

Metodologia para Projeto de Filtro de Kalman Baseado em Modelo *Fuzzy* Tipo-2 Evolutivo para Previsão da Dinâmica de Propagação da COVID-19

Daiana Caroline dos Santos Gomes*
Ginalber Luiz de Oliveira Serra**

* *Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga, São Luís, Maranhão, (e-mail: daianagomes159@gmail.com).*

** *Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão, Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, Maranhão, (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)*

Abstract: In this paper, a methodology for design of fuzzy Kalman filters using evolving interval type-2 fuzzy models in the discrete time domain, via experimental data, is proposed. The adopted methodology consists in evolving partitioning of the experimental data by means of a type-2 fuzzy version of evolving Takagi-Sugeno (eTS) algorithm to define interval operation regions associated to the behavior and uncertainty of experimental data. The recursive parametric estimation of local linear submodels in state space is performed by interval type-2 fuzzy *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID) algorithm, taking into account the uncertainties estimated by partitioning of experimental data. Experimental results and comparative analysis illustrate the efficiency and applicability of proposed methodology when applied to real time tracking and forecasting the dynamic propagation of novel Coronavirus 2019 (COVID-19) outbreak in Brazil.

Resumo: Neste artigo é proposta uma metodologia para o projeto de filtros de Kalman *fuzzy* usando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares evolutivos, no domínio do tempo discreto, via dados experimentais. A metodologia adotada consiste no particionamento evolutivo dos dados experimentais por meio de uma versão *fuzzy* tipo-2 do algoritmo Takagi-Sugeno evolutivo (eTS) para definição de regiões de operação intervalares associadas ao comportamento e incerteza dos dados experimentais. A estimação paramétrica recursiva dos submodelos lineares locais no espaço de estados é realizada a partir do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID) *fuzzy* tipo-2 intervalar, considerando as incertezas estimadas pelo particionamento dos dados experimentais. Resultados experimentais e análise comparativa demonstram a eficiência e aplicabilidade da metodologia proposta quando aplicada ao rastreamento e previsão em tempo real da dinâmica de propagação do novo Coronavírus 2019 (COVID-19) no Brasil.

Keywords: Systems identification; Kalman filtering; Evolving interval type-2 fuzzy model; Recursive parametric estimation; Fuzzy systems.

Palavras-chaves: Identificação de sistemas; Filtragem de Kalman; Modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo; Estimação paramétrica recursiva; Sistemas *fuzzy*.

1. INTRODUÇÃO

Em ciências e engenharia é muito comum o desenvolvimento de ferramentas para solucionar problemas de previsão, estimação paramétrica e filtragem envolvendo dados experimentais corrompidos por ruído (Mack and Habets, 2020; Gomez-Garcia et al., 2020). Dentre as diversas técnicas existentes na literatura para lidar com problemas desta natureza, o filtro de Kalman (FK) é a ferramenta matemática mais conhecida e utilizada, sendo objeto de extensa pesquisa desde que foi proposto em 1960 por Rudolph E. Kalman em seu artigo “*A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problem*”, onde foi des-

crita uma solução recursiva para o problema de filtragem linear no domínio do tempo discreto (Kalman, 1960). O amplo interesse pelo FK é devido a sua característica de otimalidade, forma conveniente para processamento online em tempo real, fácil formulação e implementação (Serra, 2018).

O aumento da complexidade de problemas práticos tem motivado o desenvolvimento de pesquisas no sentido de estender a teoria de filtragem de Kalman clássica para enfrentar não linearidades e incertezas, utilizando a teoria dos sistemas *fuzzy*, principalmente os sistemas *fuzzy* tipo-2, devido sua maior capacidade de lidar com informações incertas (Mendel, 2019; Evangelista and Serra, 2020).

Neste contexto, diversas aplicações envolvem a solução de problemas que apresentam variações rápidas em seu comportamento dinâmico bem como de suas propriedades estatísticas, dificultando a análise e particionamento do espaço de entrada e saída de dados experimentais para a definição do número de regras *fuzzy* mais adequado. Para enfrentar este desafio, propostas de metodologias para projeto de sistemas *fuzzy* evolutivos vem sendo desenvolvidas, no sentido de aplicar métodos que tenham a capacidade de adaptar sua estrutura (criação, remoção e fusão de regras *fuzzy*), como também os parâmetros da proposição do consequente das regras (Jahandari et al., 2020; Ferdaus et al., 2020).

Diferentemente das abordagens encontradas na literatura, a metodologia proposta neste artigo constitui uma extensão do trabalho proposto em (Gomes and Serra, 2020) onde foi apresentada uma metodologia para o projeto de filtros de Kalman utilizando modelos *fuzzy* tipo-2 intervalares. Neste artigo, por sua vez, serão utilizados modelos *fuzzy* tipo-2 evolutivos a fim de adaptar a estrutura do filtro de Kalman de acordo com a dinâmica inerente ao conjunto de dados experimentais. As principais contribuições deste artigo que garantem a originalidade da metodologia proposta são:

- Uma abordagem computacional evolutiva baseada na integração de filtros de Kalman e sistemas *fuzzy* tipo-2 aplicada a filtragem e rastreamento em tempo real de dados experimentais incertos;
- Formulação matemática de um algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 evolutivo baseado em zona de influência intervalar, capaz de definir regiões de operação intervalares específicas associadas ao comportamento e incerteza dos dados experimentais;
- Formulação matemática de uma versão *fuzzy* tipo-2 recursiva do algoritmo OKID para estimação paramétrica do consequente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, a partir das regiões de operação definidas no item anterior.

2. MODELAGEM COMPUTACIONAL DO FILTRO DE KALMAN FUZZY TIPO-2 INTERVALAR EVOLUTIVO

Nesta seção, a formulação da metodologia proposta para o projeto do modelo computacional do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, a partir de dados experimentais, é apresentada.

2.1 Estimação Paramétrica do Filtro de Kalman Fuzzy Tipo-2 Intervalar Evolutivo

A estrutura do modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo adotado para o filtro de Kalman *fuzzy* proposto apresenta a $i^{\text{ésima}}$ regra *fuzzy* dada por:

$$R^{(i)} : \text{SE } \mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_{k-1} \quad \mathbf{y}_{k-1}]^T \text{ É } \widetilde{W}^i \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \widetilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i = \widetilde{\mathbf{A}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{B}}_k^i \mathbf{u}_k + \widetilde{\mathbf{K}}_k^i \widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i \\ \widetilde{\mathbf{y}}_k^i = \widetilde{\mathbf{C}}_k^i \widetilde{\mathbf{x}}_k^i + \widetilde{\mathbf{D}}_k^i \mathbf{u}_k \end{cases} \quad (1)$$

com n -ésima ordem, m entradas e p saídas, onde \mathbf{Z}_k é a variável linguística do antecedente; \widetilde{W}^i é o conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar; $\widetilde{\mathbf{x}}_k^i \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados estimados intervalar; $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas estimadas intervalar e $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de entrada. As matrizes $\widetilde{\mathbf{A}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\widetilde{\mathbf{C}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\widetilde{\mathbf{D}}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $\widetilde{\mathbf{K}}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$ são, respectivamente, de estados, entrada, saída, transmissão direta e ganho de Kalman, as quais são parâmetros incertos que descrevem a dinâmica dos dados experimentais dentro de uma região de incerteza. O erro residual $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i$ para a i -ésima regra é definido como $\widetilde{\boldsymbol{\epsilon}}_k^i = \mathbf{y}_k - \widetilde{\mathbf{y}}_k^i$, onde $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^p$ corresponde ao conjunto de dados experimentais real e $\widetilde{\mathbf{y}}_k^i$ é a saída intervalar estimada pelo i -ésimo submodelo linear.

A variável $\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ representa o grau de pertinência da amostra \mathbf{Z}_k no i -ésimo conjunto *fuzzy* tipo-2 intervalar \widetilde{W}^i , o qual é representado por uma função de pertinência gaussiana centrada em z^{i*} , dada por:

$$\widetilde{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) = \left[\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k), \overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k) \right] \\ = \left[m_{\underline{\mu}} e^{-\frac{(z_k^j - z^{i*})^2}{2(\underline{\sigma}_k^i)^2}}, e^{-\frac{(z_k^j - z^{i*})^2}{2(\overline{\sigma}_k^i)^2}} \right] \quad (2)$$

onde $\underline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ e $\overline{\mu}_{\widetilde{W}^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ correspondem aos graus de ativação inferior e superior da i -ésima regra, respectivamente, $\widetilde{\sigma}_k^i = [\underline{\sigma}_k^i \quad \overline{\sigma}_k^i]$ define a zona de influência intervalar do i -ésimo agrupamento sendo $\underline{\sigma}_k^i$ e $\overline{\sigma}_k^i$ as variâncias das funções de pertinência inferior e superior de \widetilde{W}^i , respectivamente, e c é o número de regras do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo no instante de tempo k .

2.2 Estimação Paramétrica da Proposição do Antecedente

Para estimação paramétrica da proposição do antecedente, foi desenvolvida uma versão *fuzzy* tipo-2 intervalar do algoritmo de agrupamento Takagi-Sugeno evolutivo (Lughofer, 2011), o qual é formulado como segue. Dada uma amostra do conjunto de dados experimentais \mathbf{z}_k , sua densidade $D_k(z_k^j)$, para a j -ésima dimensão, é calculada recursivamente por (Angelov et al., 2010):

$$D_k(z_k^j) = \frac{k-1}{(k-1)(\delta_k+1) + \sigma_k - 2\rho_k} \quad (3)$$

onde $\delta_k = \sum_{j=1}^{o+1} (z_k^j)^2$; $\sigma_k = \sigma_{k-1} + \sum_{j=1}^{o+1} (z_{k-1}^j)^2$; $\rho_k = \sum_{j=1}^{o+1} z_k^j \alpha_k$ e $\alpha_k = \alpha_{k-1} + z_{k-1}^j$, tal que $D_1(z_1^j) = 1$; $\alpha_1 = 0$ e $\sigma_1 = 0$. Em seguida, a densidade dos centros dos agrupamentos $D_k(z^{i*})$, $i = 1, \dots, c$, é atualizada, recursivamente, como segue:

$$D_k(z^{i*}) = (k-1) + (k-2) \left(\frac{1}{D_{k-1}(z^{i*})} - 1 \right) \\ + \sum_{j=1}^{o+1} (z_k^j - z_{(k-1)}^j)^2 \quad (4)$$

O mecanismo de evolução da estrutura do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, durante seu treinamento

incremental, é baseado em um conjunto de condições para verificar a qualidade do particionamento e, assim, adaptar a estrutura do modelo *fuzzy* tipo-2 intervalar adotado à dinâmica descrita pelos dados experimentais. Tais condições são descritas a seguir:

Condição A é utilizada para selecionar uma amostra como um novo centro de agrupamento, a qual é descrita por:

$$D_k(z_k^j) > \max_{i=1}^c D(z^{i*}) \text{ OU } D_k(z_k^j) < \min_{i=1}^c D(z^{i*}) \quad (5)$$

Se a condição A é satisfeita, então um novo agrupamento é formado ($c \leftarrow c + 1$; $z^{i*} \leftarrow z_k^j$; $D(z^{i*}) = D_k(z_k^j)$);

Condição B é utilizada evitar a redundância e sobreposição de regras *fuzzy*, sendo analisada como segue (Angelov and Kordon, 2010):

$$\begin{aligned} \text{SE } \tilde{\mu}_{W^i}^i(z_k^j) > e^{-1}, \quad i = 1, \dots, c - 1 \\ \text{ENTÃO } c \leftarrow c - 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Condição C é utilizada para garantir que apenas regras *fuzzy* com algum nível de contribuição sejam mantidas na base de regras, eliminando regras com baixo nível de utilidade U_k^i (Angelov and Kordon, 2010):

$$\text{SE } U_k^i < \eta, \quad i = 1, \dots, c, \quad \text{ENTÃO } c \leftarrow c - 1 \quad (7)$$

com $\eta = [0.01 \ 0.3]$ e

$$U_k^i = \frac{\sum_{l=1}^k \tilde{\mu}_{W^i}^l(z_l^j)}{k - I^{i*}} \quad (8)$$

onde I^{i*} é o instante de tempo em que a i -ésima regra *fuzzy* foi criada. Após analisadas as condições descritas anteriormente, a zona de influência intervalar de cada agrupamento é atualizada recursivamente da seguinte forma:

$$\tilde{\sigma}_k^i = \sqrt{\zeta (\tilde{\sigma}_{k-1}^i)^2 + (1 - \zeta) \frac{1}{S_k^i} (z_k^j - z^{i*})^2} \quad (9)$$

onde ζ é uma constante de aprendizagem, definida no intervalo $[0 \ 1]$ e S_k^i é o número de amostras associadas ao i -ésimo agrupamento no instante de tempo k .

2.3 Estimação Paramétrica da Proposição do Consequente

Para estimação das matrizes que compõem os submodelos no espaço de estados, uma versão *fuzzy* tipo-2 recursiva do algoritmo *Observer/Kalman Filter Identification* (OKID) (Juang, 1994) foi desenvolvida. Este algoritmo considera os valores de pertinência intervalares obtidos a cada nova amostra do conjunto de dados pelo algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Takagi-Sugeno evolutivo como critério de ponderação para estimação da proposição consequente das regras *fuzzy* a partir do cálculo dos parâmetros de Markov intervalares (resposta ao impulso do sistema). A partir do conjunto de dados \mathbf{Z} , tal que $\mathbf{Z}_k = [\mathbf{u}_{k-1} \ \mathbf{y}_{k-1}]^T$, com $k = 1, 2, \dots$, defini-se o número apropriado de parâmetros de Markov q e obtém-se um vetor de regressores dado por:

$$\boldsymbol{\lambda}_k = [\mathbf{u}_{k+1} \ \mathbf{Z}_k \ \mathbf{Z}_{k-1} \ \dots \ \mathbf{Z}_{k-q}]^T \quad (10)$$

tal que q possui valores típicos no intervalo $1 \leq q \leq 10$. Em seguida, o vetor com os parâmetros de Markov do

observador intervalares para a i -ésima regra $\tilde{\mathbf{Y}}^i$ são obtidos como segue:

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^T = \sum_{i=1}^c \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k \tilde{\mathbf{Y}}_k^{iT} \quad (11)$$

onde $\tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k)$ é o grau de pertinência intervalar normalizado da amostra \mathbf{Z}_k na i -ésima regra *fuzzy*; $\boldsymbol{\lambda}_k$ é o vetor de regressores definido em (10) e

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_k^i &= \left[\tilde{\mathbf{D}}_k^i \ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i \ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^i \tilde{\mathbf{B}}_k^i \ \dots \ \tilde{\mathbf{C}}_k^i \tilde{\mathbf{A}}_k^{i(q-1)} \tilde{\mathbf{B}}_k^i \right] \\ &= \left[\tilde{\mathbf{Y}}_0^i \ \tilde{\mathbf{Y}}_1^i \ \tilde{\mathbf{Y}}_2^i \ \dots \ \tilde{\mathbf{Y}}_q^i \right] \end{aligned} \quad (12)$$

são os parâmetros de Markov do observador intervalares da i -ésima regra *fuzzy* tal que $\tilde{\mathbf{A}}_k^i = [\tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i]$ e $\tilde{\mathbf{B}}_k^i = [\tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i, -\tilde{\mathbf{K}}_k^i]$. Utilizando a abordagem local, (11) pode ser reescrita como segue

$$\tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k^T \boldsymbol{\lambda}_k \tilde{\mathbf{Y}}_k^{iT} = \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{y}_k^T \quad (13)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^i \tilde{\mathbf{Y}}_k^{iT} = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_k^i \quad (14)$$

A atualização recursiva de (14) a cada instante de tempo k é dada da seguinte forma:

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^i = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k^T \boldsymbol{\lambda}_k \quad (15)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nu}}_k^i = \tilde{\boldsymbol{\nu}}_{k-1}^i + \tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k) \boldsymbol{\lambda}_k^T \mathbf{y}_k^T \quad (16)$$

Uma vez que $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_k^i$ e $\tilde{\boldsymbol{\nu}}_k^i$ foram atualizados de acordo com o grau de ativação intervalar normalizado $\tilde{\mu}_{W^i}^i(\mathbf{Z}_k)$, (14) é solucionada pelo método de fatoração QR, o qual é numericamente robusto uma vez que evita operações de inversa de matrizes (Chen, 1999). Em seguida, os parâmetros de Markov do sistema e do ganho do observador são calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}_j^i &= \left[\tilde{\mathbf{C}}_k^i \left(\tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \left(\tilde{\mathbf{B}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{D}}_k^i \right), \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{C}}_k^i \left(\tilde{\mathbf{A}}_k^i + \tilde{\mathbf{K}}_k^i \tilde{\mathbf{C}}_k^i \right)^{(j-1)} \tilde{\mathbf{K}}_k^i \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$= \left[\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(1)}, -\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Os parâmetros de Markov do sistema intervalares $\tilde{\mathbf{Y}}_j^i$ são obtidos como segue:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^i = - \sum_{\iota=1}^q \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i(1)}, \text{ for } j = q + 1, \dots, \infty \quad (19)$$

e os parâmetros de Markov do ganho do observador intervalares são obtidos por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i\circ} = - \sum_{\iota=1}^q \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i(2)} \tilde{\mathbf{Y}}_{j-\iota}^{i\circ}, \text{ para } j = q + 1, \dots, \infty \quad (20)$$

Uma matriz de Hankel $\tilde{\mathbf{H}}^i(j-1) \in \mathbb{R}^{\gamma p \times \beta m}$ é construída a partir dos parâmetros de Markov do sistema intervalares $\tilde{\mathbf{Y}}_j^i$, obtidos a partir de (19), como segue:

$$\tilde{\mathbf{H}}^i(j-1) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Y}}_j^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta-1}^i \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{j+1}^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+2}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\beta}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma-1}^i & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma}^i & \cdots & \tilde{\mathbf{Y}}_{j+\gamma+\beta-2}^i \end{bmatrix} \quad (21)$$

onde γ e β são inteiros arbitrários definidos pelo projetista que garantam um bom condicionamento para a estimação paramétrica da proposição do conseqüente do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, cujos valores típicos estão no intervalo $\frac{N}{10} < \gamma, \beta < \frac{N}{2}$. Considerando $j = 1$ em (21), a matriz de Hankel $\tilde{\mathbf{H}}^i(0)$ é decomposta usando o método de Decomposição em Valores Singulares:

$$\tilde{\mathbf{H}}^i(0) = \tilde{\mathbf{\Xi}}^i \tilde{\mathbf{\Sigma}}^i \tilde{\mathbf{\Psi}}^{iT} \quad (22)$$

onde $\tilde{\mathbf{\Xi}}^i \in \mathbb{R}^{ap \times ap}$ e $\tilde{\mathbf{\Psi}}^i \in \mathbb{R}^{\beta m \times \beta m}$ são matrizes ortogonais e $\tilde{\mathbf{\Sigma}}^i \in \mathbb{R}^{ap \times \beta m}$ é a matriz diagonal de valores singulares referente ao conjunto de dados experimentais. A partir disso, são calculadas a matriz de observabilidade $\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$ e a matriz de controlabilidade $\tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i$:

$$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i = \tilde{\mathbf{\Xi}}_n^i \left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{1/2}; \quad \tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i = \left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{1/2} \tilde{\mathbf{\Psi}}_n^{iT} \quad (23)$$

Por fim, são calculadas as matrizes que compõem a proposição do conseqüente do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo como segue:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^i = \left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{-1/2} \tilde{\mathbf{\Xi}}_n^{iT} \tilde{\mathbf{H}}_n^i(1) \tilde{\mathbf{\Psi}}_n^i \left(\tilde{\mathbf{\Sigma}}_n^i \right)^{-1/2} \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_k^i = \text{primeiras } m \text{ colunas de } \tilde{\mathcal{Q}}_\beta^i \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_k^i = \text{primeiras } p \text{ linhas de } \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \quad (26)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_k^i = \tilde{\mathbf{Y}}_0^i \quad (27)$$

A matriz de ganho de Kalman intervalar é obtida da seguinte forma:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\tilde{\mathcal{P}}_\beta^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (28)$$

$$\tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\mathbf{Y}}_j^{i^o} = -\tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i \quad (29)$$

Assumindo $\tilde{\mathbf{A}}^i = -\tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT} \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^i$ e $\tilde{\mathbf{N}}^i = \tilde{\mu}_{W_i}^i(\mathbf{Z}_k) \tilde{\mathcal{P}}_\gamma^{iT}$, (29) é reescrita como segue:

$$\tilde{\mathbf{A}}^i \tilde{\mathbf{K}}_k^i = \tilde{\mathbf{N}}^i \quad (30)$$

A solução de (30) é obtida pelo método de fatoração QR aplicado ao termo $\tilde{\mathbf{A}}^i$ para obtenção de $\tilde{\mathbf{K}}_k^i$. O diagrama de blocos da metodologia proposta é mostrado na Fig. 1.

3. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção, resultados da metodologia proposta aplicada a previsão do comportamento de propagação dinâmica da COVID-19 no Brasil, bem como uma análise comparativa com outra abordagem de previsão proposta na literatura, são apresentados.

Para implementação da metodologia proposta, foram considerados os dados experimentais de novos casos diários e

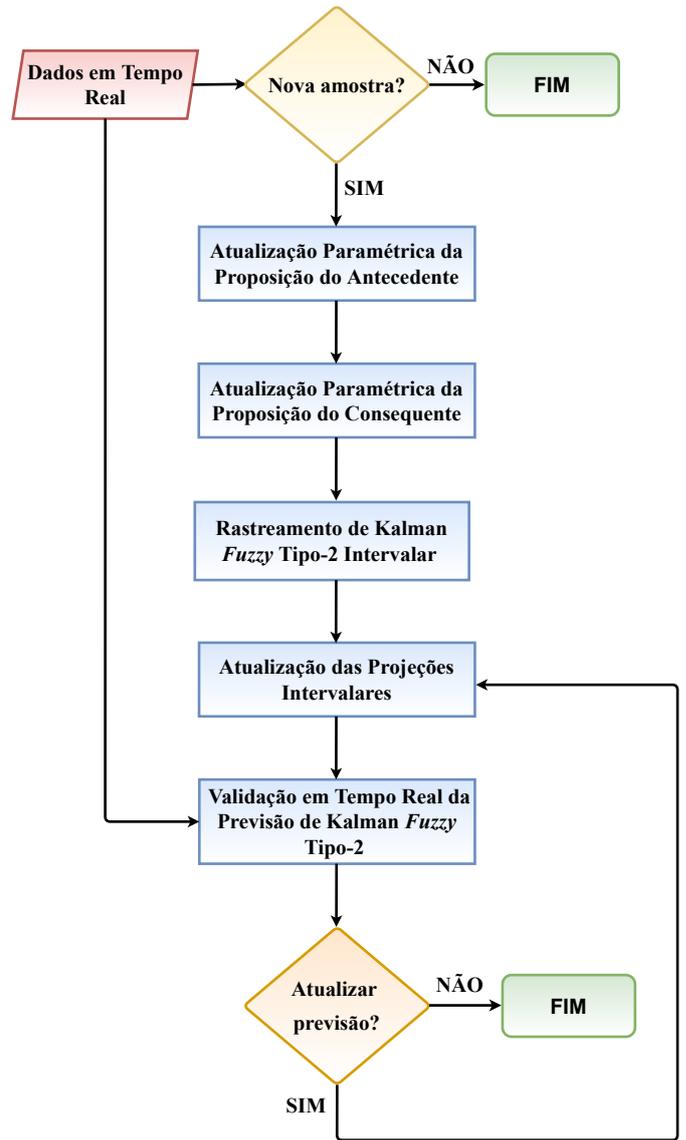


Figura 1. Diagrama de blocos da metodologia proposta correspondente aos aspectos computacionais para o projeto do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo.

óbitos diários por Covid-19, registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021 no Brasil, os quais são mostrados na Fig. 2 e foram obtidos na base de dados disponibilizada pelo Ministério da Saúde¹. Neste artigo, a série temporal relacionada aos óbitos diários registrados por Covid-19 no Brasil foi considerada como o sinal de saída \mathbf{y}_k do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo descrito em (1), enquanto o sinal de entrada \mathbf{u}_k foi considerado como a série temporal relacionada aos novos casos diários de Covid-19 registrados no Brasil. Para implementação do algoritmo de agrupamento *fuzzy* tipo-2 intervalar Takagi-Sugeno evolutivo proposto, os seguintes parâmetros foram adotados: variância intervalar inicial $\tilde{\sigma}_0^i = [0.03 \ 0.1]$, constante de aprendizagem $\zeta = 0.5$ e valor máximo da função de pertinência inferior $m_\mu = 0.7$. A implementação do algoritmo OKID *fuzzy* tipo-2 intervalar, para estimação paramétrica da proposição do conseqüente

¹ Disponível em: <https://covid.saude.gov.br/>

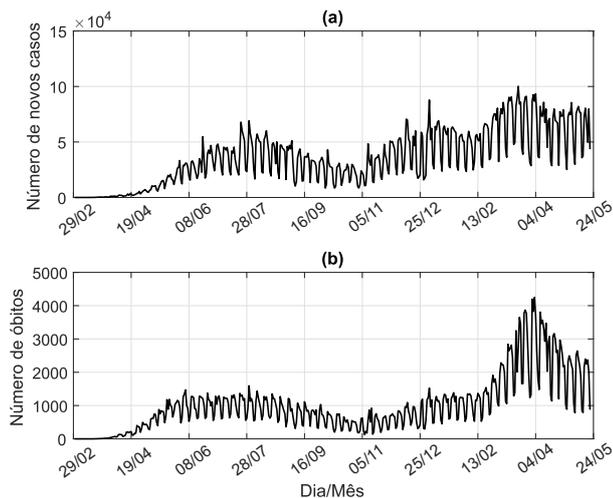


Figura 2. Dados experimentais epidemiológicos referentes à COVID-19, registrados no período de 29 de Fevereiro de 2020 a 24 de Maio de 2021, no Brasil: (a) Número de novos casos diários; (b) Número de óbitos diários.

do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo conforme descrito em (1), considera os seguintes valores de parâmetros: $q = 1$, $\gamma = 10$ e $\beta = 10$. A região de confiança, conforme mostrada na Fig. 3, criada pela treinamento incremental do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, ilustra a eficiência da metodologia proposta para rastreamento dos dados experimentais de óbitos diários registrados no Brasil. A partir da região

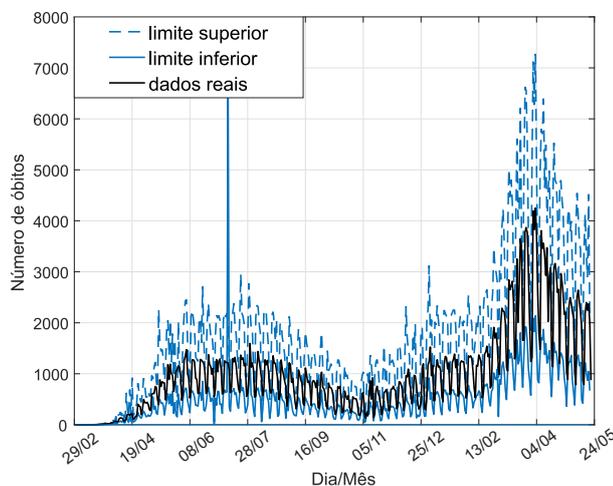


Figura 3. Região de confiança criada pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para rastreamento dos dados experimentais referentes aos óbitos diários no Brasil.

de confiança mostrada na Fig. 3, projeções intervalares foram estimadas a partir do ajuste de curvas polinomiais à saída do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo projetado, definindo os limites superior e inferior para a previsão de futuros óbitos diários no Brasil. A eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo baseado em seu treinamento incremental até 13 de Fevereiro de 2021, para prever dados experimentais futuros (validação) de óbitos diários é mostrada na Fig. 4a. Conforme é obser-

vado que os dados epidemiológicos de validação não estão mais compreendidos dentro da projeção intervalar estabelecida, uma nova atualização das projeções intervalares é necessária, baseada no rastreamento em tempo real dos dados experimentais de óbitos diários, para nova previsão de futuros óbitos diários. Desse modo, uma atualização das projeções intervalares obtidas a partir do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para nova previsão da dinâmica de propagação da Covid-19 no Brasil é mostrada na Fig. 4b. A variação do número de regras *fuzzy* do sistema de inferência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo projetado, conforme as variações dinâmicas dos dados experimentais de óbitos diários, é ilustrada na Fig. 5. A fim de demonstrar a eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo baseado na metodologia proposta, uma análise comparativa com a abordagem proposta em (Hazarika and Gupta, 2020) para previsão da dinâmica de propagação da COVID-19 no Brasil, considerando os critérios de validação RMSE (*Root Mean Square Error*) e MAE (*Mean Absolute Error*), para um horizonte de previsão de 60 dias, foi realizada. Os resultados da análise comparativa são apresentados na Tabela 1. Pode ser observado a eficiência na adaptabilidade das projeções intervalares, estimadas em tempo real pelo filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo proposto quando comparada a abordagem em (Hazarika and Gupta, 2020), o que ilustra sua aplicabilidade para rastreamento e previsão dos dados experimentais de propagação dinâmica da COVID-19.

Tabela 1. Eficiência do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, comparada a abordagem proposta em (Hazarika and Gupta, 2020).

Metodologia	RMSE	MAE
Hazarika and Gupta (2020)	0.006190	0.004880
metodologia proposta	0.003388	0.000701

4. CONCLUSÃO

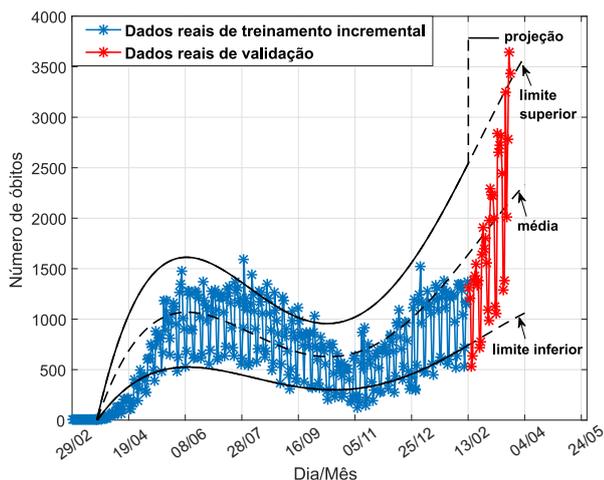
Neste artigo, uma metodologia para o projeto de filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo, baseada em dados experimentais, foi proposta. Os resultados experimentais mostraram a aplicabilidade da metodologia proposta, devido seu mecanismo de evolução das regras *fuzzy* bem como de atualização recursiva dos parâmetros do consequente, para previsão adaptativa e em tempo real da dinâmica de propagação da COVID-19. Para fins de trabalhos futuros, a formulação da metodologia proposta utilizando técnicas de decomposição espectral de dados experimentais é de particular interesse.

AGRADECIMENTOS

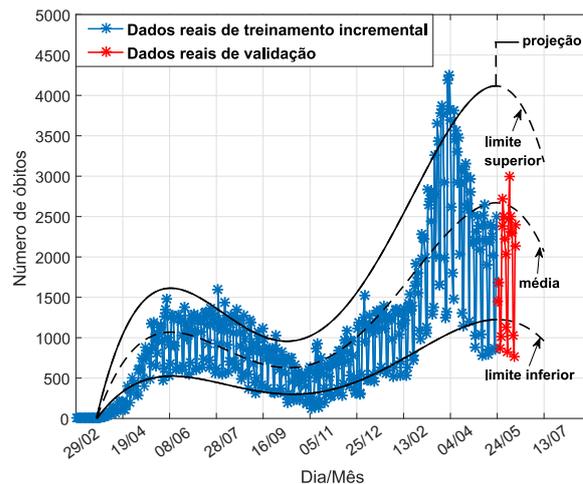
Os autores agradecem à CAPES e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Eletricidade da Universidade Federal do Maranhão (PPGEE/UFMA).

REFERÊNCIAS

Angelov, P. and Kordon, A. (2010). Adaptive inferential sensors based on evolving fuzzy models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 40(2), 529–539. doi:10.1109/tsmcb.2009.2028315.



(a) Previsão no período de 14 de Fevereiro de 2021 a 14 de Março de 2021, para o Brasil.



(b) Previsão no período de 25 de Maio de 2021 a 25 de Junho de 2021, para o Brasil.

Figura 4. Desempenho do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para previsão da propagação dinâmica da COVID-19 relacionada aos óbitos diários registrados no Brasil: (a) atualização realizada em 13 de Fevereiro de 2021; (b) atualização realizada em 25 de Maio de 2021.

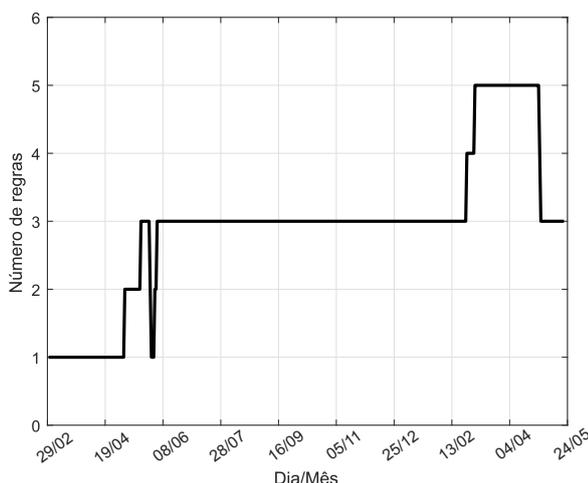


Figura 5. Variação do número de regras *fuzzy* durante o treinamento incremental do filtro de Kalman *fuzzy* tipo-2 intervalar evolutivo para rastreamento dos dados experimentais.

Angelov, P., Filev, D.P., and Kasabov, N. (2010). *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*. IEEE COMPUTER SOC PR.

Chen, C.T. (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press.

Evangelista, A.P.F. and Serra, G.L.O. (2020). State space black-box modelling via markov parameters based on evolving type-2 neural-fuzzy inference system for nonlinear multivariable dynamic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 394, 1–39. doi:10.1016/j.fss.2019.08.013.

Ferdaus, M.M., Pratama, M., Anavatti, S.G., Garratt, M.A., and Pan, Y. (2020). Generic evolving self-organizing neuro-fuzzy control of bio-inspired unmanned aerial vehicles. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(8), 1542–1556. doi:10.1109/tfuzz.2019.2917808.

Gomes, D.C.D.S. and Serra, G.L.O. (2020). Projeto de filtro de kalman fuzzy tipo-2 intervalar via decomposição espectral de dados experimentais. In *Anais do Congresso Brasileiro de Automação 2020*. sbabra. doi:10.48011/asba.v2i1.1262.

Gomez-Garcia, R., Yang, L., Munoz-Ferreras, J.M., and Feng, W. (2020). Lossy signal-interference filters and applications. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 68(2), 516–529. doi:10.1109/tmtt.2019.2953585.

Hazarika, B.B. and Gupta, D. (2020). Modelling and forecasting of COVID-19 spread using wavelet-coupled random vector functional link networks. *Applied Soft Computing*, 96, 106626. doi:10.1016/j.asoc.2020.106626.

Jahandari, S., Kalhor, A., and Araabi, B.N. (2020). Online forecasting of synchronous time series based on evolving linear models. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 50(5), 1865–1876. doi:10.1109/tsmc.2018.2789936.

Juang, J.N. (1994). *Applied System Identification*. Prentice Hall.

Kalman, R.E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1), 35–45. doi:10.1115/1.3662552.

Lughofer, E. (2011). *Evolving Fuzzy Systems - Methodologies, Advanced Concepts and Applications*. Springer Berlin Heidelberg.

Mack, W. and Habets, E.A.P. (2020). Deep filtering: Signal extraction and reconstruction using complex time-frequency filters. *IEEE Signal Processing Letters*, 27, 61–65. doi:10.1109/lsp.2019.2955818.

Mendel, J.M. (2019). Comparing the performance potentials of interval and general type-2 rule-based fuzzy systems in terms of sculpting the state space. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 27(1), 58–71. doi:10.1109/tfuzz.2018.2856184.

Serra, G.L.O. (ed.) (2018). *Kalman Filters - Theory for Advanced Applications*. InTech. doi:10.5772/intechopen.68249.