

Sincronização de redes dinâmicas complexas com controle saturado baseado em eventos*

C. Lisbôa* J. V. Flores* L. G. Moreira**

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE),
Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre,
Rio Grande do Sul, Brasil (email: {cristyan.lisboa,
jeferson.flores}@ufrgs.br).

** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia
Sul-rio-grandense (IFSul), Charqueadas, Rio Grande do Sul, Brasil
(e-mail: lucianomoreira@ifsul.edu.br).

Abstract: This work addresses the synchronization of discrete-time complex dynamical networks subject to input saturation via periodic event-triggered control. From Lyapunov theory, conditions in the form of linear matrix inequalities are derived in order to ensure exponential synchronization of the network nodes. Based on *a priori* given control law for each node that ensures the synchronization under a periodic update policy, an event generator is designed for each node. A convex optimization problem is presented to determine the triggering function of each node aiming at reducing the number of events (control signal updates). A numeric example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Resumo: Este trabalho aborda a sincronização de redes dinâmicas complexas de tempo discreto sujeitas a saturação na entrada via controle periódico baseado em eventos. A partir da teoria de Lyapunov, condições na forma de desigualdades matriciais lineares são derivadas para assegurar sincronização exponencial dos nós da rede. Baseado em uma lei de controle para cada nó, dada *a priori*, que garante a sincronização sob uma política de atualização periódica, um gerador de eventos é projetado para cada nó. Um problema de otimização convexa é apresentado para determinar as funções de disparo de cada nó visando reduzir o número de eventos (atualizações do sinal de controle). Um exemplo numérico é apresentado para demonstrar a efetividade do método proposto.

Keywords: Synchronization; periodic event-triggered control; complex dynamical networks.

Palavras-chaves: Sincronização; controle periódico baseado em eventos; redes dinâmicas complexas.

1. INTRODUÇÃO

Redes dinâmicas complexas (*Complex Dynamical Networks* - CDNs) são sistemas de grande interesse na academia e indústria, principalmente em virtude de seu vínculo com diversas aplicações práticas. De modo geral, as CDNs são formadas a partir da conexão de unidades elementares chamadas de nós, cada qual com seu comportamento dinâmico particular (Lehnert, 2016). A forma de conexão e a interação entre eles é o mecanismo usado para descrever diversos comportamentos complexos. Um problema de CDNs tratado na literatura de modo recorrente consiste em garantir a sincronização das trajetórias dos nós a partir da trajetória gerada por um nó mestre. Ele aparece, por exemplo, nos contextos de consenso, comunicação segura, reconhecimento de padrões, redes neurais, computação distribuída e lasers (Zani et al., 2018).

Desde o clássico trabalho de Pecora and Carroll (1990), o qual demonstrou que a sincronização mestre-escravo pode ser descrita como um problema de controle, diversos trabalhos vêm desenvolvendo ferramentas para tratar problemas específicos como, por exemplo, a saturação do sinal de controle. Neste sentido, em (Zani et al., 2018), é apresentada a sincronização mestre-escravo de sistemas tipo Lur'e de tempo discreto. Um controlador baseado na realimentação estática do erro de sincronização é projetado a partir de problemas de otimização convexos com restrições na forma de desigualdades matriciais lineares (*Linear Matrix Inequalities* - LMIs). Já (Sang and Zhao, 2019) utiliza a teoria de sistemas chaveados para avaliar a sincronização via controle intermitente de uma classe de redes neurais caóticas com função de ativação limitada, atraso variável e saturação no atuador. Uma análise de influência de perturbações exógenas no desempenho da sincronização também é apresentada.

Com o crescente desenvolvimento de sistemas de controle em rede, a utilização eficiente dos recursos de comunicação é um atributo importante a ser avaliado. Uma maneira de reduzir o consumo da banda de comunicação é através da

* O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - (CAPES) - Código de Financiamento 001, CNPq (Projeto PQ-306223/2018-0) e IFSul (Projeto PD00201020/128).

atualização aperiódica do sinal de controle, por exemplo, via controle baseado em eventos com monitoração periódica (*Periodic Event-triggered Control*, PETC) (Heemels et al., 2011). Seguindo esta vertente, (Merlin et al., 2019) propõe o projeto de um controlador por realimentação de estados estimados com PETC e entradas sujeitas a não-linearidades limitadas em setor. Em contrapartida, no contexto de sistemas lineares, técnicas de seguimento e/ou rejeição perfeita e prática são apresentadas no trabalho de (Sbarbaro et al., 2020). Já (Viana et al., 2020) estende os resultados de rejeição para o caso incerto considerando uma lei de controle baseada em observadores de estado. Observe-se que o problema de utilização eficiente dos recursos de comunicação é um problema também presente no caso de sincronização de CDNs.

A aplicação de controle baseado em eventos ao contexto de sincronização é vista por exemplo em (Wang et al., 2021), que estuda a sincronização mestre-escravo com saturação no âmbito de múltiplas redes neurais. O controlador proposto é uma realimentação dinâmica de saída com um laço de *anti-windup* estático para mitigar os efeitos da saturação. Já (Ding et al., 2021) estuda a sincronização em tempo discreto de uma CDN via PETC sujeita a não-linearidade de estado em cada nó. Contudo, o estudo não contempla as limitações do atuador e ainda considera um mecanismo de disparo baseado no erro relativo sem ponderação entre as variáveis envolvidas.

Considerando o mesmo contexto de (Ding et al., 2021), este trabalho tem como objetivo propor condições de estabilidade levando-se em conta os efeitos da saturação e a proposição de um mecanismo de disparo baseado no erro relativo ponderado, o que implica em mais graus de liberdade e, potencialmente, menor número de eventos. Um dos desafios que surgem ao considerar a saturação consiste em obter condições de sincronização válidas no caso de ocorrência de eventos em apenas alguns dos nós, e não em todos simultaneamente. A partir de uma função de disparo quadrática para cada nó, condições na forma de LMIs são derivadas, via teoria de Lyapunov, para assegurar que o erro de sincronização convirja exponencialmente para zero com uma taxa de decaimento dada *a priori*. Um problema de otimização convexa é então proposto como forma sistemática de projetar os parâmetros dos geradores de eventos, visando reduzir o número de transmissões necessárias para a sincronização. Por último, um exemplo numérico ilustra a efetividade do método quando comparado com a atualização periódica do sinal de controle.

Notação: \mathbb{N} , \mathbb{R} e $\mathbb{R}^{n \times m}$ ($\mathbb{D}^{n \times m}$) correspondem, respectivamente, ao conjunto dos números naturais, vetores n -dimensionais e matrizes reais (diagonais) $n \times m$. Seja A uma dada matriz, A^T denota sua transposta, $\text{tr}(A)$ o traço e $A_{(i)}$ a i -ésima linha da matriz. $A = A^T > 0$ significa que A é simétrica positiva definida. Já o símbolo \star representa um bloco simétrico em uma matriz. x^+ é usado como uma forma compacta para $x[k+1]$, enquanto I é uma matriz identidade e 0 é uma matriz nula de dimensões apropriadas. $\text{diag}_N(A_i)$ representa uma matriz bloco diagonal cujos elementos são os blocos A_1 até A_N . $A \otimes B$ consiste no produto de Kronecker entre A e B . $\text{col}_N(c_i)$ refere-se ao vetor coluna composto pelos vetores c_1 até c_N . $\mathcal{E}(P, \gamma) = \{\zeta \in \mathbb{R}^p : \zeta^T P \zeta \leq \gamma^{-1}\}$ é o elipsóide definido a partir de $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$.

2. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

Esta seção destina-se à apresentação do problema de sincronização da CDN. A dependência das amostras k é omitida onde não existe ambiguidade de notação.

2.1 Problema de sincronização

A topologia de rede explorada neste artigo trata-se de uma configuração descentralizada na qual o controlador de cada nó recebe apenas informação local. Além disso, ela é conectada de modo que não existam nós isolados, ou seja, é chamada de irredutível. Quanto à sua forma, é constituída com estrutura fixa invariante no tempo e pertence à classe de redes diretas, isto é, cada nó dispõe de um canal de comunicação único com seus vizinhos. O objetivo é sincronizar os estados de cada nó com as trajetórias geradas por um sistema mestre a partir de uma estratégia baseada em eventos.

A Figura 1 apresenta um diagrama ilustrativo da topologia de rede considerada. Seu funcionamento pode ser descrito da seguinte maneira: a cada instante, o nó \mathcal{N}_i recebe informação do mestre \mathcal{M} e dos nós vizinhos, calcula o erro de sincronização e_i e avalia se o sinal de controle deverá ser atualizado via gerador de eventos. Se houver um evento, então e_i é encaminhado ao controlador C_i , por intermédio da rede de comunicação, o qual retorna o sinal de controle calculado v_i . Caso contrário, v_i é mantido no valor calculado na última vez que ocorreu um evento. Este modo de operação estende-se para $i = 1, \dots, N$ de forma independente, já que cada nó apresenta seu próprio controlador, função de disparo e gerador de eventos.

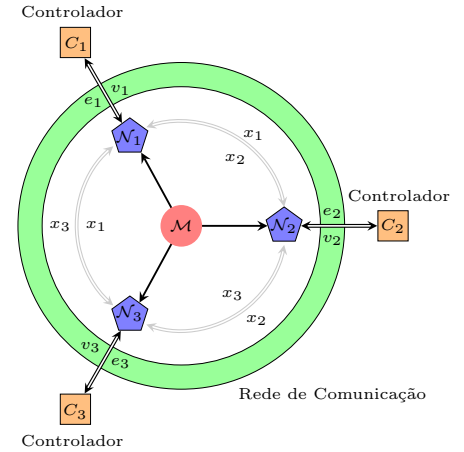


Figura 1. Topologia da rede de comunicação.

Sejam as dinâmicas do mestre e do i -ésimo nó dadas respectivamente por:

$$\mathcal{M} : x_M^+ = Ax_M + B\sigma(Cx_M) \quad (1)$$

$$\mathcal{N}_i : x_i^+ = Ax_i + B\sigma_i(Cx_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij}\Gamma x_j + Eu_i \quad (2)$$

onde $i = 1, \dots, N$ representa o número do nó; x_i e $u_i \in \mathbb{R}^n$ são os vetores de estados e de entrada do i -ésimo nó, respectivamente; $\sigma_i(\cdot) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não-linear vetorial descentralizada; $W \in \mathbb{R}^{N \times N}$ denota a

matriz de configuração de acoplamento; $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ trata-se da matriz de acoplamento interno; as matrizes A, B e C são reais, constantes e de dimensões apropriadas, sendo $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz diagonal.

Note que a matriz Γ descreve como ocorre a relação entre as variáveis acopladas, *i.e.*, o modo de interação entre cada componente de x_j em x_i . Tipicamente, ela consiste em uma matriz diagonal positiva definida. Com relação à matriz W , é válido ressaltar que ela está associada à topologia física da CDN. Neste sentido, cada um dos pesos w_{ij} indica o grau de interação entre os nós j e i . A matriz de configuração de acoplamento utilizada neste trabalho, assim como em (Ding et al., 2021), satisfaz as seguintes relações:

- Se $i \neq j$ e existe transmissão de informação do nó j para o nó i , então $w_{ij} > 0$; caso contrário, $w_{ij} = 0$.
- Se $i = j$, então $w_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N w_{ij}$.

Este trabalho assume $\sigma(\cdot)$ como uma não linearidade limitada em setor que atende a seguinte suposição:

Suposição 1. Cada componente $\sigma_{(p)}(\cdot)$ verifica as seguintes hipóteses:

- É uma função não-linear contínua, com simetria ímpar.
- Satisfaz a relação $0 \leq \frac{\sigma_{(p)}(f) - \sigma_{(p)}(\hat{f})}{f - \hat{f}} \leq \theta_{(p)}, \forall f, \hat{f}$.
- Pertence globalmente ao setor $[0, \theta_{(p)}]$, com $\theta_{(p)} > 0$.

Definindo-se o erro de sincronização do i -ésimo nó como $e_i = x_M - x_i$, então se o $\lim_{k \rightarrow \infty} e_i[k] = 0$ segue que x_i tende à trajetória x_M , ou seja, a sincronização do nó i é obtida. Dessa forma, é possível converter o problema de sincronização dos nós em um problema de estabilização do erro e_i . A partir de (1) e (2), a dinâmica do erro de sincronização e_i é dada por:

$$e_i^+ = Ae_i + B\rho_i(Ce_i, Cx_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij}\Gamma e_j - Eu_i \quad (3)$$

onde $\rho_i(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função não-linear vetorial descentralizada definida como:

$$\rho_i(Ce_i, Cx_i) = \sigma(Ce_i + Cx_i) - \sigma_i(Cx_i). \quad (4)$$

O vetor de entradas u_i é limitado em amplitude de forma que $-u_{0(r)} \leq u_{i(r)} \leq u_{0(r)}, \forall r = 1, \dots, n$. Portanto, o sinal de entrada no i -ésimo nó é da forma $u_i = \text{sat}_i(v_i, u_0)$, onde v_i representa a saída do controlador e o termo $\text{sat}_i(v_i, u_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função saturação vetorial simétrica de limites $\pm u_0$.

Ao levar em consideração o efeito da saturação na dinâmica do erro de sincronização do i -ésimo nó, (3) pode ser reescrita como:

$$e_i^+ = Ae_i + B\rho_i(Ce_i, Cx_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij}\Gamma e_j - E\text{sat}_i(v_i, u_0) \quad (5)$$

2.2 Estratégia baseada em eventos

A estratégia do PETC considerada no trabalho assume que as atualizações do sinal de controle do i -ésimo nó ocorrem exclusivamente nos instantes k_i^l , onde $l = 0, 1, 2, \dots$ denota o l -ésimo evento ocorrido no nó i . Em razão disso, o

sinal de controle efetivamente aplicado em cada nó é dado por:

$$v_i[k] = v_i[k_i^l] \quad \forall k \in [k_i^l, k_i^{l+1}) \quad (6)$$

Dados os controladores estabilizantes de cada nó, previamente determinados considerando uma atualização periódica do sinal de controle, o projeto por emulação consiste em determinar os parâmetros da função de disparo de cada nó de modo a garantir a convergência exponencial do erro de sincronização e_i para zero.

O gerador de eventos é o mecanismo do PETC que tem como objetivo decidir quando o sinal de controle é atualizado. Para isso, ele monitora periodicamente uma função de disparo e gera um evento sempre que a função viola determinado limiar definido *a priori*. O critério de disparo utilizado neste trabalho consiste em uma versão ponderada do erro de sincronização relativo. Seja $\delta_i[k] = e_i[k_i^l] - e_i[k]$ o desvio do erro de sincronização entre o último evento e a amostra atual. Então, o próximo evento no i -ésimo nó é gerado de acordo com a relação:

$$k_i^{l+1} = \min\{k \in \mathbb{N} : k > k_i^l \text{ e } f_i(\delta_i, e_i) \geq 0\} \quad (7)$$

onde $f_i(\delta_i, e_i)$ é chamada de função de disparo do nó i e tem a seguinte forma:

$$f_i(\delta_i, e_i) = \delta_i^T Q_{\delta_i} \delta_i - e_i^T Q_{e_i} e_i \quad (8)$$

com Q_{δ_i} e Q_{e_i} matrizes constantes simétricas positivas definidas de dimensões apropriadas que atuam como fatores de ponderação em (8). Isso permite que ocorram desvios distintos para cada componente do erro de sincronização em seu próprio nó, a depender da relação entre essas matrizes. Com base nessas considerações, a política de atualização aperiódica do sinal de controle pode ser interpretada de acordo com o Algoritmo 1, o qual é implementado de maneira independente em cada nó.

Algoritmo 1 Estratégia baseada em eventos

```

global  $k$ 
if  $k = 0$  then
     $l \leftarrow 0$ 
     $v_i[0] \leftarrow K_i e_i[0]$ 
else
    if  $f_i(\delta_i, e_i) \geq 0$  then
         $l \leftarrow l + 1$ 
         $k_i^l \leftarrow k$ 
         $v_i[k_i^l] \leftarrow K_i e_i$  (atualiza o sinal de controle)
    else
         $v_i[k] \leftarrow v_i[k_i^l]$  (mantém o sinal de controle)
    end if
end if
    
```

É importante salientar que o fato de se trabalhar com PETC elimina automaticamente a possibilidade de comportamento de Zenão (Heemels et al., 2011).

Para equacionar o erro de sincronização da CDN em cada nó considerando o Algoritmo 1, define-se o controlador por realimentação do erro como sendo $v_i = K_i e_i$. Logo, o sinal de entrada efetivo é determinado da seguinte maneira:

$$u_i = \text{sat}_i(K_i e_i[k_i^l], u_0) \quad \forall k \in [k_i^l, k_i^{l+1}) \quad (9)$$

Com base em (9) é possível reescrever a função saturação, a partir de uma função zona-morta descentralizada (Tarbouriech et al., 2011), produzindo:

$$\psi_i(K_i e_i[k_i^l], u_0) = K_i e_i[k_i^l] - \text{sat}_i(K_i e_i[k_i^l], u_0) \quad (10)$$

A dinâmica do erro de cada um dos nós, a qual difere-se a partir da escolha de K_i , é determinada substituindo-se (10) em (5) e considerando a variável δ_i :

$$e_i^+ = (A - EK_i)e_i + B\rho_i(Ce_i, Cx_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij}\Gamma e_j \quad (11)$$

$$+ E\psi_i(K_i(\delta_i + e_i), u_0) - EK_i\delta_i$$

Para fins de sincronização da CDN, considerando a interação entre os nós, definem-se os seguintes vetores:

$$e = \text{col}_N(e_i), \psi = \text{col}_N(\psi_i), \delta = \text{col}_N(\delta_i) \in \mathbb{R}^{(nN)}$$

$$x = \text{col}_N(x_i) \in \mathbb{R}^{(nN)}, \rho = \text{col}_N(\rho_i) \in \mathbb{R}^{(mN)}$$

Logo, (11) pode ser expressa em uma forma compacta a partir dos vetores aumentados e das propriedades do produto de Kronecker como segue:

$$e^+ = \hat{A}e + \bar{B}\rho(\bar{C}e, \bar{C}x) + \bar{E}\psi - \bar{E}K\delta \quad (12)$$

onde, $\hat{A} = \bar{A} - \bar{E}K + \bar{W}$, $\bar{A} = (I \otimes A)$, $\bar{B} = (I \otimes B)$, $\bar{C} = \text{diag}_N(C)$, $\bar{E} = (I \otimes E)$, $\bar{W} = (W \otimes \Gamma)$, $K = \text{diag}_N(K_i)$, $Q_\delta = \text{diag}_N(Q_{\delta_i})$ e $Q_e = \text{diag}_N(Q_{e_i})$.

Vale destacar que a implementação ocorre de forma individual, na qual cada nó apresenta sua função de disparo, seu gerador de eventos e seu controlador baseados apenas no seu respectivo erro em relação ao nó mestre. Isso quer dizer que, apesar de ocorrer interação física entre os nós, a informação do erro ou dos estados do nó j não é utilizada na estratégia de controle e geração de eventos do nó i .

Considerando os elementos expostos até aqui, pode-se definir formalmente o problema a ser abordado como:

Problema 1: Dados os ganhos dos controladores por realimentação do erro de sincronização K_i e um conjunto \mathcal{X}_0 , determinar os parâmetros da função de disparo (8) de cada nó visando garantir que \mathcal{X}_0 esteja incluído na região de atração da origem do sistema de malha fechada (12) e também reduzir o número de eventos com relação à atualização periódica do sinal de controle.

Isso equivale a garantir a sincronização assintótica da CDN para todos os estados iniciais no interior de \mathcal{X}_0 .

3. RESULTADO PRINCIPAL

3.1 Condições de setor

O lema a seguir será utilizado para estabelecer a condição de setor associada à não-linearidade $\rho(\cdot, \cdot)$.

Lema 1 (Zani et al., 2018). Se $\sigma_i(f)$ satisfaz a Suposição 1, então $\rho_i(f_1, f_0) = \sigma_i(f_1 + f_0) - \sigma_i(f_0)$ é tal que

$$\Upsilon_1 = \rho(f_1, f_0)^T J_1 [\rho(f_1, f_0) - \Theta f_1] \leq 0$$

é verificada globalmente para toda matriz $\Theta = \text{diag}_N(\theta_i)$ e $J_1 > 0 \in \mathbb{D}^{(mN) \times (mN)}$. Por outro lado, considerando a não-linearidade zona-morta definida em (10), o seguinte lema pode ser enunciado.

Lema 2 (Moreira et al., 2016). Seja e_a o vetor aumentado $e_a^T = [e \ \delta]^T$. Se $e_a \in \mathcal{S}_0 = \{e_a \in \mathbb{R}^{(2nN)} : |(K_a - G_a)_{(r)}e_a| \leq u_{0(r)}\}$, $\forall r = 1, \dots, nN$, então a relação

$$\Upsilon_2 = \psi(K_a e_a)^T J_2 [\psi(K_a e_a) - G_a e_a] \leq 0$$

é verificada para toda matriz $J_2 > 0 \in \mathbb{D}^{(nN) \times (nN)}$ com $K_a = [K \ K]$, $G_a = [G_1 \ G_2]$, $G_1 = \text{diag}_N(G_{1i})$ e $G_2 = \text{diag}_N(G_{2i})$.

3.2 Condições de estabilidade

O teorema a seguir apresenta condições baseadas em LMIs para resolver o Problema 1.

Teorema 1. Dados os ganhos dos controladores K_i , se existirem matrizes simétricas positivas definidas \bar{P}, Q_δ e $\bar{Q}_e \in \mathbb{R}^{(nN) \times (nN)}$, $F_1 \in \mathbb{D}^{(mN) \times (mN)}$, $F_2 \in \mathbb{D}^{(nN) \times (nN)}$, matrizes $Z, G_2 \in \mathbb{R}^{(nN) \times (nN)}$ e escalares positivos $\gamma > 0$ e $0 < \alpha \leq 1$ tais que

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 \bar{P} & \star & \star & \star & \star & \star \\ -\Theta \bar{C} \bar{P} & 2F_1 & \star & \star & \star & \star \\ -Z & 0 & 2F_2 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -G_2^T & Q_\delta & \star & \star \\ \hat{A} \bar{P} & \bar{B} F_1 & \bar{E} F_2 & -\bar{E} K & \bar{P} & \star \\ \bar{P} & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_e \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P} & \star & \star & \star \\ 0 & Q_\delta & \star & \star \\ K_{(r)} \bar{P} - Z_{(r)} & K_{(r)} - G_{2(r)} & u_{0(r)}^2 \gamma & \star \\ \bar{P} & 0 & 0 & \bar{Q}_e \end{bmatrix} > 0 \quad (14)$$

são verificadas para $r = 1, \dots, nN$, então todas as trajetórias da CDN (12) iniciadas no conjunto $\mathcal{X} = \{e \in \mathbb{R}^{nN} : e^T P e \leq \gamma^{-1}\}$, com $P = \text{diag}_N(P_i)$, convergem exponencialmente para a origem com uma taxa de decaimento pelo menos igual a α , implicando na sincronização de cada nó sob estratégia baseada em eventos dada em (7), com função de disparo $f_i(\delta_i, e_i)$ expressa em (8) e $Q_e = \bar{Q}_e^{-1}$.

Prova. Considerando uma função de Lyapunov candidata quadrática $V[k] = e^T P e$ e determinando sua variação entre os instantes k e $k + 1$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta V[k] &= V[k+1] - V[k] \\ &= [\hat{A}e + \bar{B}\rho + \bar{E}\psi - \bar{E}K\delta]^T P \\ &\quad [\hat{A}e + \bar{B}\rho + \bar{E}\psi - \bar{E}K\delta] - e^T P e \end{aligned} \quad (15)$$

Seja $0 < \alpha \leq 1$ uma especificação para a taxa de decaimento exponencial do erro de sincronização, de modo que $\|e[k]\| \leq \beta \alpha^k \|e[0]\|$, $\forall k \geq 0$ e algum $\beta > 0$. Este requisito é levado em consideração através da relação:

$$\Delta V[k] < (\alpha^2 - 1)e^T P e \quad (16)$$

Visto que $\sigma_i(\cdot)$ satisfaz a Suposição 1, então pelo Lema 1 segue que $\Upsilon_1 < 0$ quando $f_1 = \bar{C}e$ e $f_0 = \bar{C}x$. Do Lema 2 resulta que $\Upsilon_2 < 0$ caso $e_a \in \mathcal{S}_0$. Finalmente, entre dois eventos consecutivos $k \in (k_i^l, k_i^{l+1})$ tem-se que a função de disparo (8) é tal que $f_i(\delta_i, e_i) < 0$. A partir destas relações, segue que (16) é verificada caso:

$$\begin{aligned} \Delta V[k] &\leq \Delta V[k] - 2\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 - \sum_{i=1}^N f_i(\delta_i, e_i) \\ &\quad - (\alpha^2 - 1)e^T P e \quad \forall e_a \in \mathcal{S}_0 \end{aligned} \quad (17)$$

Definindo $\xi^T = [e \ \rho \ \psi \ \delta]^T$, então (17) pode ser reescrita na forma $\Delta V[k] \leq -\xi^T \mathcal{M} \xi$, com $\mathcal{M} = \mathcal{N} - \Pi_1^T P \Pi_1$, onde:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= [\hat{A} \ \bar{B} \ \bar{E} \ -\bar{E}K] \\ \mathcal{N} &= \begin{bmatrix} \alpha^2 P - Q_e & -(J_1 \Theta \bar{C})^T & -(J_2 G_1)^T & 0 \\ -J_1 \Theta \bar{C} & 2J_1 & 0 & 0 \\ -J_2 G_1 & 0 & 2J_2 & -J_2 G_2 \\ 0 & 0 & -(J_2 G_2)^T & Q_\delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Com isso, evidencia-se que se $\mathcal{M} > 0$ for verificada, então (16) é satisfeita, desde que $e_a \in \mathcal{S}_0$. A partir deste

ponto, aplicando-se o complemento de Schur na matriz \mathcal{M} , obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N} & \Pi_1^T \\ \Pi_1 & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (18)$$

Na sequência, efetuando uma transformação de congruência em (18) com a matriz $\Lambda_1 = \text{diag}(\bar{P}, F_1, F_2, I, I)$, onde $\bar{P} = P^{-1}$, $F_1 = J_1^{-1}$ e $F_2 = J_2^{-1}$, aplicando o complemento de Schur no termo $\alpha^2 \bar{P} - \bar{P} Q_e \bar{P}$ e considerando a mudança de variáveis $Z = G_1 \bar{P}$, com a matriz $\bar{Q}_e = Q_e^{-1}$, então (13) é recuperada. Portanto, (13) implica em $\mathcal{M} > 0$, a qual é equivalente a (16), desde que $e_a \in \mathcal{S}_0$.

Para a conclusão da prova, deve-se demonstrar que (14) garante que $e_a \in \mathcal{S}_0$ quando $e[0] \in \mathcal{X}$. Partindo-se de (14), pré e pós multiplicando por $\Lambda_2 = \text{diag}(P, I, I, I)$, então ao aplicar o complemento de Schur duas vezes, pré e pós multiplicar o resultado por e_a^T e e_a , obtém-se:

$$e^T P e + \sum_{i=1}^N (\delta_i^T Q_{\delta_i} \delta_i - e_i^T Q_{e_i} e_i) > e_a^T \Xi_{(r)} e_a \quad (19)$$

onde,

$$\Xi_{(r)} = (K_a - G_a)^T \frac{1}{u_{0(r)}^2 \gamma} (K_a - G_a)_{(r)}.$$

Entre dois eventos consecutivos de qualquer nó, o Algoritmo 1 garante que a relação $e^T P e - e_a^T \Xi_{(r)} e_a > -\sum_{i=1}^N f_i(\delta_i, e_i) > 0$, o que implica em $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$ se $e[k] \in \mathcal{X}$. Em contrapartida, se um evento é gerado em um determinado nó j , então $\delta_j = 0$, $e^T P e - e_a^T \Xi_{(r)} e_a > -\sum_{i=1, i \neq j}^N f_i(\delta_i, e_i) > 0$, e também resulta em $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$ se $e[k] \in \mathcal{X}$. Por fim, se todos os geradores de evento dispararem na mesma amostra, então $\delta_i = 0, \forall i = 1, \dots, N$, $e^T P e - e_a^T \Xi_{(r)} e_a > 0$, o que implica em $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$ se $e[k] \in \mathcal{X}$. A partir disso, é possível concluir que (13) e (14) efetivamente são capazes de garantir que $e_a[k] \in \mathcal{S}_0$ e $\Delta V[k] < (\alpha^2 - 1)V[k], \forall k \in \mathbb{N}$, desde que $e[0] \in \mathcal{X}$. Portanto, o conjunto \mathcal{X} é positivamente invariante e contrativo com taxa exponencial α e, por conseguinte, o erro de sincronização da CDN (12) converge exponencialmente para a origem pelo menos em um contexto regional.

Comentário 1: Nota-se que existe uma limitação implícita para a escolha do parâmetro α . A estratégia baseada em eventos não permite uma taxa de decaimento exponencial menor do que a obtida considerando a atualização periódica do sinal de controle. Ao violar esta restrição, as condições do Teorema 1 se tornarão ineficazes.

3.3 Problemas de otimização

Seja $\mathcal{X}_0 = \{e \in \mathbb{R}^{(nN)} : e^T P_0 e \leq 1\}$ um dado conjunto elipsoidal de estados iniciais admissíveis da CDN (12), onde P_0 é uma matriz bloco diagonal, simétrica e positiva definida. Então, o i -ésimo bloco da diagonal de P_0 corresponde à região de erro inicial admissível para o nó i . Dessa forma, além de garantir a estabilização assintótica do erro de sincronização, outro objetivo de projeto consiste em reduzir o número de atualizações do sinal de controle. Isso pode ser alcançado, por exemplo, reduzindo a magnitude dos autovalores de Q_{δ} e \bar{Q}_e .

Visando determinar sistematicamente os parâmetros da função de disparo (8), além de garantir sincronização assintótica da CDN para erros iniciais que estejam contidos

no conjunto \mathcal{X}_0 , é proposto o seguinte problema de otimização convexa, também utilizado em (Viana et al., 2020; Sbarbaro et al., 2020):

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(Q_{\delta} + \bar{Q}_e) \\ \text{sujeito a:} \quad & (13), (14), \bar{P} > \gamma P_0^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

com $Q_e = \bar{Q}_e^{-1}$. A restrição $\bar{P} > \gamma P_0^{-1}$ é responsável por assegurar a relação de inclusão dos elipsoides $\mathcal{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$. Além disso, é válido destacar que o problema de otimização (20) deve ser resolvido apenas uma vez, de forma *off-line*, durante o projeto da estratégia baseada em eventos. Ao longo da operação do sistema, os controlares e os geradores de evento não precisam resolvê-lo para atualizar o sinal de controle.

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Considere-se a CDN apresentada em (Ding et al., 2021):

$$x_M^+ = A x_M + B \sigma(C x_M)$$

com

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0,973 & 0,09 & 0 \\ 0,01 & 0,99 & 0,01 \\ 0 & -0,143 & 1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & -0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0,04 & -0,005 & -0,006 \\ -0,005 & 0,002 & 0,003 \\ 0,006 & 0,003 & 0,007 \end{bmatrix}, \quad N = 3, \quad \Gamma = 0,01I \\ \sigma_{(p)}(C x_M) &= \frac{(|C_{(p)} x_M + 1| - |C_{(p)} x_M - 1|)}{2} \end{aligned}$$

Considere-se que a amplitude máxima do sinal de controle é arbitrada em $u_0 = 0,1$, o conjunto \mathcal{X}_0 foi determinado pela escolha da matriz $P_0 = 2I$ e a taxa de decaimento exponencial foi escolhida com $\alpha = 1$. Os controladores estabilizantes K_i foram calculados por intermédio do posicionamento dos autovalores de $A - E K_i$, sendo K_1 e K_2 projetados de modo a posicioná-los em $0,835$ e $0,889 \pm j0,03$, enquanto o controlador K_3 posiciona todos autovalores em $0,95$. A partir disso, adicionando-se as restrições $\lambda_{max}(Q_{\delta}) < 10^4 \lambda_{min}(Q_{\delta})$ e $\lambda_{max}(\bar{Q}_e) < 10^4 \lambda_{min}(\bar{Q}_e)$ para evitar matrizes mal condicionadas, resolveu-se o problema de otimização (20) resultando em:

$$\begin{aligned} P_1 = P_2, Q_{\delta_1} = Q_{\delta_2}, Q_{e_1} = Q_{e_2}, \gamma = 0,0763 \\ P_2 = \begin{bmatrix} 9,003 & * & * \\ 1,695 & 26,012 & * \\ 1,893 & 0,601 & 6,876 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 9,417 & * & * \\ -0,145 & 26,193 & * \\ 1,194 & -0,454 & 13,197 \end{bmatrix} \\ Q_{\delta_2} = \begin{bmatrix} 1,363 & * & * \\ 0,104 & 1,950 & * \\ -0,107 & -0,050 & 1,073 \end{bmatrix}, \quad Q_{\delta_3} = \begin{bmatrix} 0,776 & * & * \\ 1,634 & 9,307 & * \\ 0,367 & -1,033 & 0,973 \end{bmatrix} \\ Q_{e_2} = \begin{bmatrix} 0,684 & * & * \\ -0,339 & 1,695 & * \\ 0,079 & 0,255 & 0,671 \end{bmatrix}, \quad Q_{e_3} = \begin{bmatrix} 0,125 & * & * \\ 0,031 & 1,614 & * \\ 0,076 & -0,001 & 0,495 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A Figura 2 ilustra, na parte superior, a evolução da norma do erro e os instantes em ocorreram eventos na parte inferior. O intervalo de simulação foi especificado com $k \in [0, 150]$ e a condição inicial em $x_M[0] = [1; 0,4; 0]$, $e_1[0] = [-0,121; 0,084; 0,112]$, $e_2[0] = [0,142; -0,078; -0,099]$ e $e_3[0] = [0,232; -0,611; 0; 361]$, de modo que $e[0]$ localiza-se dentro do elipsoide, próximo à borda de \mathcal{X} . Nota-se que a estratégia baseada em eventos foi capaz de reduzir eficientemente o número de atualizações do sinal de controle em

comparação com a atualização periódica, assegurando que os estados de cada nó converjam exponencialmente para os do mestre.

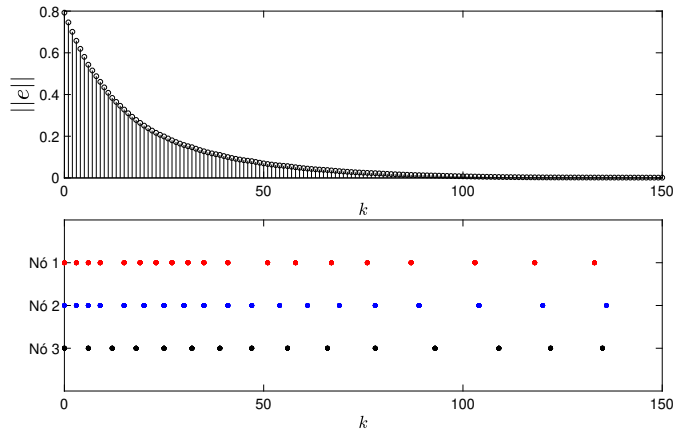


Figura 2. Norma do erro e instantes de eventos por nó.

Uma vez realizada a simulação, para validar a estratégia em todo o conjunto \mathcal{X}_0 , foram selecionadas 256 condições iniciais distribuídas ao longo da borda de \mathcal{X}_0 e simulou-se a CDN no intervalo de $k \in [0, 200]$ com os mesmos parâmetros anteriores. A partir destes dados, foi calculado o número médio de eventos em cada nó, com arredondamento para o inteiro superior mais próximo, conforme a Tabela 1. Ela demonstra também a influência do tamanho do conjunto \mathcal{X}_0 no número de eventos com $P_0 = 2\mu I$.

Tabela 1. Número de eventos.

μ	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Periódico
10	22	22	17	
1,00	23	23	18	
0,30	30	30	21	
0,18	34	34	25	
0,16	36	36	27	201
0,14	39	39	29	
0,12	42	42	33	
0,11	45	45	36	
0,10	Infactível	Infactível	Infactível	

É possível observar que conjuntos \mathcal{X}_0 de tamanho maior, expressos por pequenos valores de μ , dão origem a um número de eventos superior em comparação com regiões menores. Por último, destaca-se que, mesmo no cenário com a maior região de estabilidade assintótica garantida, foi constatada uma redução no número de eventos em comparação com a estratégia periódica. Em particular, no pior caso, a redução percentual é de pelo menos 77% evidenciando, portanto, a efetividade do método proposto.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o problema de sincronização via PETC de CDNs em que a dinâmica dos nós apresenta não-linearidades limitadas em setor e a entrada de controle está sujeita a saturação. Com base nas técnicas da teoria de Lyapunov, estabeleceram-se condições, na forma de LMIs, para assegurar a sincronização assintótica regional da origem do sistema de malha fechada.

A partir disso, um problema de otimização convexa foi apresentado para determinar, de maneira sistemática, os

parâmetros da função de disparo de cada nó visando reduzir as atualizações do sinal de controle em comparação com a estratégia periódica. Por fim, um exemplo numérico foi realizado com a finalidade de demonstrar a efetividade do método proposto. Salienta-se que a topologia de rede considerada pode ser convenientemente empregada para o controle avançado de sistemas dinâmicos acoplados. Em virtude disso, extensões em andamento dos resultados teóricos do trabalho incluem a abordagem de sistemas multi-agentes, redes com atraso de comunicação, sistemas estocásticos e compensação dinâmica de saída.

REFERÊNCIAS

- Ding, S., Wang, Z., and Xie, X. (2021). Periodic event-triggered synchronization for discrete-time complex dynamical networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 1–12.
- Heemels, W.P.M.H., Donkers, M.C.F., and Teel, A.R. (2011). Periodic event-triggered control based on state feedback. In *2011 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC)*, 2571–2576.
- Lehnert, J. (2016). *Controlling Synchronization Patterns in Complex Networks*. Springer Theses. Springer International Publishing.
- Merlin, G.B., Moreira, L.G., and Gomes da Silva Jr., J.M. (2019). Observer-based event-triggered control for discrete-time systems in the presence of sector-bounded nonlinear inputs. In *Anais do 19º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*.
- Moreira, L.G., Groff, L.B., Gomes da Silva Jr., J.M., and Tarbouriech, S. (2016). Event-triggered PI control for continuous plants with input saturation. In *American Control Conference (ACC)*, 4251–4256.
- Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990). Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64, 821–824.
- Sang, H. and Zhao, J. (2019). Exponential synchronization and L_2 -gain analysis of delayed chaotic neural networks via intermittent control with actuator saturation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 30(12), 3722–3734.
- Sbarbaro, D., Gomes da Silva Jr., J.M., and Moreira, L.G. (2020). Event-triggered tracking control: a discrete-time approach. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2), 4565–4570.
- Tarbouriech, S., Garcia, G., Gomes da Silva Jr., J.M., and Queinnec, I. (2011). *Stability and Stabilization of Linear Systems with Saturating Actuators*. Springer Publishing Company, Incorporated.
- Viana, E.S., Gomes da Silva Jr., J.M., and Moreira, L.G. (2020). Rejeição de perturbações para sistemas discretos no tempo com controle baseado em eventos. In *Anais do 23º Congresso Brasileiro de Automática*.
- Wang, Y., Ding, S., and Li, R. (2021). Master-slave synchronization of neural networks via event-triggered dynamic controller. *Neurocomputing*, 419, 215–223.
- Zani, A., Flores, J.V., Fischmann, M., and Gomes da Silva Jr., J.M. (2018). Synchronization of discrete-time Lur’e systems under saturating control. In *2018 European Control Conference (ECC)*, 2953–2958.