

Controle Ótimo por Modos Deslizantes com Ação Integral e Rejeição de Distúrbio para Rastreamento da Saída

Jean Silva Nogueira Pacheco^{*,**} Thiago Pereira das Chagas^{*,**}
Gildson Queiroz de Jesus^{*,**}

^{*} Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-Bahia, Brasil (e-mails: jsnpacheco@uesc.br, tpchagas@uesc.br, gqjesus@uesc.br).

^{**} Laboratório de Mecatrônica, Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA, Brasil.

Abstract: This paper proposes an optimal discrete-time sliding mode controller with integral action and exogenous additive disturbances rejection for certain references tracking. The approach is based on augmented states and the constrained weighted least-squares method and has a high tolerance for exogenous disturbances while minimizing a performance index related to the control input and states energy. A numerical example presented attests the efficiency and robustness of this technique in the disturbances rejection and trajectory tracking.

Resumo: Este artigo propõe um controlador ótimo por modos deslizantes em tempo discreto com ação integral e rejeição de distúrbios aditivos exógenos para o rastreamento de certas referências. A abordagem é baseada em estados aumentados e no método dos mínimos quadrados ponderados restritos e apresenta uma grande tolerância às perturbações exógenas ao passo que minimiza um coeficiente de desempenho relacionado à entrada de controle e à energia dos estados. Um exemplo numérico apresentado atesta a eficiência e robustez dessa técnica na rejeição dos distúrbios e no rastreamento de trajetória.

Keywords: Sliding mode; Optimal control; Integral action; External disturbances; output tracking

Palavras-chaves: Modos deslizantes; Controle ótimo; Ação integral; Distúrbios externos; Rastreamento da saída

1. INTRODUÇÃO

O Controle por Modos Deslizantes é reconhecido pela sua robustez contra diversos tipos de distúrbios ou incertezas paramétricas, condições que afetam a maioria das plantas em aplicações reais (Utkin, 1999). Além disto, mediante a escolha de uma superfície de deslizamento adequada, é possível atender as especificações de desempenho desejadas. Estas características têm despertado o interesse de pesquisadores das mais variadas áreas, como a biomedicina (Doruk, 2020), elétrica (Alsmadi et al., 2020), robótica (Ma and Huang, 2021), entre outras.

A possibilidade de minimizar a energia de um sistema, através de uma relação ponderada entre esforço de controle e estado, é um grande atrativo da teoria do controle ótimo baseado na minimização de um índice de desempenho. O Controle Ótimo por Modos Deslizantes de Tempo Discreto (ODSMC - Optimal Discrete-Time Sliding Mode Control) desenvolvido por Xu (2007) obteve bons resultados, porém o seu trabalho apresenta como limitação o fato de tolerar apenas distúrbios que agem nas entradas de controle.

Em Ferrazo et al. (2011) houve uma nova abordagem para o problema de otimização associado ao ODSMC utilizando

o método dos mínimos quadrados ponderados restritos. A técnica empregada é uma alternativa para a solução do problema de controle ótimo restrito, transformando-o em um problema de controle ótimo irrestrito através da incorporação da restrição ao funcional a ser minimizado. Tal metodologia permitiu alcançar, por meio de uma única estrutura, uma lei de controle baseada na equação recursiva de Riccati.

Considerando o possível impacto negativo dos distúrbios sobre um sistema de controle, no presente trabalho propõe-se a solução de um controlador ótimo por modos deslizantes sujeito à ação de distúrbios externos, sendo ou não relacionados à entrada de controle. Adicionalmente, visando reduzir o erro em regime permanente do sistema, introduzir-se-á uma ação integral ao controlador através da proposição de uma superfície de deslizamento que a contemple. O controlador é baseado em estado aumentado e no método dos mínimos quadrados ponderado restrito (Ferrazo et al., 2011). Os distúrbios externos são incorporados ao vetor de estados aumentados e com isso obtém-se um termo, na lei de controle, associado a esta perturbação, o que permite ao controlador rejeitar também os distúrbios que independem dos parâmetros da entrada de controle.

Esta modelagem é encontrada na literatura e apresenta resultados satisfatórios (Darouach et al., 1995; Madureira et al., 2019). Simulações numéricas serão executadas para mostrar a efetividade do controlador.

Este artigo está dividido da seguinte forma. Na Seção 2 é apresentada a formulação do problema. O desenvolvimento do controlador é demonstrado na Seção 3, enquanto a Seção 4 exibe o desempenho do controlador proposto através de um exemplo numérico. Por fim, na Seção 5 são feitas as conclusões pertinentes.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Nesta seção é apresentada a formulação do problema de controle a ser resolvido. Para tanto, considere o seguinte sistema linear em tempo discreto

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_k x_k + G_k u_k + D_k d_k \\ y_k &= H_k x_k \end{aligned} \quad (1)$$

em que $x_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de estado, $u_k \in \mathbb{R}$ é o vetor de entradas de controle, $d_k \in \mathbb{R}^q$ é o vetor dos distúrbios externos, $y_k \in \mathbb{R}$ é o vetor de saídas, e as matrizes $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de parâmetros relacionada ao estado do sistema, $G_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ de parâmetros da entrada de controle, $H_k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ de parâmetros da variável de saída e $D_k \in \mathbb{R}^{n \times q}$ de parâmetros dos distúrbios externos. Observa-se que o distúrbio d_k não está associado com a matriz G_k , indicando que a perturbação não ocorre necessariamente na entrada de controle ($G_k = D_k$ é um caso específico, também contemplado). Assuma que o erro entre a saída do sistema e uma referência a ser seguida $r_k \in \mathbb{R}$ é

$$e_k = y_k - r_k \quad (2)$$

e que, para todo r_{k+1} , é válida a relação

$$r_{k+1} = L_k r_k \quad (3)$$

na qual $L_k \in \mathbb{R}$ é uma matriz de parâmetro de r_k .

Uma ação integral relacionada ao erro (2) é dada por

$$E_{k+1} = E_k + T_s e_k \quad (4)$$

com $E_k \in \mathbb{R}$ correspondendo à integral discreta (somatório) do erro e T_s é o período de amostragem¹.

Com manipulações algébricas envolvendo (1)-(3), chega-se na seguinte equação da dinâmica do erro para o sistema

$$e_{k+1} = H_k F_k x_k + H_k G_k u_k + H_k D_k d_k - L_k r_k. \quad (5)$$

Utilizando (1)-(5), chega-se a um sistema aumentado definido por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k+1} &= \bar{F}_k \varepsilon_k + \bar{G}_k u_k \\ y_k &= H_k x_k \end{aligned} \quad (6)$$

em que

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \begin{bmatrix} x_k \\ E_k \\ e_k \\ r_k \\ d_k \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_k = \begin{bmatrix} F_k & 0 & 0 & 0 & D_k \\ 0 & I & T_s & 0 & 0 \\ H_k F_k & 0 & 0 & -L_k & H_k D_k \\ 0 & 0 & 0 & L_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{G}_k &= \begin{bmatrix} G_k \\ 0 \\ H_k G_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

A linha nula na matriz \bar{F}_k indica que o distúrbio no instante $k + 1$ independe do seu valor no tempo k .

O objetivo é projetar um controlador ótimo baseado nos modos deslizantes, com a inclusão de uma ação integral, que seja capaz de direcionar a saída do sistema (1) ao encontro de r_k ao passo que resolva o seguinte problema de minimização:

$$\min_{\varepsilon_{N+1}, u_N} \left\{ \varepsilon_{N+1}^T P_{N+1} \varepsilon_{N+1} + \sum_{k=0}^N \varepsilon_k^T Q_k \varepsilon_k + u_k^T u_k \right\} \quad (8)$$

$$s.a. \quad \varepsilon_{k+1} = \bar{F}_k \varepsilon_k + \bar{G}_k u_k$$

com $P_{N+1} \geq 0$ e $Q_k > 0$ e iguais a

$$P_{N+1} = \begin{bmatrix} P_{N+1}^x & P_{N+1}^{xE} & P_{N+1}^{xE} & P_{N+1}^{xr} & P_{N+1}^{xd} \\ P_{N+1}^{Ex} & P_{N+1}^E & P_{N+1}^{Ee} & P_{N+1}^{Er} & P_{N+1}^{Ed} \\ P_{N+1}^{ex} & P_{N+1}^{eE} & P_{N+1}^e & P_{N+1}^{er} & P_{N+1}^{ed} \\ P_{N+1}^{rx} & P_{N+1}^{rE} & P_{N+1}^{re} & P_{N+1}^r & P_{N+1}^{rd} \\ P_{N+1}^{dx} & P_{N+1}^{dE} & P_{N+1}^{de} & P_{N+1}^{dr} & P_{N+1}^d \end{bmatrix},$$

$$Q_k = \text{diag}(Q_k^x, Q_k^E, Q_k^e, Q_k^r, Q_k^d)$$

3. ODSMC COM AÇÃO INTEGRAL PARA RASTREAMENTO DA SAÍDA

Nesta seção é desenvolvido o algoritmo para realização do controle ótimo por modos deslizantes com ação integral e rejeição de distúrbios externos. Considera-se a superfície de deslizamento integral $S = \{s_k | s_k = 0, \forall k > 0\}$ inspirada no trabalho desenvolvido por Abidi and Xu (2015),

$$s_k = e_k + E_k + \phi_k, \quad k = 0, \dots, N \quad (9)$$

em que ϕ_k é uma variável responsável pela otimização da superfície de deslizamento. É possível reescrever (9) a partir de (6) e do vetor $C = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$. Assim, chega-se em

$$s_k = C \varepsilon_k + \phi_k, \quad k = 0, \dots, N. \quad (10)$$

Sabendo que o modo deslizante ideal deve satisfazer a condição $s_{k+1} = s_k = 0$, tem-se

$$s_{k+1} = C \varepsilon_{k+1} + \phi_{k+1} = 0 \quad (11)$$

que, com a substituição de (6) em (11), leva a

$$s_{k+1} = C \bar{F}_k \varepsilon_k + C \bar{G}_k u_k + \phi_{k+1}. \quad (12)$$

Assumindo que $s_{k+1} = 0$ e resolvendo (12) para u_k , chegamos na lei de controle equivalente, dada por

$$u_k^{eq} = -(C \bar{G}_k)^{-1} [C \bar{F}_k \varepsilon_k + \phi_{k+1}]. \quad (13)$$

Tomando como parâmetro os resultados de Gao et al. (1995) e Xu (2007), tem-se para o controle chaveado a expressão

¹ Utilizado para aplicações em sistemas discretizados, para sistemas de tempo discreto $T_s = 1$.

$$u_k^{ch} = -(C\bar{G}_k)^{-1} [\rho s_k - \zeta T \text{sign}(s_k)], \quad \rho > 0, \zeta > 0. \quad (14)$$

Assim, sabendo que $u_k = u_k^{eq} + u_k^{ch}$, chega-se na seguinte lei de controle

$$u_k = -(C\bar{G}_k)^{-1} [C\bar{F}_k \varepsilon_k + \phi_{k+1} - \rho s_k + \zeta T_s \text{sign}(s_k)]. \quad (15)$$

Percebe-se que uma restrição na aplicação do controlador proposto neste trabalho reside na necessidade de atender a relação $C\bar{G}_k \neq 0$ e, conseqüentemente, $H_k G_k \neq 0$.

Considere que $s_0 = 0$, resultado obtido fazendo $\phi_0 = -(e_0 + E_0)$ em (9). Nesta situação o modo deslizante está ocorrendo e a lei de controle que estabiliza o deslizamento, derivada de (15), é dada por

$$u_k = -(C\bar{G}_k)^{-1} [C\bar{F}_k \varepsilon_k + \phi_{k+1} - \rho s_k]. \quad (16)$$

Aplicando o controle (16) no sistema (6), obtêm-se a equação de malha fechada definida por

$$\varepsilon_{k+1} = [\bar{F}_k - \bar{G}_k (C\bar{G}_k)^{-1} (C\bar{F}_k - \rho C)] \varepsilon_k - \bar{G}_k (C\bar{G}_k)^{-1} (\phi_{k+1} - \rho \phi_k). \quad (17)$$

De acordo com o desenvolvimento apresentado em Ferraço et al. (2011), é possível estabelecer, a partir de (17), um sistema equivalente definido como

$$\lambda_{k+1} = \mathcal{F}_k \lambda_k + \mathcal{G}_k v_k, \quad k = 0, \dots, N \quad (18)$$

no qual $\lambda_k = [\varepsilon_k^T \ \phi_k]^T$ e $v_k = \phi_{k+1} - \phi_k$. As matrizes de parâmetros do sistema são iguais a

$$\mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} \bar{F}_k - \bar{G}_k (C\bar{G}_k)^{-1} (C\bar{F}_k - \rho C) & \bar{G}_k (C\bar{G}_k)^{-1} (\rho - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{G}_k = \begin{bmatrix} -\bar{G}_k (C\bar{G}_k)^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Realizando algumas operações algébricas, é possível chegar a um novo funcional custo referente a (18), que é equivalente ao apresentado em (8), originando o seguinte problema de minimização

$$\min_{\lambda_{N+1}, v_N} \left\{ \lambda_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} \lambda_{N+1} + \sum_{k=0}^N \mathcal{L}_k(\lambda_k, v_k) \right\} \quad (20)$$

s.a. $\lambda_{k+1} = \mathcal{F}_k \lambda_k + \mathcal{G}_k v_k$

com o seguinte termo quadrático auxiliar

$$\mathcal{L}_k(\lambda_k, v_k) = \lambda_k^T \mathcal{Q}_k \lambda_k + 2\lambda_k^T \mathcal{S}_k v_k + v_k^T \mathcal{R}_k v_k \quad (21)$$

que, por sua vez, é composto pelas seguintes matrizes:

$$\mathcal{P}_{N+1} = \begin{bmatrix} P_{N+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_k = \begin{bmatrix} (C\bar{G}_k)^{-2} \psi^T \\ (C\bar{G}_k)^{-2} (1 - \rho) \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathcal{Q}_k = \begin{bmatrix} Q_k + (C\bar{G}_k)^{-2} \psi^T \psi & (C\bar{G}_k)^{-2} \psi^T (1 - \rho) \\ (C\bar{G}_k)^{-2} (1 - \rho) \psi & (C\bar{G}_k)^{-2} (1 - \rho)^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}_k = (C\bar{G}_k)^{-2}$$

nas quais $\psi = (C\bar{F}_k - \rho C)$.

A estrutura exibida em (20) é resolvida considerando os seguintes Lemas:

Lema 1. (Ferraço et al., 2011) *Seja $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva, $N \in \mathbb{R}^{k \times m}$ e $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Defina o seguinte funcional quadrático:*

$$J(x) = (Mx - z)^T V (Mx - z) \quad (23)$$

e considere o problema de minimização restrita dado por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^m} \{J(x)\}, \quad (24)$$

s.a. $Nx = w$

na qual $z \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}^k$. Associado com (24), há para cada número real $\mu > 0$ o seguinte problema de minimização irrestrita:

$$\min_{x(\mu) \in \mathbb{R}^m} \{J(x(\mu))\} \quad (25)$$

em que

$$J(x(\mu)) = (\mathcal{G}x(\mu) - \mathcal{B})^T \mathcal{V}(\mu) (\mathcal{G}x(\mu) - \mathcal{B})$$

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}(\mu) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & \mu I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}.$$

Suponha que a matriz \mathcal{G} possui posto coluna pleno, então as seguintes declarações são válidas:

(i) para cada $\mu > 0$, a solução ótima $\hat{x}(\mu)$ e o mínimo valor de $J(\hat{x}(\mu))$ associado a (25) é dado por

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(\mu) \\ J(\hat{x}(\mu)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathcal{B}^T \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \left[\mathcal{V}^{-1}(\mu) \mathcal{G} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{B} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

(ii) $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \hat{x}(\mu) = x^o$ e $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} J(\hat{x}(\mu)) = J(x^o)$, em que x^o e $J(x^o)$ é a solução ótima e o valor mínimo, respectivamente, para (24) e são dados por

$$\begin{bmatrix} x^o \\ J(x^o) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & w \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 & M \\ 0 & 0 & N \\ M^T & N^T & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z \\ w \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Observação 2. O termo quadrático

$$(N\hat{x}(\mu) - w)^T \mu I (N\hat{x}(\mu) - w)$$

tende a zero quando $\mu \rightarrow +\infty$

Lema 3. (Ferraço et al., 2011) *O problema de minimização restrita (20) pode ser resolvido recursivamente por meio da minimização de*

$$\min_{\lambda_1, v_0} \left\{ \mathcal{L}_0(\lambda_0, v_0) + \min_{\lambda_2, v_1} \left\{ \mathcal{L}_1(\lambda_1, v_1) + \dots + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \min_{\lambda_{N+1}, v_N} \left\{ \mathcal{L}_N(\lambda_N, v_N) + \lambda_{N+1}^T \mathcal{P}_{N+1} \lambda_{N+1} \right\} \right\} \dots \right\}$$

sujeito a $\lambda_{k+1} = \mathcal{F}_k \lambda_k + \mathcal{G}_k v_k$, para todo $k = 0, \dots, N$.

De acordo com o princípio da otimalidade de Bellman, a aplicação do Lema 3 em (20) obedece à sequência de passos $k = N - 1, \dots, 0$ relacionados à minimização de cada custo parcial definido como:

$$J_k(\lambda_{k+1}, v_k) = \lambda_{k+1}^T \mathcal{P}_{k+1} \lambda_{k+1} + \mathcal{L}_k(\lambda_k, v_k) \quad (28)$$

s.a. $\lambda_{k+1} = \mathcal{F}_k \lambda_k + \mathcal{G}_k v_k$.

A expressão (28) pode ser reescrita na forma de (23), mediante as seguintes identificações:

$$M = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_k, \quad V = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k & \mathcal{S}_k^T & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_k & \mathcal{Q}_k & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = [I \ -\mathcal{G}] \quad x = \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} \quad w = F \lambda_k$$

ou seja,

$$J_k(\lambda_{k+1}, v_k) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} \\ v_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_k \right)^T \times \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{k+1} & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{R}_k & \mathcal{S}_k^T & I & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_k & \mathcal{Q}_k & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix} (\bullet) \quad (29)$$

em que $A^T B A = A^T B(\bullet)$.

As considerações feitas até o momento permitem definir o seguinte Teorema:

Teorema 4. *O problema de controle por modos deslizantes do sistema (1), considerando a minimização de (20), possui a seguinte solução ótima*

$$x_{k+1}^* = [F_k - \Lambda(H_k F_k - K_k^x)] x_k + \Lambda[(L_k + K_k^r) r_k - (1 - K_k^E) E_k - (T_s - K_k^e) e_k + (K_k^\phi - 1) \phi_k + \rho s_k - \zeta T_s \text{sign}(s_k)] + [D_k - \Lambda(H_k D_k - K_k^d)] d_k \quad (30)$$

$$u_k^* = -(H_k G_k)^{-1} [(H_k F_k - K_k^x) x_k - (L_k + K_k^r) r_k + (1 - K_k^E) E_k + (T_s - K_k^e) e_k + (H_k D_k - K_k^d) d_k - (K_k^\phi - 1) \phi_k - \rho s_k + \zeta T_s \text{sign}(s_k)] \quad (31)$$

em que

$$K_k^x = \Omega_k [\Lambda_k^T P_k^x (\Lambda_k H_k F_k - F_k) + P_k^{ex} (\Lambda_k H_k F_k - F_k) + (H_k G_k)^{-2} H_k F_k] \quad (32)$$

$$K_k^E = \Omega_k [\Lambda_k^T P_k^x \Lambda_k (1 - \rho) + P_k^{ex} \Lambda_k (1 - \rho) - \Lambda_k^T P_k^{xE} - P_k^{EE} + \Lambda_k^T P_k^{xe} (1 - \rho) + P_k^e (1 - \rho) + (H_k G_k)^{-2} (1 - \rho)] \quad (33)$$

$$K_k^e = \Omega_k [\Lambda_k^T P_k^x \Lambda_k (T_s - \rho) + P_k^{ex} \Lambda_k (T_s - \rho) - \Lambda_k^T P_k^{xe} T_s - P_k^{EE} T_s + \Lambda_k^T P_k^{xe} (T_s - \rho) + P_k^e (T_s - \rho) + (H_k G_k)^{-2} (T_s - \rho)] \quad (34)$$

$$K_k^r = \Omega_k [-\Lambda_k^T P_k^x \Lambda_k L_k - P_k^{ex} - \Lambda_k^T P_k^{xr} L_k - P_k^{ex} L_k - (H_k G_k)^{-2} L_k] \quad (35)$$

$$K_k^d = \Omega_k [\Lambda_k^T P_k^x (\Lambda_k H_k D_k - D_k) + P_k^{ex} (\Lambda_k H_k D_k - D_k) + (H_k G_k)^{-2} H_k D_k] \quad (36)$$

$$K_k^\phi = \Omega_k [\Lambda_k^T P_k^x \Lambda_k (1 - \rho) + P_k^{ex} \Lambda_k (1 - \rho) + \Lambda_k^T P_k^{xe} (1 - \rho) + P_k^e (1 - \rho) + (H_k G_k)^{-2} (1 - \rho)] \quad (37)$$

com

$$P_k^x = Q^x + F_k^T [P_{k+1}^x - (\Delta 1) \Gamma^{-1} (\Delta 2)] F_k + (H_k F_k)^T [P_{k+1}^{ex} - (\Delta 3) \Gamma^{-1} (\Delta 2)] F_k + F_k^T [P_{k+1}^{xe} - (\Delta 1) \Gamma^{-1} (\Delta 4)] H_k F_k + (H_k F_k)^T [P_{k+1}^e - (\Delta 3) \Gamma^{-1} (\Delta 4)] H_k F_k \quad (38)$$

$$P_k^{xE} = F_k^T [(P_{k+1}^{xE} - (\Delta 1) \Gamma^{-1} (\Delta 5)) + (H_k F_k)^T [(P_{k+1}^{EE} - (\Delta 3) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] \quad (39)$$

$$P_k^{xe} = F_k^T [(P_{k+1}^{xe} - (\Delta 1) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] T + (H_k F_k)^T [(P_{k+1}^{EE} - (\Delta 3) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] T \quad (40)$$

$$P_k^{xr} = [F_k^T [(P_{k+1}^{xr} - (\Delta 1) \Gamma^{-1} (\Delta 6))] + (H_k F_k)^T [(P_{k+1}^{er} - (\Delta 3) \Gamma^{-1} (\Delta 6))] L_k - [F_k^T [(P_{k+1}^{xe} - (\Delta 1) \Gamma^{-1} (\Delta 4))] + (H_k F_k)^T [(P_{k+1}^e - (\Delta 3) \Gamma^{-1} (\Delta 4))] L_k] \quad (41)$$

$$P_k^e = Q^e + T_s^2 [(P_{k+1}^E - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] \quad (42)$$

$$P_k^{Ex} = T_s [(P_{k+1}^{Ex} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 2))] F_k + T_s [(P_{k+1}^{EE} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 4))] H_k F_k \quad (43)$$

$$P_k^{EE} = T_s [(P_{k+1}^E - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] \quad (44)$$

$$P_k^{Er} = T_s [(P_{k+1}^{Er} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 6))] L_k - T_s [(P_{k+1}^{EE} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 4))] L_k \quad (45)$$

$$P_k^E = Q^E + [(P_{k+1}^E - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] \quad (46)$$

$$P_k^{Ex} = [(P_{k+1}^{Ex} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 2))] F_k + [(P_{k+1}^{EE} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 4))] H_k F_k \quad (47)$$

$$P_k^{EE} = [(P_{k+1}^E - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 5))] T_s \quad (48)$$

$$P_k^{Er} = [(P_{k+1}^{Er} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 6))] L_k - [(P_{k+1}^{EE} - (\Delta 7) \Gamma^{-1} (\Delta 4))] L_k \quad (49)$$

sendo

$$\Lambda_k = G_k (H_k G_k)^{-1}$$

$$\Omega_k = [\Lambda_k^T P_k^x \Lambda_k + P_k^{ex} \Lambda_k + \Lambda_k^T P_k^{xe} + P_k^e + (H_k G_k)^{-2}]^{-1}$$

$$\Gamma = [(H_k G_k)^{-2} + \Lambda_k^T P_k^x \Lambda_k + P_k^{ex} \Lambda_k + \Lambda_k^T P_k^{xe} + P_k^e]$$

$$\Delta 1 = P_{k+1}^x \Lambda + P_{k+1}^{xe}, \quad \Delta 2 = \Lambda^T P_{k+1}^x + P_{k+1}^{ex}$$

$$\Delta 3 = P_{k+1}^{ex} \Lambda + P_{k+1}^e, \quad \Delta 4 = \Lambda^T P_{k+1}^{xe} + P_{k+1}^e$$

$$\Delta 5 = \Lambda^T P_{k+1}^{xE} + P_{k+1}^{EE}, \quad \Delta 6 = \Lambda^T P_{k+1}^{xr} + P_{k+1}^{er}$$

$$\Delta 7 = P_{k+1}^{Ex} \Lambda + P_{k+1}^{EE}$$

e

$$\phi_{k+1}^* = \phi_k^* - [K_k^x \ K_k^E \ K_k^e \ K_k^r \ K_k^d \ K_k^\phi] \lambda_k \quad (50)$$

$$\phi_0 = -e_0. \quad (51)$$

A superfície de deslizamento ótima é igual a

$$s_k^* = e_k + E_k + \phi_k^*. \quad (52)$$

Prova. Baseado nos Lemas 1 e 3, a solução recursiva ótima para cada $k = 0, \dots, N$ de (29) é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} \lambda_k; \quad k = 0, \dots, N \quad (53)$$

com

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_k \\ \mathcal{K}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R}_k & -\mathcal{S}_k^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S}_k & -\mathcal{Q}_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G}_k & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}_k^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{L}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{L}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{R}_k \mathcal{K}_k + \mathcal{S}_k \mathcal{K}_k + \mathcal{K}_k^T \mathcal{S}_k^T + \mathcal{Q}. \quad (54)$$

De forma equivalente, λ_{k+1}^* e v_k^* devem fazer parte do vetor solução do sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & -\mathcal{P}_{k+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & -\mathcal{R}_k & -\mathcal{S}_k^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{S}_k & -\mathcal{Q}_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & -\mathcal{G}_k \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & -\mathcal{G}_k^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ \sigma_7 \\ \lambda_{k+1}^* \\ v_k^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F}_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resultando em

$$\lambda_{k+1}^* = \underbrace{[\mathcal{F}_k - \mathcal{G}_k(\mathcal{R}_k + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k)^{-1}(\mathcal{S}_k^T + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F})]}_{\mathcal{L}_k} \lambda_k^*$$

e

$$v_k^* = -(\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} + \mathcal{R})^{-1}(\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F} + \mathcal{S}^T) \lambda_k^*.$$

Sabendo que uma lei de controle ótima para (18) é igual a

$$v_k^* = -\mathcal{K}_k \lambda_k$$

pode-se definir os ganhos do sistema como

$$\mathcal{K}_k = (\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G} + \mathcal{R})^{-1}(\mathcal{G}^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{F} + \mathcal{S}^T). \quad (55)$$

Substituindo em (55) as identificações feitas em (19) e (22), chega-se nas expressões (32)-(37) relativas a cada um dos ganhos do controlador.

O sinal de controle (31) é obtido aplicando (7) e (50) em (15).

Os termos relacionados à matriz de ponderação P_k são obtidos com a substituição das expressões de \mathcal{L}_k e \mathcal{K}_k em (54), resultando na equação de Riccati dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k &= (\mathcal{F}_k - \mathcal{G}_k \mathcal{R}_k^{-1} \mathcal{S}_k^T)^T [\mathcal{P}_{k+1} \\ &- \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k (\mathcal{R}_k + \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1} \mathcal{G}_k)^{-1} \mathcal{G}_k^T \mathcal{P}_{k+1}] (\mathcal{F}_k - \mathcal{G}_k \mathcal{R}_k^{-1} \mathcal{S}_k^T) \\ &+ (\mathcal{Q}_k - \mathcal{S}_k \mathcal{R}_k^{-1} \mathcal{S}_k^T) \end{aligned} \quad (56)$$

com posterior aplicação das identificações (19) e (22) em (56). ♦

Observação 5. A sequência L_k é definida previamente ao cômputo dos ganhos do controlador. A escolha dos valores ideais para este parâmetro é feita tomando como base o conhecimento acerca da referência e é fundamental para que o controlador funcione como esperado. A expressão (3) deve ser verdadeira para qualquer k . Valores arbitrários de L_k resultam na perda de algumas características do modo deslizante, apesar de ainda conseguir rastrear a saída.

Observação 6. Note que a lei de controle ótima não depende de todos os pesos das matrizes de ponderação. Assim, as linhas 4 e 5 e a coluna 5 de P_k , além dos termos Q_k^r e Q_k^d não exercem influência sobre a resposta em malha fechada do sistema, porém são mantidos com o objetivo de adequação das dimensões das matrizes que permitem obter a solução do problema proposto.

Observação 7. Todo o cômputo (32)-(49) é realizado off-line e apenas (31) é calculada em tempo real, não sendo uma expressão que demanda elevado esforço computacional. Além disso, em controle LQR, é comumente utilizado ganhos \mathcal{K} constantes, de modo que o custo computacional é irrelevante.

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção é realizada uma simulação numérica com o intuito de mostrar a efetividade do algoritmo ODSMC proposto no rastreamento da saída do sistema e na rejeição de distúrbios externos. Considera-se no exemplo um sistema invariante no tempo, com matrizes constantes associadas a (1) dadas por:

$$F = \begin{bmatrix} 0,9942 & -0,1005 \\ 0,1079 & 0,9808 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 11,8188 \\ -0,9496 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,2024 \\ 0,0110 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \ 0].$$

Tem-se ainda $P_{N+1} = I$, $Q = I$, $x_0 = [0 \ 0]^T$ e os parâmetros $\zeta = 0.01$ e $\rho = 0.5$.

O objetivo é fazer a saída y_k seguir uma referência dada pela seguinte expressão senoidal

$$r_k = 0,5 \sin(0,015\pi k) + 1. \quad (57)$$

Assume-se que r_k e r_{k+1} são conhecidos para todo instante k e, baseado nesta informação, o parâmetro L_k é determinado em obediência à expressão (3)

No exemplo utilizam-se ganhos \mathcal{K} constantes obtidos dos valores de convergência na solução do problema de otimização (20) com N suficientemente grande, neste caso $N = 200$. Para simular o comportamento do sistema na presença de um distúrbio externo, são aplicadas duas entradas do tipo degrau, amplificadas pela matriz de parâmetros D , com $d_k = 1$ no intervalo $k = [41, 80]$ e $d_k = 2$ em $k = [121, 160]$.

A Figura 1 retrata o comportamento da saída y_k do sistema, a referência e o sinal do distúrbio. Observa-se um bom desempenho do controlador, com a saída estabilizando em torno do objetivo rapidamente, decorridas aproximadamente 12 iterações.

Nota-se também a rejeição aos distúrbios, com a saída y_k se mantendo na trajetória desejada. Nos estudos realizados, observou-se que é necessário aplicar um degrau com amplitude superior a 10 para que os efeitos na saída do sistema se tornem visíveis graficamente. Ainda assim, o controlador consegue corrigir a trajetória e retornar para o nível desejado.

A Figura 2 mostra o erro entre a saída do controlador e a referência r_k , além de apresentar a evolução da função s_k que define a superfície de deslizamento. Observa-se que o seguimento da trajetória apresenta erro próximo de zero,

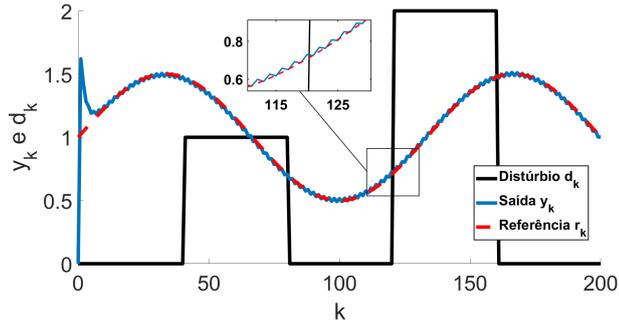


Figura 1. Saída do sistema sujeito a distúrbios para uma referência senoidal

atestando a eficiência do controlador proposto. Ademais, a função s_k se mantém estável durante toda a simulação.

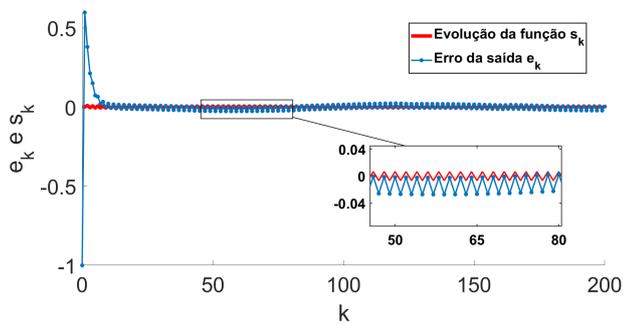


Figura 2. Evolução do erro e da função s_k

Já na Figura 3 apresenta-se o esforço de controle aplicado ao sistema. É possível notar o chaveamento do sinal, característica do controle por modos deslizantes. Percebe-se uma imediata reação do sinal de controle no instante da aplicação do distúrbio, com a finalidade de manter a saída na trajetória desejada.

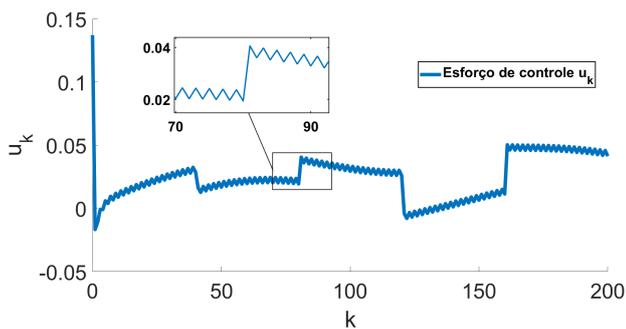


Figura 3. Sinal de controle do sistema

Alterações nos pesos da matriz de ponderação Q permitem o ajuste do esforço aplicado, mas sob o risco de deteriorar o desempenho do sistema, resultando em um maior tempo necessário para alcance e estabilização da saída na referência. Mudanças nos pesos também produzem efeito na ultrapassagem inicial da saída com relação ao objetivo. Conferir pesos maiores para a componente superior de Q^x e menores para a inferior reduzem a amplitude desta ultrapassagem.

5. CONCLUSÃO

Este artigo propôs um controlador ótimo com ação integral para sistemas sujeitos a distúrbios externos e rastreamento de referências utilizando a técnica dos modos deslizantes.

A inclusão da ação integral através da superfície de deslizamento se mostrou uma estratégia eficaz, uma vez que o controlador proposto entregou um curto tempo de resposta transitória do sistema e garantiu um erro próximo de zero em regime permanente para uma referência conhecida variante no tempo do tipo senoidal. Os resultados apresentados também sugerem o êxito na rejeição aos distúrbios externos, mesmo àqueles não relacionados à entrada de controle, com a saída não apresentando grandes variações quando perturbada pelos distúrbios exógenos. Maiores análises são necessárias para os casos em que a referência é desconhecida.

Sugere-se para trabalhos futuros a utilização do mesmo raciocínio apresentado neste trabalho em sistemas que envolvam incertezas paramétricas e, como aplicação prática, indica-se o emprego do controlador em um conversor *Buck-Boost* conectado a um sistema de geração fotovoltaica.

REFERÊNCIAS

- Abidi, K. and Xu, J.X. (2015). Discrete-time sliding mode control. In *Studies in Systems, Decision and Control*, 9–61. Springer Singapore.
- Alsmadi, Y.M., Alqahtani, A., Giral, R., Vidal-Idiarte, E., Martínez-Salamero, L., Utkin, V., Xu, L., and Abdellaziz, A.Y. (2020). Sliding mode control of photovoltaic based power generation systems for microgrid applications. *International Journal of Control*, 94(6), 1704–1715.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., Onana, A.B., and Nowakowski, S. (1995). Kalman filtering with unknown inputs via optimal state estimation of singular systems. *International Journal of Systems Science*, 26(10), 2015–2028. doi:10.1080/00207729508929152.
- Doruk, R. (2020). Angiogenic inhibition therapy, a sliding mode control adventure. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 190, 105358.
- Ferraço, I.B., Terra, M.H., and Cerri, J.P. (2011). Optimal sliding mode control via penalty approach for discrete-time linear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 5513–5518.
- Gao, W., Wang, Y., and Homaifa, A. (1995). Discrete-time variable structure control systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 42(2), 117–122.
- Ma, Z. and Huang, P. (2021). Nonlinear analysis of discrete-time sliding mode prediction deployment of tethered space robot. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 68(6), 5166–5175.
- Madureira, V.S., das Chagas, T.P., and de Jesus, G.Q. (2019). Regulador linear quadrático com ação integral para sistemas lineares com rejeição de distúrbios. In *XIV Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações*.
- Utkin, V. (1999). *Sliding mode control in electromechanical systems*. Taylor & Francis, London Philadelphia, PA.
- Xu, R. (2007). *Optimal sliding mode control and stabilization of underactuated systems*. Tese de ph.d., Ohio State University.