

Controle de ganho escalonado para rotação e translação de espaçonaves usando quatérnios e síntese por otimização convexa

Luís Henrique de Marchi Guerini* Rafael da Silveira Castro**

* Grupo de Automação e Controle de Sistemas (GACS), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, RS, (e-mail: luis.marchi@edu.pucrs.br).

** Grupo de Automação e Controle de Sistemas (GACS), Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, RS, (e-mail: rafael.castro@pucrs.br).

Abstract: This work presents the development of a robust control design for spacecraft with six degrees of freedom (6-DOF), considering nonlinear dynamics, looking for exponential convergence to an objective location and orientation. To represent the rotation and translation movements, quaternions and Newton-Euler differential equations will be used. The nonlinear system will be presented in the *quasi*-LPV (Linear Parameter Varying) form under a gain scheduled control law, with the synthesis of the gain matrices obtained by means of convex optimization with linear matrix constraints.

Resumo: Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um projeto de controle robusto para espaçonaves com seis graus de liberdade (6-DOF), considerando a dinâmica não-linear, visando a convergência exponencial para uma localização e orientação objetivo. Para representação dos movimentos de rotação e translação, serão utilizados quatérnios e equações diferenciais de Newton-Euler. O sistema não-linear será apresentado na forma *quasi*-LPV (Linear Parameter Varying) sob uma lei de controle tipo ganho escalonado, sendo a síntese das matrizes de ganho obtidas por meio de otimização convexa com restrições matriciais lineares.

Keywords: *Quasi*-Linear Parameter Varying models; control with gain scheduling; nonlinear systems; rigid body dynamics; spacecrafts; quaternions; Linear Matrix Inequalities.

Palavras-chaves: Modelos *Quasi*-Linear Parameter Varying; controle com ganho escalonado; sistemas não-lineares; dinâmica do corpo rígido; espaçonaves; quatérnios; Inequações Matriciais Lineares.

1. INTRODUÇÃO

A aplicação de diferentes técnicas de controle para espaçonaves vem sendo objeto de diversas pesquisas há muito tempo, mas ainda se mantém atual com novos e promissores desenvolvimentos. Cai et al. (2008) menciona o desafio e importância de desenvolver sistemas de controle para espaçonaves que sejam rápidos e precisos, considerando todas as variáveis do sistema, além da economia de recursos. Este se trata de um sistema mecânico, onde se deseja controlar a movimentação em seus seis graus de liberdade (em três eixos), sendo três correspondentes aos movimentos de rotação e três correspondentes aos movimentos de translação.

Como o sistema se encontra no espaço sideral, não há a influência de elementos dissipativos, como a resistência imposta pelo ar ou a fricção com superfícies, assim sendo, qualquer força aplicada produz um movimento ou velocidade, que se mantém inalterada até que outra força

seja aplicada. Também não há a influência de elementos capacitivos que armazenem a energia, pois a força é aplicada diretamente no objeto a ser movido e o ambiente não fornece características para acúmulo de energia.

Wie and Barba (1985) aplicaram pela primeira vez a combinação de quatérnios para representação do sistema rotacional de uma espaçonave juntamente com o uso do teorema de estabilidade de Lyapunov para analisar este sistema. Sua característica não-linear ocorre pela dependência dos movimentos de rotação em cada eixo em relação aos demais eixos, bem como o movimento de translação que é dependente da rotação. Slotine and Di Benedetto (1990) apresentam uma abordagem de controle adaptativo para uma manipulação precisa de cargas com dinâmica desconhecida por espaçonaves. Zou and Kumar (2012) utilizaram redes neurais para controlar adaptativamente a formação de múltiplas espaçonaves. Wang and Ji (2019) apresentaram uma solução para acoplamento de uma espaçonave à estação espacial (ISS), utilizando o método de *backstepping* para projetar a lei de controle. Xu et al. (2020) empregaram o modelo *fuzzy* no desenvolvimento de

* Este trabalho foi apoiado em parte pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001.

um controlador para o sistema espaçonave, considerando saturação das entradas e perturbação persistente.

Com o presente trabalho, tem-se por objetivo contribuir apresentando uma metodologia para desenvolver uma lei de controle no formato ganho escalonado para os movimentos de rotação e translação de corpos rígidos. Para isso, algumas ferramentas serão utilizadas, como a modelagem do sistema que se utilizará de quatérnios e das equações de Newton-Euler. Para evitar linearizações, será utilizada a representação do sistema na forma *quasi*-LPV, bem como uma abordagem politópica dos limites do sistema. Já as restrições LMI (Linear Matrix Inequalities, ou Desigualdades Matriciais Lineares) (Boyd et al., 1994) serão empregadas visando a resolução do problema de otimização convexa. Para analisar a estabilidade do sistema será utilizado o teorema de Lyapunov, e a convergência assintótica será garantida dentro de um tempo especificado pela utilização do decaimento exponencial (Castro et al., 2021).

Notações: \mathbb{R} é o conjunto dos números reais, \mathbb{R}^n é o espaço Euclidiano de dimensão n , $\mathbb{R}^{n \times m}$ indica as dimensões $n \times m$ de uma matriz real. I_n representa uma matriz identidade de dimensão $n \times n$, 0_n é uma matriz de dimensão $n \times n$ de zeros, x_i representa a i -ésima componente do vetor x e $sgn(x)$ a função sinal de x . P^T é a matriz transposta da matriz P , $He\{P\} = P + P^T$, $\text{diag}\{P, T\}$ denota uma matriz diagonal obtida por P e T . $P > 0$ significa que P é uma matriz positiva definida, para $P \geq 0$ uma matriz positiva semi-definida, para $P < 0$ uma matriz negativa definida e $P \leq 0$ para uma matriz negativa semi-definida. Para uma matriz de bloco simétrico, $*$ representa o transposto do termo fora da diagonal principal. Para um politopo Δ , $\mathcal{V}(\Delta)$ é o conjunto de todos os vértices de Δ .

2. SEÇÃO PRELIMINAR

Para a representação dos movimentos de rotação da espaçonave, em três dimensões, comumente são utilizados quatérnios, e estes serão aplicados ao presente trabalho, sendo que na forma vetorial se apresentam como

$$q = \begin{bmatrix} \eta \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) \\ r \sin(\frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

onde $\eta \in \mathbb{R}$ é a parte real e $\epsilon \in \mathbb{R}^3$ são os componentes imaginários. Já na representação eixo-ângulo, tem-se que $r \in \mathbb{R}^3$ é o eixo de rotação que descreve a direção da mesma, e θ o ângulo desta rotação. O quatérnio de rotação natural, sem alteração de escala, tem norma igual a 1, ou seja,

$$\|q\| = \sqrt{\eta^2 + \epsilon^T \epsilon} = 1. \quad (2)$$

Esta definição implica que $-1 \leq \eta \leq 1$ e $\|r\| = 1$.

Assim sendo, a dinâmica de um corpo rígido com seis graus de liberdade é (Markley and Crassidis, 2014)

$$\begin{cases} \dot{\eta} = -\frac{1}{2}\epsilon^T \omega; \\ \dot{\epsilon} = \frac{1}{2}(\eta I_3 + S(\epsilon))\omega, \\ J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + \tau, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = v, \\ M\dot{v} = R(q)f \end{cases} \quad (4)$$

sendo (3) o conjunto de equações para o movimento de rotação, onde $J \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz inércia da espaçonave,

$\omega \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular e $\tau \in \mathbb{R}^3$ é o torque que impulsionará a espaçonave e variável que será controlada, de forma que o movimento de rotação seja realizado para alcançar o posicionamento desejado. Ainda, $S(\epsilon)$ é o produto vetorial representado na forma matricial por

$$S(\epsilon) = \begin{bmatrix} 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Já as equações em (4) se referem ao movimento de translação da espaçonave, onde $M \in \mathbb{R}$ é a massa da espaçonave, $v \in \mathbb{R}^3$ é a velocidade, $f \in \mathbb{R}^3$ é a força aplicada e o sinal que será controlado e, por fim, $R(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é o movimento de rotação, sendo que o movimento de translação é dependente deste, pois o mesmo altera a posição dos eixos de referência e é definido como

$$R(q) = I_3 + 2\eta S(\epsilon) + 2S^2(\epsilon). \quad (6)$$

Para análise da estabilidade do sistema, será utilizado o teorema de Lyapunov, conforme a seguir (Khalil, 2002)

Lema 1. Considere um sistema não-linear $\dot{x} = f(x)$, onde $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f: \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$, sendo seu ponto de equilíbrio $x = 0$. A origem do sistema é dita estável se

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad x \neq 0, \quad (7)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (8)$$

Caso se verifique que

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad x \neq 0, \quad (9)$$

então a origem é assintoticamente estável em \mathcal{X} . Ainda, se for observado que

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : V(x) \leq 1\} \subset \mathcal{X}, \quad (10)$$

além de (7) e (9) serem satisfeitos, então toda a trajetória iniciada no conjunto positivamente invariante \mathcal{D} convergirá para a origem.

As seções subsequentes visam analisar a estabilidade, bem como apresentar um método sistemático para projetar uma lei controle que estabilize exponencialmente o sistema (3) e (4) para a origem de coordenadas. Sem perda de generalidade, a origem é considerada como a posição $p = 0$ e a orientação identidade ($|\eta| = 1, \epsilon = 0$). Caso o objetivo não seja a origem, com uma simples troca de coordenadas desloca-se o ponto para esta localização. A estabilização se dará regionalmente, portanto é necessário determinar um conjunto de condições iniciais viáveis para tal. Por fim, é apresentado um exemplo numérico em um ambiente de simulação, utilizando o software MATLAB.

3. METODOLOGIA PROPOSTA

Para possibilitar o uso de métodos lineares para análise e controle do sistema em (3) e (4), será utilizada a representação do mesmo no formato *quasi*-LPV, visando posterior uso de LMIs para aplicação de otimização convexa. Para atingir tal objetivo, primeiramente é necessário realizar algumas adaptações no modelo do sistema.

3.1 Modelagem Quasi-LPV

A representação *quasi*-LPV (*quasi*-linear parameter varying) é largamente empregada, visto que ela possibilita a utilização de ferramentas aplicadas a sistemas lineares

no desenvolvimento de controles otimizados para sistemas não-lineares. Com isso, é possível aplicar um controle do tipo ganho escalonado (Gain-Scheduling), observando sua robustez e garantindo a estabilidade do sistema.

Ainda, este método é compatível com o uso de técnicas de otimização convexa, através de LMIs (Marcos and Balas, 2004), (Shamma and Cloutier, 1993). Assim sendo, esta modelagem, no espaço de estados, tem o formato

$$\dot{x} = A(\delta(x))x + Bu, \quad (11)$$

onde $\delta(x)$ é um vetor que concentra as não-linearidades do sistema, de modo que este seja limitado a um politopo Δ para um conjunto \mathcal{X} de interesse. Adicionalmente, pode-se concluir que a matriz A é dependente dos estados do sistema (afim em x).

Deve-se observar que o ponto de equilíbrio do sistema é a origem, e que, para o movimento de rotação, significa que é suficiente garantir que $\epsilon = 0$, uma vez que $\eta \rightarrow \pm 1$ pela restrição da norma do quatérnio em (2). Assim sendo, retira-se do modelo a primeira equação em (3), referente a $\dot{\eta}$.

Ainda, efetuam-se trocas de coordenadas, visando simplificar a estrutura de $\delta(x)$ e adaptar o modelo (3) e (4) para o modelo *quasi*-LPV, e assim tratar as não linearidades do sistema sem a necessidade de linearização das mesmas. Isto se dá conforme a seguir

$$S(\epsilon)\omega = -S(\omega)\epsilon. \quad (12)$$

Para tratar da dualidade no sinal de η , ou seja, visando utilizar somente a porção positiva deste componente, é realizada uma segunda troca coordenadas conforme

$$\epsilon = \text{sgn}(\eta)\epsilon. \quad (13)$$

Ao realizar estas adequações, o modelo do sistema referente a rotação em (3) é dado por (Salton et al., 2017)

$$\begin{cases} \dot{\epsilon} = \frac{1}{2}(|\eta|\omega - S(\omega)\epsilon), \\ J\dot{\omega} = -S(\omega)J\omega + \tau, \end{cases} \quad (14)$$

onde com a substituição no modelo, tem-se que η se torna $|\eta|$, assim eliminando a porção negativa. Entretanto, com esta adequação, observa-se que quando $\theta \rightarrow \pi$ rad acontece que $\eta \rightarrow 0$ e observa-se uma descontinuidade deste sinal, ou seja, uma singularidade que causa a não controlabilidade do sistema e, portanto, a estabilidade não pode ser garantida. Para contornar este problema, é necessário limitar a região de operação do ângulo $\theta \in (-\pi, \pi)$, pois assim evita-se $\eta = 0$. Para mais detalhes, consultar Salton et al. (2017).

Em seguida, para eliminar as não-linearidades que envolvem a entrada de controle e os estados do sistema referentes às equações do movimento de translação em (4), é empregada nova troca de coordenadas

$$\begin{aligned} \rho &= R(q)^T p, \\ \nu &= R(q)^T v, \end{aligned} \quad (15)$$

observando que $\dot{R}(q) = R(q)S(\omega)$ e realizando a substituição nas equações originais em (4), a modelagem adaptada do movimento de translação se torna

$$\begin{cases} \dot{\rho} = S(\omega)^T \rho + \nu, \\ \dot{\nu} = S(\omega)^T \nu + M^{-1}f. \end{cases} \quad (16)$$

A escolha lógica e intuitiva dos estados do sistema, sabendo que estes podem ser medidos através de sensores

inerciais, bem como a definição das entradas do sistema, são dadas por

$$x = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \omega \\ \rho \\ \nu \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Então expressamos a modelagem do sistema pós adequações, resultante em (14) e (16), para o formato em (11), onde obtém-se

$$A(\delta(x)) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}S(\omega) & \frac{1}{2}|\eta|I_3 & 0 & 0 \\ 0 & -J^{-1}S(\omega)J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(\omega)^T & I_3 \\ 0 & 0 & 0 & S(\omega)^T \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ J^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

e a escolha de $\delta(x)$ é dada por

$$\delta(x) = \begin{bmatrix} |\eta| \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Assim sendo, os limites do sistema, que são definidos *a priori* pelo projetista, são apresentados como

$$|\eta| \in [\cos(\frac{\bar{\theta}}{2}), 1], \quad (21)$$

$$\epsilon_i \in [-\text{sen}(\frac{\bar{\theta}}{2}), \text{sen}(\frac{\bar{\theta}}{2})], \quad 0 \leq \bar{\theta} < \pi, \quad (22)$$

$$\omega_i \in [-\bar{\omega}, \bar{\omega}], \quad \bar{\omega} > 0, \quad (23)$$

$$\rho_i \in [-\bar{\rho}, \bar{\rho}], \quad \bar{\rho} > 0, \quad (24)$$

$$\nu_i \in [-\bar{\nu}, \bar{\nu}], \quad \bar{\nu} > 0, \quad (25)$$

$$\tau_i \in [-\bar{\tau}, \bar{\tau}], \quad \bar{\tau} > 0, \quad (26)$$

$$f_i \in [-\bar{f}, \bar{f}], \quad \bar{f} > 0, \quad (27)$$

com $i = 1, 2, 3$.

Embora não seja aplicado o efeito de saturação neste trabalho, será considerada uma limitação de suas entradas, conforme

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{f} \end{bmatrix}, \quad (28)$$

que se dá pela determinação de uma região de validade da entrada de controle \mathcal{U} , dada por

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^6 : |u_j| < \bar{u}_j, \quad j = 1, \dots, 6\}, \quad (29)$$

portanto $u(t) \in \mathcal{U} \quad \forall t > 0$.

Devido aos limites do sistema determinados e apresentados em (21)-(25), bem como a necessidade de garantir que $\delta(x) \in \Delta \quad \forall x \in \mathcal{X}$, deve-se restringir o espaço de estados a uma região poliedral \mathcal{X} onde

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^{12} : |p_k x| \leq 1, \quad k = 1, \dots, 12\} \quad (30)$$

com

$$\begin{aligned} p_1 &= [\bar{\epsilon}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_2 &= [0 \ \bar{\epsilon}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_3 &= [0 \ 0 \ \bar{\epsilon}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_4 &= [0 \ 0 \ 0 \ \bar{\omega}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_5 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\omega}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_6 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\omega}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_7 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\rho}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_8 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\rho}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} p_9 &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\rho}^{-1} \ 0 \ 0 \ 0], \\ p_{10} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\nu}^{-1} \ 0 \ 0], \\ p_{11} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\nu}^{-1} \ 0], \\ p_{12} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \bar{\nu}^{-1}]. \end{aligned}$$

Assim, conforme a opção de $\delta(x)$ em (20), além da observância de (21) e (23), e sabendo que $\delta(x) : \mathcal{X} \rightarrow \Delta$, tem-se

$$\Delta = \{\delta(x) \in \mathbb{R}^4 : \cos(\frac{\bar{\theta}}{2}) \leq |\eta| \leq 1, |\omega_i| \leq \bar{\omega}, i = 1, 2, 3\} \quad (32)$$

Como o espaço de estados é limitado localmente pela região \mathcal{X} , se faz necessário restringir a possibilidade de condições iniciais para somente aquelas onde a estabilidade será garantida. Portanto, considere o conjunto positivamente invariante \mathcal{D} , onde $x(0) \in \mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, logo garante-se que $x(t) \in \mathcal{X}$ e portanto $\delta(x) \in \Delta \forall t > 0$.

3.2 Condições de Estabilidade e Desempenho para Síntese do Controle

Para a formulação de uma lei de controle para o sistema espaçonave, considerando que os estados são medidos, foi optado pela técnica de ganho escalonado variante no tempo, sendo que esta tem uma estrutura afim conforme

$$u = K(\delta(x))x, \quad (33)$$

e sua utilização é possibilitada devido ao uso da modelagem do sistema não-linear no formato *quasi*-LPV, sendo que para esta aplicação se apresenta como

$$K(\delta(x))x = K_0 + \sum_{\ell=1}^4 K_\ell \delta_\ell(x)x. \quad (34)$$

Observa-se então, que são computados cinco valores diferentes de K , sendo K_0 uma parcela constante e K_ℓ relacionado a cada $\delta_\ell(x)$ do sistema, com $\ell = 1, 2, 3, 4$. Onde os coeficientes de ganho K oscilam de acordo com a variação dos valores de cada componente de $\delta(x)$ individualmente (Rugh and Shamma, 2000). Assim, a equação do modelo em (11), quando atualizado para malha fechada, fica no formato

$$\dot{x} = (A(\delta(x)) + BK(\delta(x)))x. \quad (35)$$

É de grande importância assegurar que a convergência do sistema seja executada com uma taxa de decaimento aceitável, do contrário a manobra efetuada pela espaçonave pode ser finalizada em um período muito além do aceitável. Para tanto, utiliza-se o conceito de estabilidade exponencial (Castro et al., 2021):

$$\exists \sigma, \alpha > 0 : \|x(t)\| \leq \sigma \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \quad (36)$$

onde σ e α são escalares positivos e α representa a taxa de decaimento exponencial, sendo sua inversa a constante de tempo. Ainda, observa-se que em $4\alpha^{-1}$ tem-se aproximadamente 99% da acomodação do sistema na origem. Onde α deve ser determinado *a priori* pelo usuário para que a convergência aconteça dentro de um tempo desejável.

É preciso ressaltar que a convergência em um tempo menor exige que o controle atue de forma mais agressiva, que implica em um possível gasto excessivo de energia, além da necessidade de grandes valores de velocidade angular (ω) para cumprir o objetivo. Contudo, estes são limitados,

conforme definido em (23), então a escolha de α deve ser condizente com os parâmetros do sistema.

Na sequência é apresentado o principal resultado deste trabalho.

Teorema 1. Suponha que existam matrizes escalares $F \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ e $G_0, \dots, G_4 \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$, tais que as condições LMI sejam satisfeitas para todo $\delta(x)$ que se encontra em $\mathcal{V}(\Delta)$:

$$F \succ 0, \quad (37)$$

$$He\{A(\delta(x))F + BG(\delta(x)) + \alpha F\} \prec 0, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & p_k F \\ * & F \end{bmatrix} \succ 0. \quad (39)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_j^2 & I_6 G(\delta(x)) \\ * & F \end{bmatrix} \succ 0. \quad (40)$$

onde

$$G(\delta(x)) = (G_0 + \sum_{\ell=1}^4 G_\ell \delta_\ell(x)), \quad (41)$$

sendo que a reconstrução dos ganhos K é dada por

$$K_m = G_m F^{-1}, \quad m = 0, \dots, 4. \quad (42)$$

Então, segue que com os ganhos projetados, a convergência exponencial do sistema (14) e (16) para a origem é garantida, desde que as condições iniciais estejam contidas em

$$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{12} : x^T P x \leq 1\}, \quad (43)$$

$$F = P^{-1}. \quad (44)$$

Prova. Seja $V(x) = x^T P x$ a função de Lyapunov candidata escolhida, sendo

$$P \succ 0, \quad (45)$$

então pode-se afirmar que $V(x) > 0 \forall t > 0$ e que a condição (7) é satisfeita.

Como consequência, observa-se que $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$, e caso exista um escalar positivo α capaz de satisfazer

$$\dot{V}(x) < -\alpha V(x), \quad (46)$$

então a convergência exponencial (36) é garantida. Ao aplicar ao sistema (35), é possível reescrever (46) como

$$x^T He\{PA(\delta(x)) + PBK(\delta(x)) + \alpha P\} x < 0. \quad (47)$$

Sabendo que $x(t) \in \mathcal{X} \forall t \geq 0$ implica $\delta(t) \in \Delta \forall t \geq 0$, então pode-se representar (47) como

$$He\{PA(\delta(x)) + PBK(\delta(x)) + \alpha P\} < 0 \forall \delta \in \Delta. \quad (48)$$

que garante o atendimento de (46) e da condição (8).

Para provar que $\mathcal{D} \in \mathcal{X}$, sendo que $x(0) \in \mathcal{D}$, deve-se levar em consideração (30) e (43), que podem ser apresentados conforme

$$x^T p_k^T p_k x < x^T P x \leq 1, \quad (49)$$

onde colocando $x^T x$ em evidência e aplicando o complemento de Schür tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & p_k \\ * & P \end{bmatrix} > 0, \quad (50)$$

assegurando o atendimento da condição (10).

Por último, observando (33) podemos representar (29) como

$$x^T \left(\frac{K(\delta(x))^T K(\delta(x))}{\bar{u}_j^2} \right) x < x^T P x \leq 1, \quad (51)$$

onde, novamente colocando $x^T x$ em evidência e aplicando o complemento de Schür, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_j^2 & K(\delta(x)) \\ * & P \end{bmatrix} > 0. \quad (52)$$

Considerando as trocas de variáveis de decisão (44) e

$$G(\delta(x)) = K(\delta(x))P^{-1}, \quad (53)$$

é possível obter (37) a partir de (45). Se observa também que pré e pós multiplicando (50) e (52) por $\text{diag}\{1, P^{-1}\}$, e logo após realizando as trocas de variáveis supracitadas, obtém-se (39) e (40), respectivamente. Ainda, para encontrar (38) a partir de (48), é preciso pré e pós multiplicar (38) por P^{-1} e realizar as trocas de variáveis de decisão.

Recordando que as matrizes A e B são funções afins em $\delta(x)$, para garantir que as condições (37)-(40) são válidas para todo o conjunto $\delta \in \Delta$, é necessário e suficiente verificar essas inequações apenas nos vértices da região Δ , ou seja, $\forall \delta \in \mathcal{V}\{\Delta\}$ (Boyd et al., 1994), o que conclui a prova.

Por conseguinte, deseja-se aumentar a estimativa da região de atração \mathcal{D} , e assim possibilitar uma gama maior de condições iniciais viáveis que garantam a estabilidade e performance do sistema. Para tanto, é preciso realizar a minimização do traço de $P = F^{-1}$, que pode ser executado utilizando uma matriz auxiliar simétrica e positiva definida $X \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$, que satisfaz $X > F^{-1}$. Usando o complemento de Schür, obtém-se

$$\begin{bmatrix} X & I_{12} \\ * & F \end{bmatrix} > 0, \quad (54)$$

Assim sendo, formula-se o problema de otimização convexa conforme a seguir

$$\min_{F,G} \text{tr}(X) \text{ sujeito a (37), (38), (39) e (40)}. \quad (55)$$

4. SIMULAÇÃO

Para o ambiente de simulação foi utilizado o programa MATLAB e a ferramenta LMILAB. Inicialmente, foram definidos os valores de J e M de forma arbitrária, escolhidos conforme

$$J = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ kg.m}^2, \quad (56)$$

$$M = 4000 \text{ kg}. \quad (57)$$

É possível observar que, caso seja estipulado $\bar{\omega}$ grande o suficiente, a factibilidade do sistema dependerá unicamente de $\bar{\theta}$, pois o tamanho do espaço de estados, limitado a \mathcal{X} , é definido conforme (25), (26), (27) e (28). Para as condições iniciais do sistema, foram escolhidos valores onde o sistema se inicia próximo da borda do conjunto positivamente invariante \mathcal{D} , para que a simulação procure testar os limites da proposta. Assim, foram utilizados os seguintes valores de parâmetros

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{\pi}{4} \text{ rad}, & \bar{\nu} &= 10 \text{ m/s}, \\ \bar{\omega} &= 1 \text{ rad/s}, & \bar{\tau} &= 10^5 \text{ Nm}, \\ \bar{\rho} &= 2 \text{ m}, & \bar{f} &= 10^4 \text{ N}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(0) &= [\text{sen}(\frac{\pi}{9}) \quad -\text{sen}(\frac{\pi}{9}) \quad \text{sen}(\frac{\pi}{9})]^T \text{ rad}, \\ \omega(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \text{ rad/s}, \\ \rho(0) &= [-0,4 \ 0,4 \ -0,4]^T \text{ m}, \\ \nu(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (59)$$

Ainda, foi considerado um valor de $\alpha = 0,5/s$ para a convergência exponencial.

Com isso, através do problema de otimização, foi obtido um valor de $\text{tr}(P) = 29,0536$ e $\mathcal{D} = 0,9987$. Com isso, também foram encontradas as matrizes K_m referente aos ganhos, dadas conforme

$$K_0 = -10^5 \cdot \begin{bmatrix} 0.820 & 0 & 0 & 0.637 & 0 & 0 \\ 0 & 1.177 & 0 & 0 & 0.655 & 0 \\ 0 & 0 & 0.984 & 0 & 0 & 0.653 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.018 & 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.018 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.018 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = -10^4 \cdot \begin{bmatrix} 3.44 & 0 & 0 & 0.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.76 & 0 & 0 & 0.79 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.28 & 0 & 0 & 0.51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

$$K_2 = -10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.97 & 0 & 0 & 0.51 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5.07 & 0 & 0 & 0.82 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$K_3 = -10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3.50 & 0 & 0 & 0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4.29 & 0 & 0 & 0.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$K_4 = -10^4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3.46 & 0 & 0 & -1.80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5.06 & 0 & 0 & -0.68 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

A seguir são apresentadas as figuras obtidas a partir de plotagens geradas pela simulação. Para a Figura 1 é demonstrada a variação dos valores dos estados do sistema (x), durante a trajetória da espaçonave, desde seu momento inicialmente em repouso até a convergência na origem. É possível observar que o tempo de acomodação é aproximadamente em 10s, também que as forças (f) exercem uma influência inicialmente em direção ao objetivo, entretanto ao se aproximar dele, é invertido o sinal da mesma para realizar a frenagem da espaçonave, sendo que o mesmo acontece para os torques (τ).

Nas Figuras 2 e 3, é apresentada a forma de um satélite animado para descrever de uma maneira ainda mais visual a trajetória realizada pelo mesmo, de acordo com os valores observados na Figura 1, bem como a convergência exponencial à origem.

5. CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um método sistemático para controlar os movimentos de rotação e translação de espa-

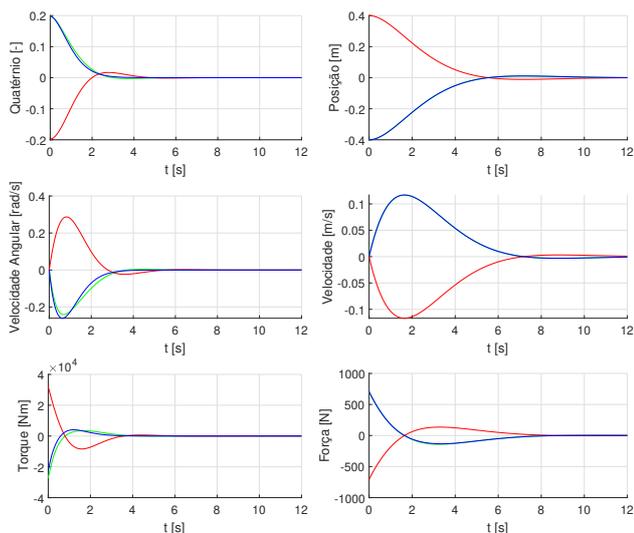


Figura 1. Estados do Sistema: Comportamento da espaçonave ao longo do tempo.

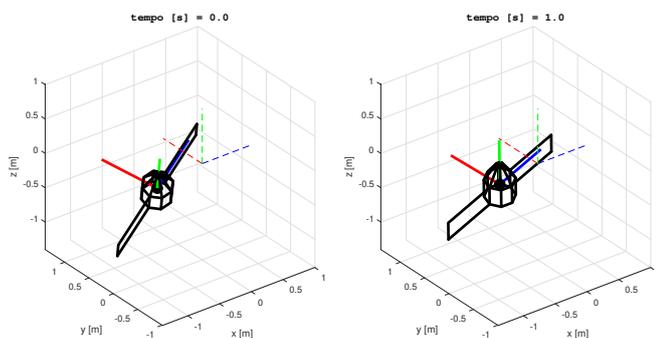


Figura 2. Animação: Deslocamento da espaçonave nos tempos 0 e 1s.

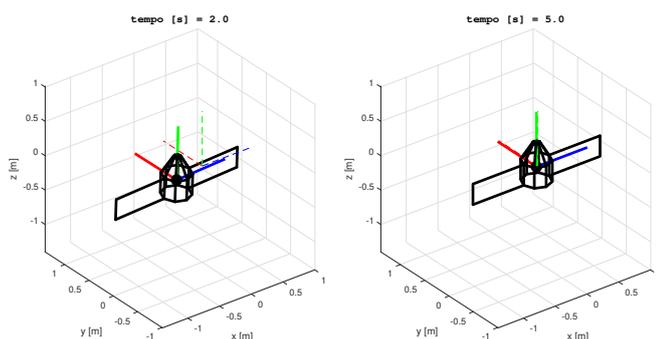


Figura 3. Animação: Deslocamento da espaçonave nos tempos 2 e 5s.

çonaves, sem linearizações e com estabilidade garantida, visando o deslocamento para uma localização objetivo dentro de um tempo máximo estipulado pelo projetista. O mesmo pode ser aproveitado em outras aplicações semelhantes que envolvem sistemas com seis graus de liberdade, desde que seja adaptado para o modelo físico que se deseja controlar.

Os ganhos do controlador foram obtidos através do problema de otimização convexa, na forma de LMIs, visando aumentar o conjunto de condições iniciais possíveis.

Ressalta-se a possibilidade de implementação do efeito de saturação das entradas, aplicando as condições de setor descritas detalhadamente em Oliveira et al. (2012) ao Teorema 1. Também pode-se adicionar de forma robusta a função custo garantido H_∞ bem como a delimitação de um tempo mínimo para a execução das manobras.

REFERÊNCIAS

- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM.
- Cai, W., Liao, X., and Song, Y. (2008). Indirect robust adaptive fault-tolerant control for attitude tracking of spacecraft. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 31(5), 1456–1463.
- Castro, R.S., Flores, J.V., Salton, A.T., and Gomes da Silva Jr, J.M. (2021). Controller and anti-windup co-design for the output regulation of rational systems subject to control saturation. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(4), 1395–1417.
- Khalil, H. (2002). *Nonlinear Systems (3rd)*. Prentice Hall.
- Marcos, A. and Balas, G.J. (2004). Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(2), 218–228.
- Markley, F.L. and Crassidis, J.L. (2014). *Fundamentals of spacecraft attitude determination and control*. Springer.
- Oliveira, M.Z., da Silva, J.G., and Coutinho, D. (2012). State feedback design for rational nonlinear control systems with saturating inputs. In *2012 American Control Conference (ACC)*, 2331–2336. IEEE.
- Rugh, W.J. and Shamma, J.S. (2000). Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10), 1401–1425.
- Salton, A.T., Castro, R.S., Borges, B.S., Flores, J.V., and Coutinho, D.F. (2017). Semidefinite programming solution to the spacecraft analysis and control problem. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1), 3959–3964.
- Shamma, J.S. and Cloutier, J.R. (1993). Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of guidance, Control, and dynamics*, 16(2), 256–263.
- Slotine, J. and Di Benedetto, M. (1990). Hamiltonian adaptive control of spacecraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(7), 848–852.
- Wang, Y. and Ji, H. (2019). Integrated relative position and attitude control for spacecraft rendezvous with iss and finite-time convergence. *Aerospace Science and Technology*, 85, 234–245.
- Wie, B. and Barba, P.M. (1985). Quaternion feedback for spacecraft large angle maneuvers. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 8(3), 360–365.
- Xu, S., Wen, H., and Huang, Z. (2020). Robust fuzzy sampled-data attitude control of spacecraft with actuator saturation and persistent disturbance. *Aerospace Science and Technology*, 101, 105850.
- Zou, A.M. and Kumar, K.D. (2012). Neural network-based distributed attitude coordination control for spacecraft formation flying with input saturation. *IEEE transactions on neural networks and learning systems*, 23(7), 1155–1162.