^j}^j} \right)^{2/(\overline{m}-1)}} \right], \quad (21)$$

Senão $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) = [0, 0]$ com $\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) \in [0, 1]$ e $\overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^{i(l)}(\mathbf{Z}_k) \in [0, 1]$

Até $\left\| \widetilde{\mathbf{U}}^{(l)} - \widetilde{\mathbf{U}}^{(l-1)} \right\| < \mathcal{E}$

Estimação Paramétrica do Consequente Para a estimação da proposição do consequente das regras *fuzzy*, uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo OKID (*Observer/Kalman Filter Identification*) (Juang, 1994), é proposto, o qual é formulado como segue: Seja o conjunto de dados experimentais \mathbf{Z} , tal que $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_k \quad \boldsymbol{\alpha}_k^*]^T$, com $k = 1, \dots, N_b$, onde $\boldsymbol{\alpha}_k^* \in \mathbb{R}^p$ corresponde às componentes espectrais extraídas a partir dos dados experimentais que apresentam maior autovalor associado. Escolhe-se o número apropriado de parâmetros de Markov q e executa-se os seguintes passos:

Passo 1 - Cálculo da matriz de regressores $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{R}^{[(m+p)q+m] \times N_b}$:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_q & \mathbf{u}_{q+1} & \cdots & \mathbf{u}_{N_b-1} \\ \mathbf{Z}_{q-1} & \mathbf{Z}_q & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-2} \\ \mathbf{Z}_{q-2} & \mathbf{Z}_{q-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0 & \mathbf{Z}_1 & \cdots & \mathbf{Z}_{N_b-q-1} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Passo 2 - Cálculo dos parâmetros de Markov do observador intervalares para a i -ésima regra $\tilde{\mathbf{Y}}^i$:

$$\tilde{\mathbf{y}}^T = \sum_{i=1}^c \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \boldsymbol{\Lambda}^T \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} \quad (23)$$

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_q) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_{q+1}) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_{N_b-1}) \end{bmatrix} \quad (24)$$

é a matriz diagonal de ponderação da i -ésima regra *fuzzy* obtida a partir do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel;

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}^i &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_k^i & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i & \cdots & \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i(q-1)} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_0^i & \tilde{\mathbf{Y}}_1^i & \tilde{\mathbf{Y}}_2^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_q^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_0^i & \tilde{\mathbf{Y}}_1^i & \tilde{\mathbf{Y}}_2^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_q^i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

são os parâmetros de Markov do observador da i -ésima regra, tal que:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i, -\tilde{\mathbf{K}}_k^i \end{bmatrix} \quad (27)$$

e $\tilde{\mathbf{y}}$ é a saída intervalar estimada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2. Manipulando (23), tem-se:

$$\boldsymbol{\Lambda} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \mathbf{y}^T = \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \boldsymbol{\Lambda}^T \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} \quad (28)$$

onde $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{N_b}] \in \mathbb{R}^{p \times N_b}$ corresponde ao vetor de dados experimentais. Assumindo $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^i = \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \boldsymbol{\Lambda}^T$ e $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^i = \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^i \mathbf{y}^T$, (28) é reescrita como segue:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^i \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^i \quad (29)$$

Equação (29) é solucionada pelo método de fatoração QR (Chen, 1999), o qual é numericamente robusto, uma vez que evita operações de inversa de matriz. Aplicando fatoração QR no termo $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^i$ no lado direito de (29), tem-se:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^i \tilde{\mathbf{R}}^i \tilde{\mathbf{Y}}^{iT} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}^i \quad (30)$$

onde $\tilde{\mathbf{Q}}^i$ é uma matriz ortogonal, tal que $(\tilde{\mathbf{Q}}^i)^{-1} = (\tilde{\mathbf{Q}}^i)^T$

e $\tilde{\mathbf{R}}^i$ é uma matriz triangular superior. Uma vez que a matriz $\tilde{\mathbf{R}}^i$ é triangular superior, (30) é solucionada por substituição retroativa, obtendo-se o vetor de parâmetros de Markov do observador $\tilde{\mathbf{Y}}^i$.

Passo 3 - Cálculo dos parâmetros de Markov do sistema e do ganho do observador:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0^i = \tilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}^{i(j-1)} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad (32)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\tilde{\mathbf{C}}_k^i \left(\tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \left(\tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i \right), \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{C}}_k^i \left(\tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \tilde{\mathbf{K}}_k^i \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)} & , & -\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (34)$$

Os parâmetros de Markov intervalares do sistema $\tilde{\mathbf{Y}}_j^i$ são obtidos como segue:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_0^i = \tilde{\mathbf{Y}}_0^i = \tilde{\mathbf{D}}_k^i \quad (35)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)} - \sum_{\iota=1}^j \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{for } j = 1, \dots, q \quad (36)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = - \sum_{\iota=1}^q \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^i, \quad \text{for } j = q+1, \dots, \infty \quad (37)$$

e os parâmetros de Markov intervalares do ganho do observador são obtidos por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1^{i\circ} = \tilde{\mathbf{Y}}_1^{i(2)} = \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (38)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i\circ} = \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} - \sum_{\iota=1}^{j-1} \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i\circ}, \quad \text{para } j = 2, \dots, q \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i\circ} = - \sum_{\iota=1}^q \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i\circ}, \quad \text{para } j = q+1, \dots, \infty \quad (40)$$

Passo 4 - Construir a matriz de Hankel $\tilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$:

$$\tilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta-1}^i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+2}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma-1}^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (41)$$

onde γ e β são inteiros arbitrários.

Passo 5 - Para $j = 1$, decompor $\tilde{\mathbf{H}}^i(0)$ usando decomposição em valores singulares:

$$\tilde{\mathbf{H}}^i(0) = \tilde{\boldsymbol{\Xi}}^i \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^i \tilde{\boldsymbol{\Psi}}^{iT} \quad (42)$$

onde $\tilde{\boldsymbol{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \alpha p}$ e $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times \beta m}$ são matrizes ortogonais e $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{\alpha p \times \beta m}$ é a matriz diagonal de valores

singulares referente ao conjunto de dados experimentais.
Passo 6 - Cálculo da matrizes de observabilidade $\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$ e controlabilidade $\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i$:

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \tilde{\Xi}_n^i \left(\tilde{\Sigma}_n^i \right)^{1/2} \quad (43)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left(\tilde{\Sigma}_n^i \right)^{1/2} \tilde{\Psi}_n^{i^T} \quad (44)$$

onde

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \left[\tilde{\mathbf{C}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i^2} \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i^{\gamma-1}} \right]^T \quad (45)$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left[\tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{i^2} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{i^{\beta-1}} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \right] \quad (46)$$

Passo 7 - Cálculo das matrizes que compõe a proposição do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = \left(\tilde{\Sigma}_n^i \right)^{-1/2} \tilde{\Xi}_n^{i^T} \tilde{\mathbf{H}}_n^i(1) \tilde{\Psi}_n^i \left(\tilde{\Sigma}_n^i \right)^{-1/2} \quad (47)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i \quad (48)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_k^i = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \quad (49)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_0^i \quad (50)$$

Passo 8 - Cálculo da matriz de ganho de Kalman intervalar:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\tilde{\mathcal{P}}_\beta^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (51)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{i^T} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{i^T} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (52)$$

Assumindo $\tilde{\mathbf{A}}^i = -\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{i^T} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$ e $\tilde{\mathbf{N}}^i = \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{i^T} \tilde{\Gamma}^i \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o}$, (52) é reescrita como segue:

$$\tilde{\mathbf{A}}^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i = \tilde{\mathbf{N}}^i \quad (53)$$

Equação (53) é solucionada pelo método de fatoração QR aplicado ao termo $\tilde{\mathbf{A}}^i$ para obtenção de $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$, da mesma forma como realizado no **Passo 2**.

Atualização Recursiva do Modelo Fuzzy Tipo-2 Intervalar
 Considerando o vetor de regressores no instante de tempo $k = N_b + 1, k = N_b + 2, \dots$, dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = [\mathbf{u}_{k+1} \quad \mathbf{Z}_k \quad \mathbf{Z}_{k-1} \quad \dots \quad \mathbf{Z}_{k-q}]^T \quad (54)$$

os parâmetros de Markov do observador intervalares $\tilde{\mathbf{Y}}_k^i$ são obtidos pela atualização recursiva de (29), como segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^i = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (55)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^i = \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \mathbf{y}_k^T \quad (56)$$

Uma vez que $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$ e $\tilde{\mathbf{x}}_k^i$ foram atualizados e aplicando-se fatoração QR em $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$, os parâmetros de Markov do observador $\tilde{\mathbf{Y}}_k^i$ são atualizados. A proposição do consequente das regras *fuzzy* é atualizado recursivamente repetindo os Passos 3 a 7. De forma similar, a matriz de ganho de Kalman intervalar $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$ é obtida pela atualização recursiva de (53), como segue:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k^i = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (57)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_k^i = \tilde{\mathbf{n}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{\tilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \boldsymbol{\lambda}_k^T \quad (58)$$

Uma vez que $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$ e $\tilde{\mathbf{n}}_k^i$ foram atualizados, e aplicando-se o método de fatoração QR em $\tilde{\mathbf{u}}_k^i$, a matriz de ganho de Kalman *fuzzy* intervalar é atualizada a cada instante de tempo k .

3. RESULTADOS

Nesta seção, resultados da metodologia proposta aplicada à previsão do comportamento de propagação dinâmica da COVID-19, bem como uma análise comparativa a outra abordagem de previsão proposta na literatura, considerando os dados experimentais de óbitos diários registrados por Coronavírus no Brasil, são apresentados.

Os dados experimentais de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020 no Brasil, são mostrados na Fig. 1, os quais foram obtidos na base de dados atualizada diariamente pelo Ministério da Saúde¹. Uma vez que o problema de interesse, neste artigo, está

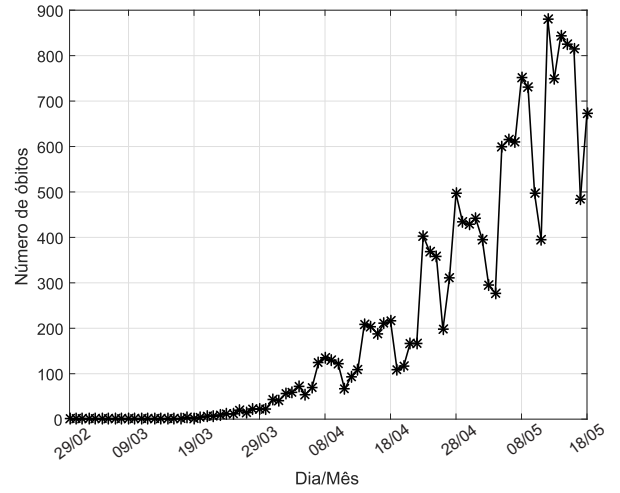


Figura 1. Dados experimentais referentes ao número de óbitos diários registrados no período de 29 de Fevereiro a 18 de Maio de 2020, no Brasil.

baseado nas séries temporais relacionadas ao número de óbitos diários registrados no Brasil, a variável \mathbf{u}_k , em (12) do modelo proposto, é considerada como um sinal de ruído branco com baixa amplitude. A métrica *Variance Accounted For* (VAF) foi considerada como critério para avaliação do número apropriado de componentes a serem extraídas, dentro da faixa de 2 a 15 componentes, para melhor representação dos dados experimentais. Considerando o balanço custo-benefício para a aplicação prática computacional da metodologia proposta, o número apropriado de componentes não-observáveis obtido foi $\xi = 10$, com valor de VAF de 99,98%. O comportamento temporal das componentes espectrais extraídas dos dados experimentais é mostrado na Fig. 2. As partições dos dados experimentais foram definidas pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Gustafson-Kessel, conforme mostrado na Fig. 3. Para implementação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 proposto, os seguintes parâmetros foram adotados: número de agrupamentos $c = 3$, expoente de ponderação intervalar $\tilde{m} = [1, 5 \quad 2, 3]$ e tolerância $\mathcal{E} = 10^{-5}$. A imple-

¹ Disponível em: <https://covid.saude.gov.br/>

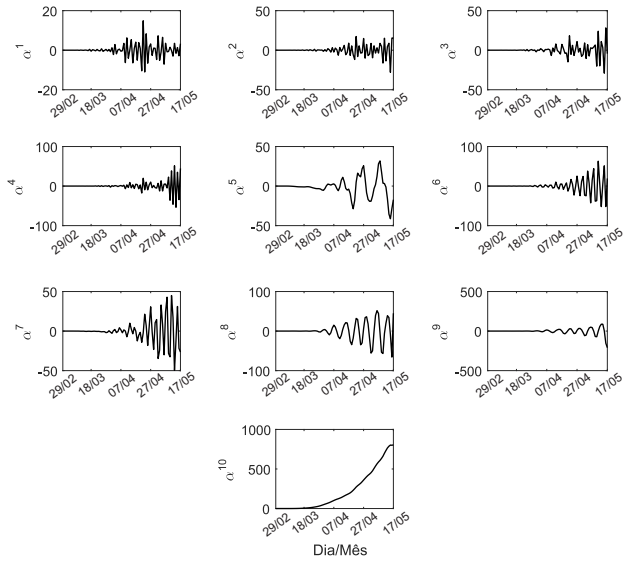


Figura 2. Comportamento temporal das componentes não-observáveis espectrais $\alpha^j | j=1, \dots, 10$ extraídas a partir dos dados experimentais.

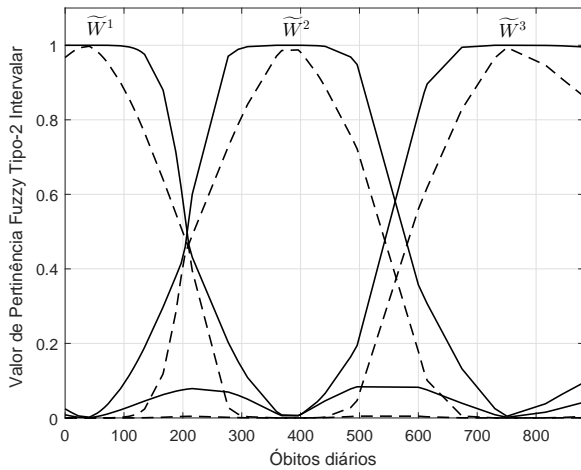


Figura 3. Funções de pertinência *fuzzy* tipo-2 intervalares estimadas pelo agrupamento dos dados referentes aos óbitos diários registrados no Brasil.

mentação do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, para estimação paramétrica da proposição do consequente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 em (12), considera os seguintes valores de parâmetros: $q = 1$, $\gamma = 15$ e $\beta = 15$. A região de confiança, conforme mostrada na Fig. 4, criada pela estimação inicial do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, ilustra a eficiência da metodologia proposta para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil.

A partir da região de confiança mostrada na Fig. 4, projeções de distribuições normais intervalares foram estimadas, definindo os limites superior e inferior para a previsão de futuros óbitos diários no Brasil. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado na etapa de treinamento, para prever dados experimentais futuros (validação) de óbitos diários registrados no período de 19 de Maio a 27 de Maio de 2020, é mostrada na Fig.

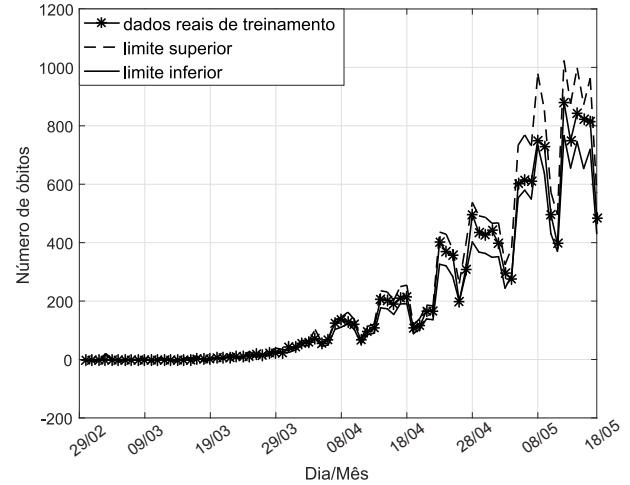


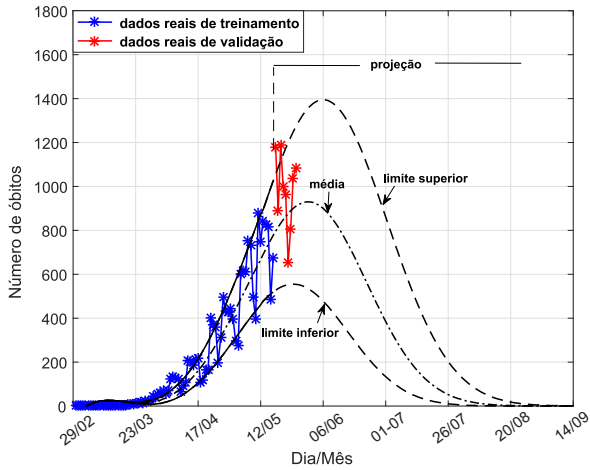
Figura 4. Região de confiança gerada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar para rastreamento dos dados experimentais referentes aos óbitos diários registrados no Brasil.

5a. Conforme é observado que a projeção de distribuição normal intervalar não é mais suficiente para representar o comportamento dos dados epidemiológicos de validação, uma nova atualização do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar é necessária para novo rastreamento e previsão de futuros óbitos diários. De acordo com esse critério, atualizações recursivas do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar foram realizadas nos dias 27 de Maio, 30 de Junho, 23 de Julho, 14 de Agosto e 28 de Agosto de 2020, as quais são mostradas nas Figs. 5b, 5c, 5d, 5e e 5f, respectivamente. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva, para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19, no período de 18 de Maio de 2020 a 30 de Agosto de 2020, foi validado através do critério VAF, conforme mostrado na Fig. 6. A fim de demonstrar a eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado na metodologia proposta, uma análise comparativa com a abordagem proposta em (Feroze, 2020) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil, a partir de dados referentes ao número de casos acumulados, considerando os critérios de validação RMSE (*Root Mean Square Error*), MAE (*Mean Absolute Error*) e RMSPE (*Root Mean Square Percentage Error*), para um horizonte de previsão de 30 dias, foi realizada. Os resultados da análise comparativa são apresentados na Tabela 1.

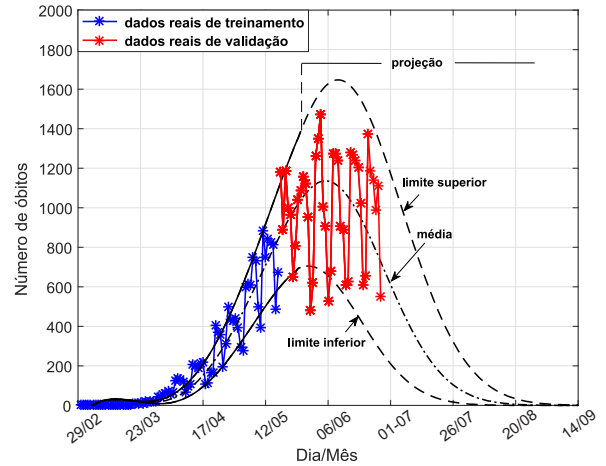
Tabela 1. Eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, baseado na metodologia proposta, comparada a abordagem proposta em (Feroze, 2020), com aplicações à dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil.

	RMSE	MAE	RMSPE
abordagem em (Feroze, 2020)	3669,000	2533,000	0,0873
metodologia proposta	531,472	97,000	0,0249

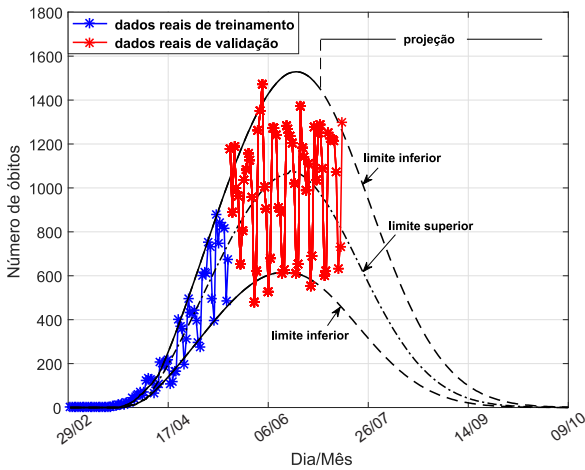
Pode ser observado a eficiência na adaptabilidade das projeções de distribuições normais intervalares, criadas em tempo real pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, quando comparada a abordagem proposta em (Feroze,



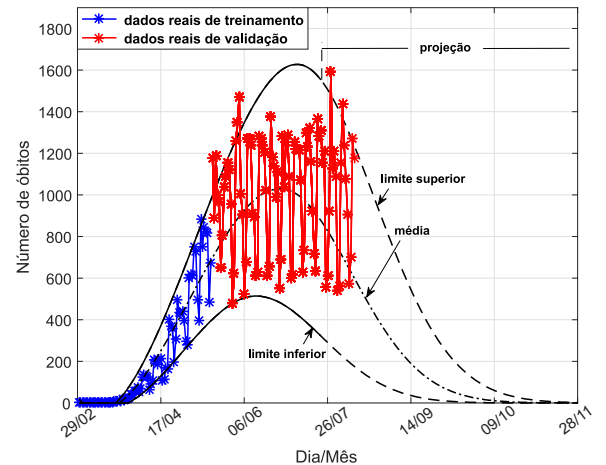
(a) Previsão no período de 19 de Maio a 27 de Maio de 2020, para o Brasil.



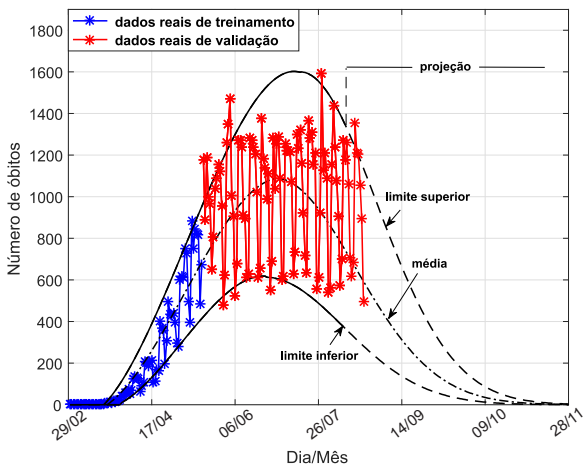
(b) Previsão no período de 28 de Maio a 30 de Junho de 2020, para o Brasil.



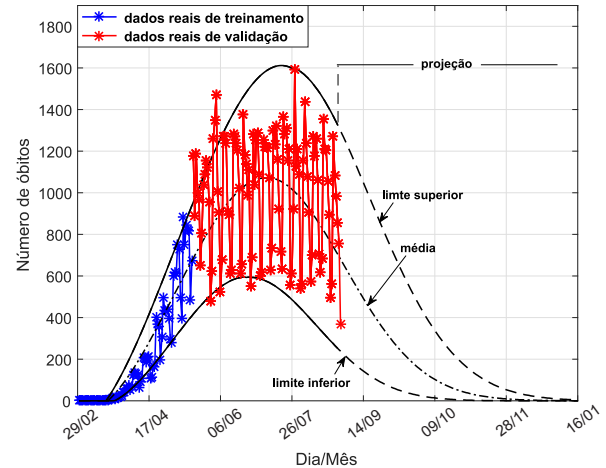
(c) Previsão no período de 01 de Julho a 23 de Julho de 2020, para o Brasil.



(d) Previsão no período de 24 de Julho a 13 de Agosto de 2020, para o Brasil.



(e) Previsão no período de 15 de Agosto a 28 de Agosto de 2020, para o Brasil.



(f) Previsão no período de 29 de Agosto em diante, para o Brasil.

Figura 5. Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação da COVID-19 relacionados aos óbitos diários registrados no Brasil: (a) atualização baseada nos dados de treinamento de 18 de Março a 18 de Maio de 2020; (b) atualização recursiva realizada em 27 de Maio de 2020; (c) atualização recursiva realizada em 30 de Junho de 2020; (d) atualização recursiva realizada em 23 de Julho de 2020; (e) atualização recursiva realizada em 14 de Agosto de 2020; (f) atualização recursiva realizada em 28 de Agosto de 2020.

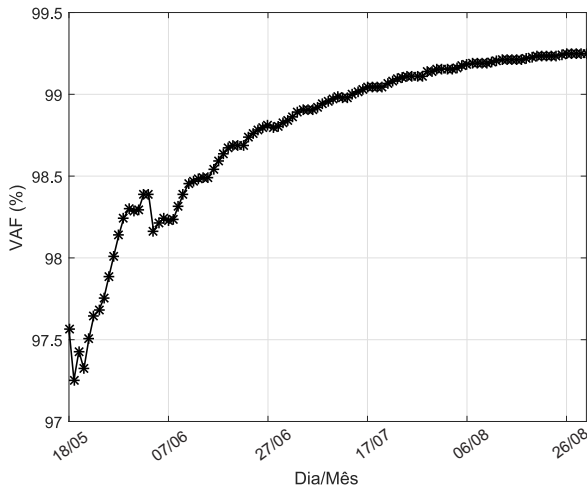


Figura 6. Eficiência em tempo real, baseada no critério de validação VAF, do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar, durante sua atualização recursiva, para rastreamento e previsão da propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil.

2020), o que ilustra sua aplicabilidade para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19.

4. CONCLUSÃO

Neste artigo, uma abordagem para projeto de filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar baseado em dados experimentais, foi proposta. Os resultados experimentais mostraram a aplicabilidade do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 projetado, devido seu mecanismo de atualização recursivo, para previsão adaptativa e em tempo real da dinâmica de propagação da COVID-19, apresentando melhor desempenho quando comparado a outra abordagem de previsão proposta na literatura. A partir da atualização recursiva realizada em 28 de Agosto de 2020, é possível inferir que o mês de Novembro é mais adequado para reavaliar a flexibilização das atividades sociais no Brasil. Para fins de trabalhos futuros, a formulação e aplicabilidade da metodologia proposta no contexto de sistemas *fuzzy* tipo-2 evolutivos, é de particular interesse.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão (PPGEE/UFMA) pelo suporte ao desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

Babuska, R. (1998). *Fuzzy Modeling Control*. Kluwer Academic Publishers.

Bouhental, M., Ghanai, M., and Chafaa, K. (2019). Interval-valued membership function estimation for fuzzy modeling. *Fuzzy Sets and Systems*, 361, 101–113. doi:10.1016/j.fss.2018.06.008.

Chakraborty, I. and Maity, P. (2020). COVID-19 outbreak: Migration, effects on society, global environment and

prevention. *Science of The Total Environment*, 728, 138882. doi:10.1016/j.scitotenv.2020.138882.

Chen, C.T. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press.

Evangelista, A.P.F. and Serra, G.L.O. (2019). Multivariable state-space recursive identification algorithm based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 30(6), 921–942. doi:10.1007/s40313-019-00528-0.

Feroze, N. (2020). Forecasting the patterns of COVID-19 and causal impacts of lockdown in top five affected countries using bayesian structural time series models. *Chaos, Solitons & Fractals*, 140, 110196. doi:10.1016/j.chaos.2020.110196.

Juang, J.N. (1994). *Applied System Identification*. Prentice Hall.

Kang, H., Xia, L., Yan, F., Wan, Z., Shi, F., Yuan, H., Jiang, H., Wu, D., Sui, H., Zhang, C., and Shen, D. (2020). Diagnosis of coronavirus disease 2019 (COVID-19) with structured latent multi-view representation learning. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1–1. doi:10.1109/tmi.2020.2992546.

Khodaei-Mehr, J., Tangestanizadeh, S., Vatankhah, R., and Sharifi, M. (2018). Optimal neuro-fuzzy control of hepatitis c virus integrated by genetic algorithm. *IET Systems Biology*, 12(4), 154–161. doi:10.1049/iet-syb.2017.0074.

Kim, H.J., Park, J.B., and Joo, Y.H. (2020a). Decentralized H_∞ sampled-data fuzzy filter for nonlinear interconnected oscillating systems with uncertain interconnections. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(3), 487–498. doi:10.1109/TFUZZ.2019.2908151.

Kim, S., Seo, Y.B., and Jung, E. (2020b). Prediction of COVID-19 transmission dynamics using a mathematical model considering behavior changes. *Epidemiology and Health*, e2020026. doi:10.4178/epih.e2020026.

Mendel, J.M. (2019). Comparing the performance potentials of interval and general type-2 rule-based fuzzy systems in terms of sculpting the state space. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1), 58–71. doi:10.1109/TFUZZ.2018.2856184.

Mohd, M.H. and Sulayman, F. (2020). Unravelling the myths of r_0 in controlling the dynamics of COVID-19 outbreak: A modelling perspective. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109943. doi:10.1016/j.chaos.2020.109943.

Pires, D.S. and Serra, G.L. (2020). Methodology for modeling fuzzy kalman filters of minimum realization from evolving clustering of experimental data. *ISA Transactions*. doi:10.1016/j.isatra.2020.05.034.

Rustam, F., Reshi, A.A., Mehmood, A., Ullah, S., On, B., Aslam, W., and Choi, G.S. (2020). COVID-19 future forecasting using supervised machine learning models. *IEEE Access*, 1–1. doi:10.1109/access.2020.2997311.

Serra, G.L.O. (ed.) (2012). *Frontiers in Advanced Control Systems*. InTech. doi:10.5772/1267.

Serra, G.L.O. (ed.) (2018). *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*. InTech. doi:10.5772/intechopen.68249.

Zhong, L., Mu, L., Li, J., Wang, J., Yin, Z., and Liu, D. (2020). Early prediction of the 2019 novel coronavirus outbreak in the mainland china based on simple mathematical model. *IEEE Access*, 8, 51761–51769. doi:10.1109/access.2020.2979599.