

# Controlador adaptativo robusto para o processo de tanque quádruplo

Samaherni Dias \* Kurios Queiroz \* Aldayr Araújo \*

\* *Laboratório de Automação, Controle e Instrumentação (LACI), UFRN, Natal, RN, Brasil, (<https://laci.ufrn.br>)*

---

**Abstract:** The recent interest in applications of robust control techniques in industrial environments has driven researchers to adjust already consolidated control techniques to meet the requirements of industrial applications. This review has the objective to create more autonomous industrial applications. An example is the level control of coupled tanks in industrial applications, which needs continuous supervision of an operator. Thus, this work presents a robust multivariable controller for the quadruple tank process. The proposed controller is robust to several industrial phenomena and allows the process operation without continuous human supervision. The work beyond the proposed controller presents results of stability analysis and simulations.

**Resumo:** O crescente interesse por aplicações de técnicas de controle robusto em ambientes industriais tem impulsionado os pesquisadores a ajustar propostas já consolidadas para atender os requisitos das aplicações industriais. Essa revisão nas técnicas, em um momento de grande avanço tecnológico, tem o objetivo de permitir o controle de aplicações industriais de forma mais autônoma. Um exemplo desses processos é o controle do nível de tanques acoplados, no qual da forma que é realizado atualmente, demanda a supervisão contínua de um operador. Assim, este trabalho apresenta um controlador robusto multivariável para o processo de tanque quádruplo. O mesmo é projetado para ser robusto a vários fenômenos e permitir a operação do processo em vários cenários sem a necessidade de supervisão humana contínua. O trabalho, além da proposta do controlador, apresenta resultados de análise de estabilidade e simulações.

*Keywords:* Robust control; Adaptive control; Model reference; Variable structure; Decoupling.

*Palavras-chaves:* Controle robusto; Controle adaptativo; Modelo de referência; Estrutura variável; Desacoplamento.

---

## 1. INTRODUÇÃO

É crescente o interesse pela aplicação de técnicas de controle robusto em processos industriais. Muitos desses processos industriais são sistemas não lineares MIMO (*Multiple-Input Multiple-Output*) e alguns deles possuem acoplamento entre suas entradas e saídas, ou seja, a alteração em alguma das entradas pode alterar mais de uma saída. Além disso, os modelos para estes sistemas podem apresentar incertezas nos parâmetros, parâmetros variantes no tempo e distúrbios externos. Quaisquer técnicas de controle a serem aplicadas a esses sistemas são complexas. Este trabalho foca no projeto de um controlador robusto multivariável para o Processo de Tanque Quádruplo (QTP).

O controlador robusto multivariável desenvolvido neste trabalho utiliza o algoritmo de construção de sistemas inversos, proposto por Hirschorn (1979), associado a uma técnica de controle por modos deslizantes para desacoplar e garantir que o comportamento dos tanques 1 e 2 (ver Figura 1) corresponda exatamente a um modelo de referência definido pelo projetista.

Com relação ao desacoplamento de sistemas não lineares, podemos destacar os trabalhos de Hirschorn (1979) e

Singh (1981) que impulsionaram pesquisas neste campo. O trabalho de Hirschorn provou uma condição suficiente para a existência de sistemas inversos à esquerda de uma classe de sistemas não lineares (fase mínima). Já o trabalho de Singh apresentou um algoritmo de construção de sistemas inversos à esquerda que ampliava os resultados obtidos por Hirschorn. Apenas alguns anos após estes trabalhos Li e Feng (1987) apresentaram a generalização do método de inversão de sistemas e, desta forma, ampliaram a aplicação e definiram as condições suficientes e necessárias para a inversão de um sistema não linear.

Além das técnicas de inversão de sistemas, alguns trabalhos (Dai et al., 2001; Zhang et al., 2007) apresentaram técnicas baseadas em redes neurais artificiais para aproximar um sistema inverso adequado. Uma das aplicações dos sistemas inversos é no controle de sistemas complexos. Alguns trabalhos na literatura (Gang e Lina, 2010; Ahmed et al., 2009; Li et al., 2009; Dias et al., 2011, 2014, 2016, 2019; Lopes et al., 2020) utilizaram técnicas de sistemas inversos para controlar sistemas MIMO não lineares. Muitas dessas aplicações são direcionadas a motores de indução e sistemas robóticos. Neste trabalho iremos propor uma aplicação relacionada a processos industriais.

A técnica de controle utilizada neste trabalho é derivada do VS-MRAC (*Variable Structure Model Reference Adaptive Control*), a qual é uma estratégia que oferece propriedades notáveis de estabilidade e robustez no que diz respeito às incertezas paramétricas, dinâmica não modelada e distúrbios externos (Hsu et al., 1994), bem como, desempenho transitório rápido. O controlador VS-MRAC foi originalmente proposto para plantas lineares de fase mínima com grau relativo um (Hsu e Costa, 1989) e, em seguida, estendido para o caso com grau relativo qualquer (Hsu, 1990).

O Processo de Tanque Quádruplo (QTP) foi projetado por Johansson (2000) para ilustrar as limitações dos controladores multivariáveis na presença de plantas com fase não mínima. O QTP é um processo composto por quatro tanques interligados e duas bombas para atuar no processo (ver Figura 1), e tem sido utilizado em diversas publicações (Malar e Thyagarajan, 2009; Roinila et al., 2008; Patil et al., 2010) desde que foi apresentado. Um trabalho que merece destaque é o artigo de Biswas et al. (2009), no qual um controle de modo deslizante foi aplicado para controlar o nível dos tanques do QTP.

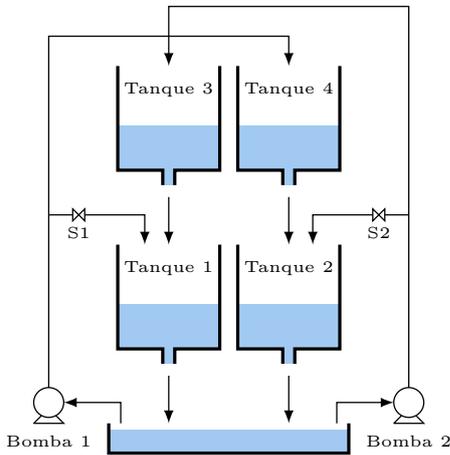


Figura 1. Diagrama do processo de tanque quádruplo.

O processo de tanque quádruplo é muito sensível a variações em seus componentes, pode apresentar um comportamento de fase não mínima e possui um forte acoplamento entre as entradas e as saídas do processo. Porém, o controle de tanques conectados é muito comum na indústria e o desenvolvimento de técnicas de controle robusto para controlar esses processos é sempre desejado. Estas foram as razões para a escolha do QTP para testar o controlador proposto neste trabalho.

Atualmente na indústria a maioria dos controladores são PIDs (Díaz-Rodríguez et al., 2019), os quais quando aplicados ao controle do nível de tanques são projetados para trabalhar em torno de um ponto de operação. Essa limitação se dá devido às não linearidades do sistema e, desta forma, para se operar em um outro ponto, é necessário reajustar os parâmetros dos controladores PIDs. A utilização de controladores PIDs no QTP fora do ponto de operação projetado pode ser muito arriscado, mas dependendo da situação é algo comum e necessita do acompanhamento de um operador para realizar os ajustes devidos.

Inicialmente, o processo (QTP) será desacoplado por uma técnica de inversão de sistemas não lineares baseada no

algoritmo de Hirschorn e, em seguida, para cada sistema não linear desacoplado será aplicado um controlador VS-MRAC modificado para se adequar ao problema proposto.

O artigo está organizado da seguinte forma: o modelo do processo de tanque quádruplo é apresentado na Seção 2; a técnica de inversão de sistemas utilizada é discutida na Seção 3; já a modificação no controlador VS-MRAC é apresentada na Seção 4; a estrutura do controlador proposto para a aplicação no QTP é descrita na Seção 5; os resultados de simulação são apresentados na Seção 6; e, por fim, algumas conclusões são discutidas na Seção 7.

## 2. MODELO DO PROCESSO DE TANQUE QUÁDRUPLO

O processo do tanque quádruplo consiste de quatro tanques interconectados com duas bombas para preencher os tanques. Na Figura 1 é possível verificar um diagrama descritivo do processo. O objetivo deste trabalho é controlar o nível dos tanques 1 e 2 manipulando as tensões aplicadas nas bombas 1 e 2. Os sinais de entrada do processo são as tensões  $v_1$  e  $v_2$  aplicadas às bombas. As saídas do processo são os quatro níveis dos tanques ( $h_1, h_2, h_3$  e  $h_4$ ), sendo um por cada tanque. Aplicando a equação de Bernoulli, que é decorrente da lei de conservação de massa, ao tanque quádruplo tem-se (Johansson, 2000):

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -\frac{a_1}{A_1} \sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1} \sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} v_1, \\ \dot{h}_2 &= -\frac{a_2}{A_2} \sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2} \sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} v_2, \\ \dot{h}_3 &= -\frac{a_3}{A_3} \sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} v_2, \\ \dot{h}_4 &= -\frac{a_4}{A_4} \sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} v_1, \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $A_i$  é a área da seção reta do tanque  $i$ ,  $a_i$  é a área da seção reta do furo de saída do tanque  $i$  e  $g$  é a aceleração da gravidade. Os parâmetros  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$  são proporcionais à abertura das válvulas ( $S_1$  e  $S_2$ ), sendo 0 completamente fechada e 1 completamente aberta.

Alguns aspectos do processo do tanque quádruplo devem ser destacados: o objetivo é controlar o nível dos tanques 1 e 2; o sistema apresenta um forte acoplamento entre suas entradas e saídas devido ao fato de que cada bomba afeta ambas as saídas dos tanques 1 e 2; o modelo linearizado do processo possui um zero que pode estar localizado no semi-plano direito ou esquerdo de acordo com a abertura das válvulas; segundo Johansson, o processo apresenta uma fase não mínima quando  $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$  e fase mínima quando  $1 < \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2$ .

O sistema (1) em uma forma concisa pode ser reescrito como

$$\dot{\mathbf{h}} = \mathbf{A}(\mathbf{h}) + \mathbf{K}\mathbf{v}, \quad (2)$$

em que

$$\mathbf{A}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} -k_{11} \sqrt{2gh_1} + k_{31} \sqrt{2gh_3} \\ -k_{22} \sqrt{2gh_2} + k_{42} \sqrt{2gh_4} \\ -k_{33} \sqrt{2gh_3} \\ -k_{44} \sqrt{2gh_4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{b1} & 0 \\ 0 & k_{b2} \\ k_{b3} & 0 \\ 0 & k_{b4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

### 3. SISTEMA INVERSO À ESQUERDA <sup>1</sup>

Considere um sistema não linear dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{x} \in M$  é uma variedade analítica real,  $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{b}_i$  são campos vetoriais analíticos reais em  $M$ ,  $\mathbf{C} : M \rightarrow \mathbb{R}^l$  é um mapeamento analítico real de  $M$  em  $\mathbb{R}^l$  e  $u_i$  é a classe de funções analíticas reais de  $[0, \infty)$  em  $\mathbb{R}$ , o conjunto dos números reais.

O algoritmo proposto por (Hirschorn, 1979) constrói uma sequência de sistemas através da mudança do mapeamento da saída até que  $u_i$  possa ser solucionada em função de  $\mathbf{y}$ , de suas derivadas e de  $\mathbf{x}$ . Desta forma, é possível escrever um novo sistema não linear, que atua como sistema inverso à esquerda do sistema original.

Então, a derivada do vetor de saída do sistema (3) é dada por

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A}_c(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

em que  $\mathbf{u}$  é um vetor em  $\mathbb{R}^m$  cujos componentes são  $u_1, \dots, u_m$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = [\mathbf{b}_1 \mathbf{C}(\mathbf{x}) \ \mathbf{b}_2 \mathbf{C}(\mathbf{x}) \ \dots \ \mathbf{b}_m \mathbf{C}(\mathbf{x})]$  é uma matriz  $l \times m$  para cada  $\mathbf{x} \in M$  e  $\mathbf{A}_c(\mathbf{x})$  um vetor em  $\mathbb{R}^l$ , composto pelos termos de  $\mathbf{y}^{(1)}$  independentes de  $\mathbf{u}$ .

Seja o **Sistema 1** definido por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in M_1, \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{cases},$$

em que  $M_1$  é um subconjunto aberto denso de  $M$ ,

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{R}_0(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{y}}{dt},$$

$$\mathbf{C}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x})\mathbf{A}_c(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_0(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}).$$

$\mathbf{R}_0(\mathbf{x})$  é a matriz que reordena de forma apropriada as linhas de  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  e

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1,1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{r_1} \end{bmatrix},$$

em que  $\mathbf{0}_{r_1}$  é uma matriz de zeros  $(l - r_1) \times m$ ,  $\mathbf{D}_{1,1}(\mathbf{x})$  é uma matriz  $r_1 \times m$  de posto  $r_1$  para todo  $\mathbf{x} \in M_1$  e

$$r_1 = \max_{\mathbf{x} \in M} \{\text{rank}(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}))\}$$

é o índice de inversibilidade do **Sistema 1**.

De forma similar, considere o **Sistema J**

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in M_J, \\ \mathbf{z}_J = \mathbf{C}_J(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_J(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{cases},$$

em que  $M_J$  é um subconjunto aberto denso de  $M$ ,  $\mathbf{C}_J(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{D}_J(\mathbf{x})$  são matrizes  $l \times 1$  e  $l \times m$ , respectivamente, cujas entradas são funções analíticas reais em  $M_J$ , e

$$\mathbf{D}_J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{J,1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0}_{r_J} \end{bmatrix},$$

<sup>1</sup> As variáveis utilizadas nesta seção são válidas apenas na própria seção.

sendo  $\mathbf{D}_{J,1}(\mathbf{x})$  uma matriz  $r_J \times m$  de posto  $r_J$  para todo  $\mathbf{x} \in M_J$ .

Por construção

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \dots \leq m,$$

sendo  $m$  o número de entradas. Assim, existe pelo menos um número inteiro positivo  $J$  tal que  $r_J$  é máximo.

Baseado no trabalho de Hirschorn (1979), suponha que existe um sistema da forma do sistema (3) com ordem relativa  $\alpha < \infty$ . Desta forma, o  $\alpha$ -ésimo sistema será

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{b}_i(\mathbf{x}); & \mathbf{x} \in M_\alpha, \\ \mathbf{z}_\alpha = \mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{u} \end{cases},$$

em que  $M_\alpha$  é um subconjunto aberto denso de  $M$  e, de acordo com o algoritmo,

$$\mathbf{D}_\alpha(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{\alpha,1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

sendo  $\mathbf{D}_{\alpha,1}(\mathbf{x})$  uma matriz  $r_\alpha \times m$  de posto  $r_\alpha$  para todo  $\mathbf{x} \in M_\alpha$ ,  $\mathbf{0}_{\alpha,1}$  uma matriz de zeros  $(l - r_\alpha) \times m$  e  $\mathbf{C}_\alpha(\mathbf{x})$  é um vetor em  $\mathbb{R}^l$ .

Desde que  $\alpha < \infty$ ,  $r_\alpha = m$  e  $\mathbf{D}_{\alpha,1}(\mathbf{x})$  seja uma matriz  $m \times m$  inversível e sendo  $\bar{\mathbf{z}}_\alpha$  e  $\bar{\mathbf{C}}_\alpha$  os  $m$  primeiros componentes de  $\mathbf{z}_\alpha$  e  $\mathbf{C}_\alpha$ , respectivamente, então

$$\bar{\mathbf{z}}_\alpha = \bar{\mathbf{C}}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\alpha,1}(\mathbf{x})\mathbf{u}.$$

Se  $x_0 \in M_\alpha$ , então existe uma matriz  $\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x})$  de dimensões  $m \times \alpha l$  cujas entradas são funções analíticas reais em  $M_\alpha$  tais que

$$\bar{\mathbf{z}}_\alpha = \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{y}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(\alpha)} \end{bmatrix}$$

e o sistema

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{u}}; & \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 \in M_\alpha, \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{u}} \end{cases}, \quad (4)$$

com  $M_\alpha$  um subconjunto aberto denso de  $M$ , em que

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}) - [\mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}) \ \dots \ \mathbf{b}_m(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{D}_{\alpha,1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{C}}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{b}_1(\hat{\mathbf{x}}) \ \dots \ \mathbf{b}_m(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{D}_{\alpha,1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{H}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{x}}) = -\mathbf{D}_{\alpha,1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \bar{\mathbf{C}}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\hat{\mathbf{D}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{D}_{\alpha,1}^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{H}_\alpha(\hat{\mathbf{x}}),$$

atua como um sistema inverso à esquerda do sistema (3).

### 4. MODIFICAÇÃO NO CONTROLADOR VS-MRAC <sup>2</sup>

A modificação do controlador VS-MRAC proposto neste trabalho será chamada de TVS-MRAC e foi desenvolvida com base nos trabalhos de Hsu e Costa (1989); Hsu (1990); Hsu et al. (1994). O objetivo do controlador TVS-MRAC é desenvolver uma lei de controle de malha fechada que altere a dinâmica de uma dada planta, a partir apenas de suas entradas e saídas, para que esta se comporte exatamente como um modelo de referência desejado.

Considere uma planta não linear descrita por

$$\dot{y} = -a\sqrt{2gy} - a_p y + k_p u + d, \quad (5)$$

<sup>2</sup> As variáveis utilizadas nesta seção são válidas apenas na própria seção.

em que  $a \geq 0$ ,  $a_p \geq 0$ ,  $k_p \geq 0$ ,  $d$  é o distúrbio de entrada,  $y \geq 0$  é a saída da planta e  $u$  é o sinal de entrada da planta. Seja

$$\dot{y}_m = -a_m y_m + k_m r \quad (6)$$

o modelo de referência para a planta em que  $r$  é a entrada e  $y_m$  a saída.

O propósito é encontrar uma lei de controle  $u$ , utilizando apenas medidas da entrada e saída da planta, tal que o erro entre a saída da planta e a saída do modelo,

$$e_0 = y - y_m, \quad (7)$$

tenda a zero assintoticamente a partir de condições iniciais arbitrárias e sinal de referência  $r$  arbitrário contínuo e uniformemente limitado.

Seja

$$u = \theta^{*T} \omega, \quad (8)$$

em que

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \\ \theta_4^* \end{bmatrix} = \frac{1}{k_p} \begin{bmatrix} a_p - a_m \\ k_m \\ a \\ -d \end{bmatrix}, \quad \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ r \\ \sqrt{2gy} \\ 1 \end{bmatrix},$$

sendo  $\omega$  definido como o vetor regressor.

A equação (8) é a lei de controle para a planta (5) que garante que a saída da planta siga a saída do modelo de referência perfeitamente, ou seja, o comportamento da planta em malha fechada, de  $r$  para  $y$  é o mesmo que o do modelo de referência. Porém,  $\theta^*$  somente é conhecido se  $a$ ,  $d$  e  $k_p$  são conhecidos. Quando não se conhece os parâmetros ou os conhece com incertezas, o sinal de controle muda para

$$u = \theta^T \omega, \quad (9)$$

em que

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

é o vetor de parâmetros adaptativos (sob alguma condição de riqueza de sinal  $\theta \rightarrow \theta^*$ ).

Considere as seguintes hipóteses:

- H1.** somente a entrada e a saída da planta serão utilizadas no cálculo do sinal de controle  $u$ ;
- H2.** a planta é completamente controlável e observável;
- H3.** os sinais de  $k_p$  e  $k_m$  são assumidos iguais.

Então, a lei de adaptação será

$$\dot{\theta}_i = -\bar{\theta}_i \operatorname{sgn}(e_0 \omega_i) \quad (10)$$

em que

$$\bar{\theta}_i > |\theta_i^*|, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (11)$$

$\omega_i$  é o  $i$ -ésimo elemento de  $\omega$  e  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  é a função sinal.

**Teorema 1.** Considere a equação (5), o erro (7) e as leis de controle do TVS-MRAC (9-11). Quando todas as hipóteses (H1)-(H3) são satisfeitas, o erro de rastreamento  $e_0 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova.** Considere a função de Lyapunov

$$V(e_0) = \frac{e_0^2}{2}. \quad (12)$$

Então, a derivada de  $V(e_0)$  ao longo da trajetória (7) será

$$\dot{V}(e_0) = e_0(\dot{y} - \dot{y}_m). \quad (13)$$

Aplicando (5), (6), (7), (9) em (13), verificando que  $f(y, r) > 0$  e introduzindo o termo  $(a_m y e_0 - a_m y e_0)$  tem-se

$$\dot{V}(e_0) \leq -a_m e_0^2 - \kappa |f(y, r) e_0|, \quad (14)$$

em que  $a_m > 0$  e  $\kappa > 0$ . Portanto,

$$\dot{V}(e_0) < 0. \quad \square$$

Considere que há incertezas nos parâmetros  $a$ ,  $k_p$  e no distúrbio de entrada  $d$  da equação não linear (5), resultando em

$$\dot{y} = -(a + \Delta_a) \sqrt{2gy} - a_p y + (k_p + \Delta_k) u + (d + \Delta_d), \quad (15)$$

o que implicará na alteração do vetor de parâmetros ideais para

$$\begin{bmatrix} \theta_1^* \\ \theta_2^* \\ \theta_3^* \\ \theta_4^* \end{bmatrix} = \frac{1}{k_p + \Delta_k} \begin{bmatrix} a_p - a_m \\ k_m \\ a + \Delta_a \\ -(d + \Delta_d) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

**Corolário 2.** Considere a equação (15), o erro (7), as leis de controle do TVS-MRAC (9-11) e o ajuste (16). Quando todas as hipóteses (H1)-(H3) são satisfeitas, o erro de rastreamento  $e_0 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova.** Seguir os passos da prova do Teorema 1.  $\square$

Considere a dinâmica de primeira ordem de um tanque simples, ou seja, a equação não linear (5) quando o termo  $a_p = 0$ , o que resulta em

$$\dot{y} = -a \sqrt{2gy} + k_p u + d. \quad (17)$$

**Corolário 3.** Considere a equação (17), o erro (7) e as leis de controle do TVS-MRAC (9-11). Quando todas as hipóteses (H1)-(H3) são satisfeitas, o erro de rastreamento  $e_0 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova.** Seguir os passos da prova do Teorema 1.  $\square$

Considere a dinâmica de uma planta linear de primeira ordem, a qual pode ser obtida a partir da equação não linear (5) quando o termo  $a = 0$ , o que resulta em

$$\dot{y} = -a_p y + k_p u + d. \quad (18)$$

**Corolário 4.** Considere a equação (18), o erro (7) e as leis de controle do TVS-MRAC (9-11). Quando todas as hipóteses (H1)-(H3) são satisfeitas, o erro de rastreamento  $e_0 \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

**Prova.** Seguir os passos da prova do Teorema 1.  $\square$

**Observação 1.** Segundo o Corolário 3 o controlador TVS-MRAC pode ser utilizado para controlar o nível de um tanque simples. Desta forma, o TVS-MRAC expande os resultados do controlador VS-MRAC.

**Observação 2.** Segundo o Corolário 4 o controlador TVS-MRAC também pode ser utilizado para controlar a saída de uma planta de primeira ordem, similar ao caso do controlador VS-MRAC.

## 5. ESTRUTURA DO CONTROLADOR PROPOSTO

Este trabalho propõe, utilizando o método de inversão de sistemas não lineares de Hirschorn, desacoplar o sistema não linear MIMO do QTP (2) em um conjunto de sistemas lineares, nos quais cada uma das entradas afeta apenas uma das saídas.

Inicialmente deve-se utilizar o algoritmo proposto por Hirschorn para calcular o sistema inverso à esquerda do

QTP. É importante observar que todos os sinais de saída ( $\mathbf{h}$ ) são medidos e estão diretamente relacionados com as entradas. Portanto, para obter o sistema inverso à esquerda é necessário somente calcular  $\widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{h})$  e  $\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{h})$  do sistema (4). Então, o sistema inverso à esquerda será

$$\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{h}) + \widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{h})\mathbf{u}_r, \quad (19)$$

em que

$$\widehat{\mathbf{C}}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} k_{11}k_{b1}^{-1}\sqrt{2gh_1} - k_{31}k_{b1}^{-1}\sqrt{2gh_3} \\ k_{22}k_{b2}^{-1}\sqrt{2gh_2} - k_{42}k_{b2}^{-1}\sqrt{2gh_4} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\widehat{\mathbf{D}}(\mathbf{h}) = \begin{bmatrix} k_{b1}^{-1} \\ k_{b2}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \end{bmatrix},$$

sendo  $u_{r1}$  e  $u_{r2}$  as entradas do sistema inverso referentes ao tanque 1 e 2, respectivamente.

Agora, a aplicação do sistema inverso à esquerda no QTP (ver Figuras 2(a) e 2(b)) resultará em duas plantas SISO lineares dadas por

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = u_{r1} \\ \dot{h}_2 = u_{r2} \end{cases}. \quad (21)$$

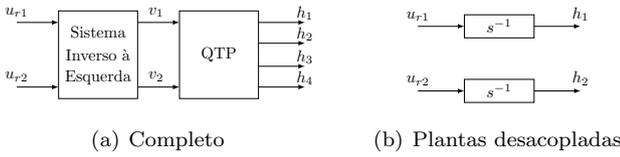


Figura 2. Diagrama de blocos da aplicação de um sistema inverso no QTP.

Porém, os parâmetros do QTP podem variar no tempo ou serem conhecidos com incertezas. Quando isso ocorre, o sistema inverso à esquerda perde a capacidade de desacoplar perfeitamente o processo e o resultado de (21) muda para

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -k_{f2}\sqrt{2gh_1} + k_{f1}u_{r1} + d_1 \\ \dot{h}_2 = -k_{f5}\sqrt{2gh_2} + k_{f4}u_{r2} + d_2 \end{cases}, \quad (22)$$

em que

$$\begin{aligned} k_{f1} &= k_{b1}(\Delta k_{b1} + k_{b1})^{-1}, \\ k_{f2} &= (\Delta k_{11}k_{b1} - \Delta k_{b1}k_{11})(\Delta k_{b1} + k_{b1})^{-1}, \\ k_{f3} &= (\Delta k_{b1}k_{31} - \Delta k_{31}k_{b1})(\Delta k_{b1} + k_{b1})^{-1}, \\ k_{f4} &= k_{b2}(\Delta k_{b2} + k_{b2})^{-1}, \\ k_{f5} &= (\Delta k_{22}k_{b2} - \Delta k_{b2}k_{22})(\Delta k_{b2} + k_{b2})^{-1}, \\ k_{f6} &= (\Delta k_{b2}k_{42} - \Delta k_{42}k_{b2})(\Delta k_{b2} + k_{b2})^{-1}, \\ d_1 &= k_{f3}\sqrt{2gh_3}, \\ d_2 &= k_{f6}\sqrt{2gh_4} \end{aligned}$$

e  $\Delta k_{b1}$ ,  $\Delta k_{b2}$ ,  $\Delta k_{11}$ ,  $\Delta k_{22}$ ,  $\Delta k_{31}$ ,  $\Delta k_{42}$  são as incertezas em cada um dos parâmetros do QTP.

Para aplicar o controlador TVS-MRAC ao QTP com o sistema inverso à esquerda, deve-se realimentar o sistema aplicando-se um ganho  $a_p$ , definido pelo projetista, ao sinal de saída medido. O diagrama de blocos da estrutura de controle proposta pode ser vista na Figura 3.

Após a realimentação tem-se a seguinte dinâmica para o QTP

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -k_{f2}\sqrt{2gh_1} - a_p h_1 + k_{f1}u_{r1} + d_1 \\ \dot{h}_2 = -k_{f5}\sqrt{2gh_2} - a_p h_2 + k_{f4}u_{r2} + d_2 \end{cases}. \quad (23)$$

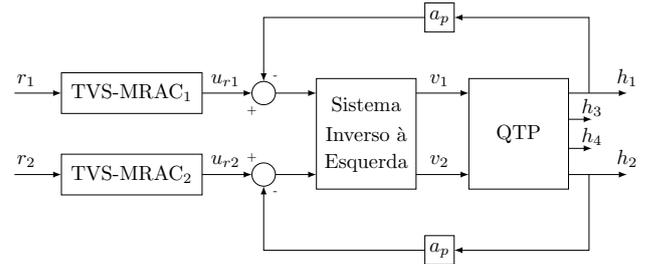


Figura 3. Diagrama de blocos da estrutura de controle proposta.

Para aplicar o TVS-MRAC será necessário definir um modelo de referência para cada planta de (23), os quais são definidos por

$$\begin{cases} \dot{h}_{m1} = -a_{m1}h_{m1} + k_{m1}r_1 \\ \dot{h}_{m2} = -a_{m2}h_{m2} + k_{m2}r_2 \end{cases},$$

em que  $a_{mi} > 0$  e  $k_{mi} > 0$  para  $i = 1, 2$ .

Como o objetivo do TVS-MRAC é garantir que os erros ( $e_{01}$  e  $e_{02}$ ) entre as saídas das plantas ( $h_1$  e  $h_2$ ) e as saídas dos modelos ( $h_{m1}$  e  $h_{m2}$ ) tendam a zero quando o tempo tender ao infinito, deve-se definir o sinal de controle para cada planta como

$$\begin{cases} u_{r1} = \theta_{v1}^T \omega_1 \\ u_{r2} = \theta_{v2}^T \omega_2 \end{cases},$$

em que

$$\omega_i = \begin{bmatrix} h_i \\ r_i \\ \sqrt{2gh_i} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \theta_{vi} = \begin{bmatrix} \theta_{i1} \\ \theta_{i2} \\ \theta_{i3} \\ \theta_{i4} \end{bmatrix},$$

com  $i = 1, 2$ . Assim, as leis de atualização dos parâmetros devem seguir (10).

## 6. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção são apresentados alguns exemplos para destacar a performance da estrutura de controle proposta. Os resultados simulam o QTP, o qual é um processo com um forte acoplamento entre suas entradas e saídas. O QTP (Figura 1) utilizado neste trabalho é definido pelo sistema (2) com suas constantes definidas na Tabela 1(a). O sistema inverso à esquerda para o QTP é dado por (19) e as incertezas nos parâmetros são definidas na Tabela 1(b).

Tabela 1. Parâmetros e incertezas no QTP

(a) Parâmetros			(b) Incertezas		
	Valor	Und.		Valor	Und.
$g$	981	cm/s <sup>2</sup>	$\Delta k_{b1}$	0,07 $k_{b1}$	cm/(Vs)
$a_1, a_3$	0,071	cm <sup>2</sup>	$\Delta k_{11}$	0,10 $k_{11}$	-
$a_2, a_4$	0,057	cm <sup>2</sup>	$\Delta k_{31}$	0,02 $k_{31}$	-
$A_1, A_3$	28	cm <sup>2</sup>	$\Delta k_{b2}$	0,03 $k_{b2}$	cm/(Vs)
$A_2, A_4$	32	cm <sup>2</sup>	$\Delta k_{22}$	0,04 $k_{22}$	-
$k_1$	3,33	cm <sup>3</sup> /(Vs)	$\Delta k_{42}$	0,06 $k_{42}$	-
$k_2$	3,35	cm <sup>3</sup> /(Vs)			

É importante notar que todas as simulações possuem sinais de entrada saturados entre 0-10V, condições iniciais definidas na Tabela 2(a), variações nas referências e em

Tabela 2. Condição inicial e variação temporal

(a) Condição inicial			(b) Variações	
	Valor	Und.	Tempo	Mudança
$h_1$	6,2	cm	50s	$r_1 = 7, 1$
$h_2$	6,35	cm	75s	$\gamma_1 = 0, 80, \gamma_2 = 0, 60$
$h_3$	0,9	cm	100s	$r_2 = 6, 5$
$h_4$	0,7	cm	150s	$r_1 = 6, 9$
$v_1, v_2$	3,0	V	175s	$\gamma_1 = 0, 80, \gamma_2 = 0, 80$
$\gamma_1$	0,7	-	200s	$r_2 = 5, 0$
$\gamma_2$	0,6	-	250s	$r_1 = 3, 4$
			275s	$\gamma_1 = 0, 60, \gamma_2 = 0, 60$
			300s	$r_2 = 7, 25$
			350s	$r_1 = 5, 2$

alguns parâmetros de acordo com a Tabela 2(b) e que os níveis medidos são definidos por  $h_i$ .

Serão apresentadas duas simulações (Figuras 4 e 5). Na primeira simulação (Figura 4) é possível verificar o desempenho do QTP utilizando (19) como sistema inverso à esquerda, considerando incertezas nos parâmetros e dois controladores TVS-MRAC com

$$\bar{\theta}_{1i} = 1,5 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{\theta}_{2i} = 1,0 \cdot 10^{-4}, \quad i = 2, 3, 4$$

e  $a_p = a_m$ , o que resulta em  $\bar{\theta}_{11} = \bar{\theta}_{21} = 0$ . Este resultado pode ser comparado aos resultados do trabalho apresentado por Johansson (2000) (ambos os trabalhos utilizam os mesmos parâmetros), no qual um controlador PI foi projetado para operar em um determinado ponto de operação (dado pela condição inicial da Tabela 2(a)) e não se considera incertezas nos parâmetros.

Na primeira simulação (Figura 4), a referência para o tanque 1 ( $r_1$ ) muda aos 25s. Apesar do QTP possuir acoplamento e incertezas nos parâmetros (para o caso do TVS-MRAC), o sinal de saída do tanque 2 ( $h_2$ ) não sofre alterações (Figure 4(b)). Ainda nesta simulação é possível ver que ambas as saídas (Figures 4(a-b)) possuem um transitório rápido e um pequeno chaveamento nos sinais de controle, os quais possuem baixa amplitude.

Na segunda simulação (Figure 5) é possível verificar o desempenho do QTP (2) utilizando (19) como sistema inverso à esquerda, considerando incertezas nos parâmetros e dois controladores TVS-MRAC com

$$\bar{\theta}_{1i} = 4 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{\theta}_{2i} = 3 \cdot 10^{-4}, \quad i = 2, 3, 4$$

e  $a_p = a_m$ , o que resulta em  $\bar{\theta}_{11} = \bar{\theta}_{21} = 0$ . O foco desta simulação é o desempenho do controlador proposto quando está operando em diferentes pontos de operação e com variações paramétricas.

Nesta simulação (Figura 5), as mudanças nos sinais de referência ( $r_1, r_2$ ) e nas condições ( $\gamma_1, \gamma_2$ ) das válvulas (S1, S2) são definidas na Tabela 2(b). Apesar do QTP possuir acoplamento, incertezas nos parâmetros e parâmetros variantes no tempo, o controlador proposto apresentou um transitório rápido e não apresenta chaveamento nos sinais de saída, mesmo quando as referências se afastam do ponto de operação considerado no projeto e para incertezas paramétricas de até 10%. Os sinais de controle (Figuras 5(c-d)), embora em alguns momentos fiquem saturados, em geral apresentam baixa amplitude.

É importante notar que a saturação dos sinais de controle resulta do desempenho transitório definido para o modelo

de referência que é bastante rápido. Essa questão pode ser solucionada reduzindo as exigências do modelo de referência. Porém, é possível notar que o controlador proposto permanece estável mesmo quando saturado.

### 6.1 Discussão

**PIs do trabalho de Johansson:** Os controladores foram ajustados para operar no ponto de operação da condição inicial (Tabela 2(a)) e possuem um transitório rápido e sem *overshoot*. Cada controlador PI calcula a tensão que deverá ser aplicada para que o nível do tanque correspondente siga uma determinada referência.

**Pontos de operação:** Analisando os resultados de simulação é possível verificar que os controladores PIs sofrem bastante com relação a mudanças de ponto de operação. Os níveis de *overshoot* dos controladores PIs ficam maiores e a influência do acoplamento passa a degradar bastante o desempenho. Já o controlador proposto, independente do ponto de operação, apresenta um bom desempenho e praticamente não segue os modelos de referência apenas quando as tensões aplicadas às bombas estão saturadas. É importante lembrar que ambos os controladores estão submetidos às mesmas variações na abertura das válvulas e que a planta para o controlador proposto possui incertezas nos parâmetros e a planta para os controladores PIs não. Devido às incertezas e às variações na abertura das válvulas, o controlador proposto apresentou um chaveamento nos sinais de tensão aplicados às bombas.

**Suavização dos sinais de controle:** Embora, a uma primeira vista, pareça viável a implementação de controladores PIs associados à técnica de sistema inverso para suavizar os sinais de controle, essa não é uma boa ideia quando se considera incertezas nos parâmetros ou variações paramétricas. Quando não se conhece a planta perfeitamente o sistema inverso perde a capacidade de desacoplar o sistema e as plantas resultantes são não lineares e com distúrbios de entrada, o que torna muito difícil o controle com os PIs. Para suavizar, pode-se utilizar uma proposta semelhante à apresentada no trabalho de Dias et al. (2018).

**Aplicabilidade:** O controlador proposto associado a uma técnica de suavização pode se tornar uma opção viável para aplicações industriais de controle de nível de tanques. A técnica permitirá o controle do nível sem a necessidade da definição de pontos de operação e, consequentemente, sem a necessidade de um supervisionamento de um operador.

## 7. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma nova estrutura de controle para tanques acoplados (QTP). O controlador proposto é robusto a distúrbios externos, incertezas e variações nos parâmetros. Além disso, o controlador proposto possui dinâmica definida por um modelo de referência e apresenta transitório rápido sem chaveamento no nível dos tanques. Todas as características do controlador foram comprovadas por análise de estabilidade e verificadas por resultados de simulação.

Em trabalhos futuros, se discutirá a suavização do sinal de controle, a implementação do controlador proposto e como exportá-lo para sistemas embarcados.

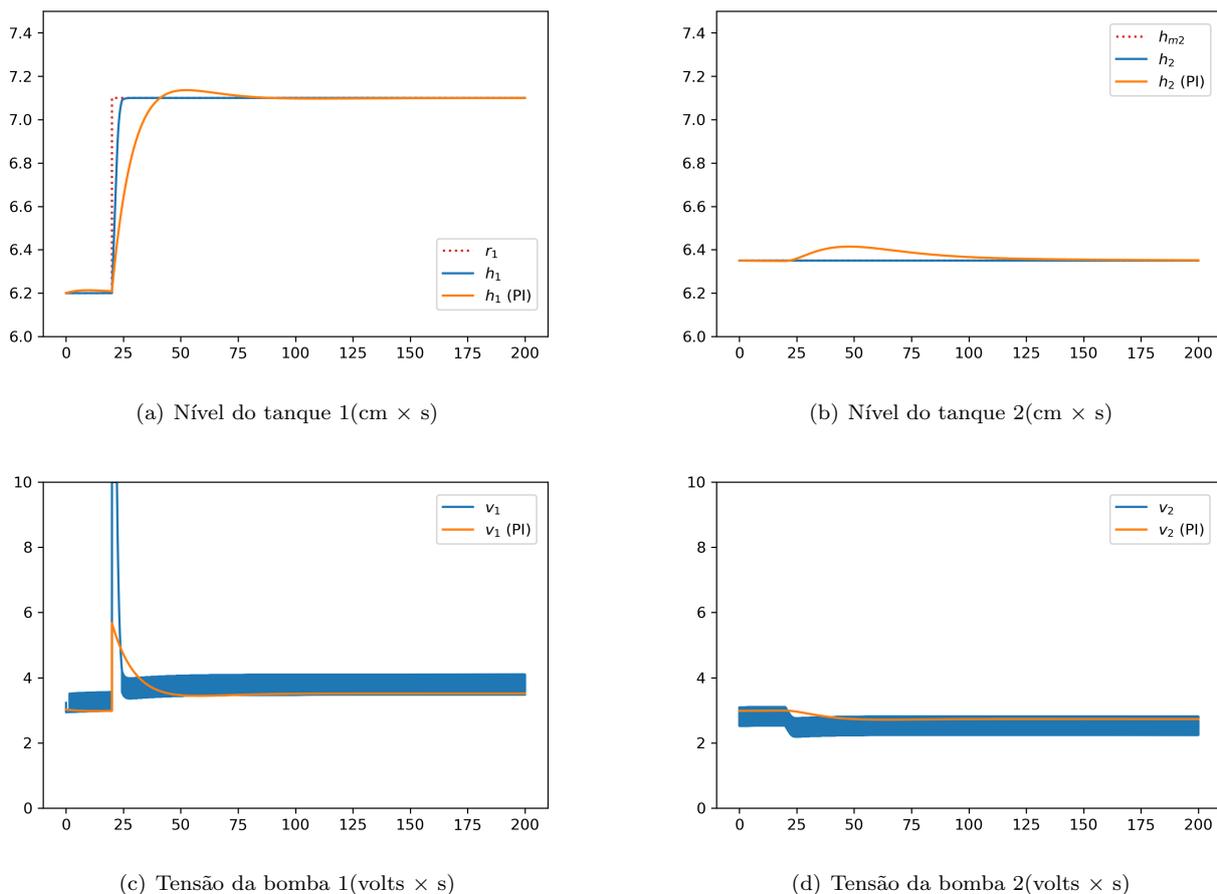


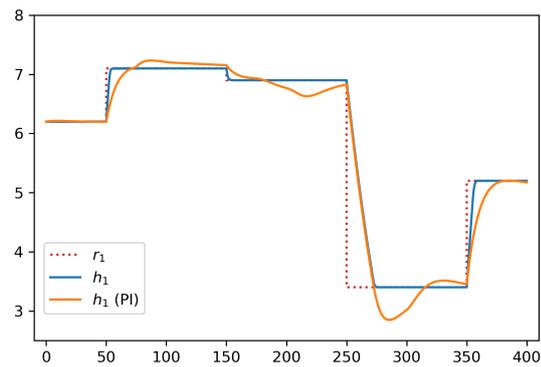
Figura 4. Simulação do QTP para operação em torno do ponto de operação considerado utilizando como controlador a estrutura proposta e os PIs apresentados no trabalho de Johansson.

#### AGRADECIMENTOS

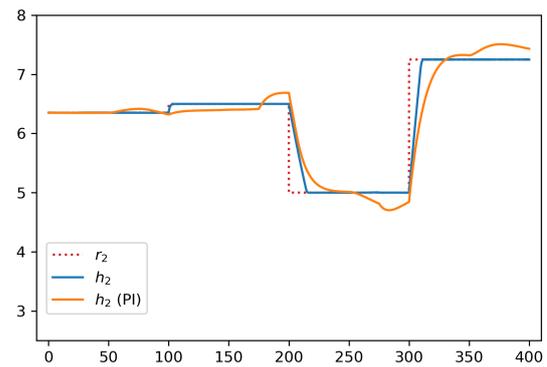
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

#### REFERÊNCIAS

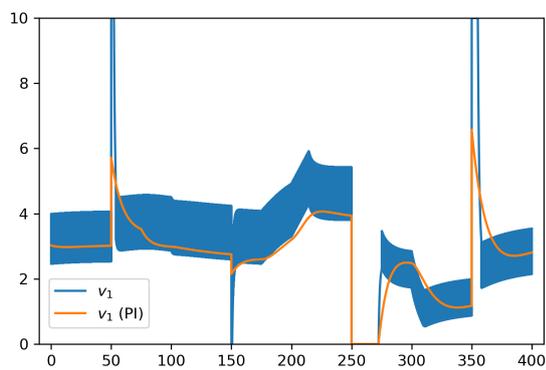
- Ahmed, Q., Bhatti, A.I., e Iqbal, S. (2009). Nonlinear robust decoupling control design for twin rotor system. In *Asian Control Conference, 2009. ASCC 2009. 7th*, 937–942.
- Biswas, P.P., Srivastava, R., Ray, S., e Samanta, A.N. (2009). Sliding mode control of quadruple tank process. *Mechatronics*, 19(4), 548–561. doi:10.1016/j.mechatronics.2009.01.001.
- Dai, X., He, D., Zhang, X., e Zhang, T. (2001). MIMO system invertibility and decoupling control strategies based on ANN  $\alpha$ -th-order inversion. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 148(2), 125–136(11).
- Dias, S., Queiroz, K., e Araujo, A. (2014). Robust Control Applied to Multiple-Input Multiple-Output Nonlinear Systems. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 25, 668–678. doi:10.1007/s40313-014-0150-6.
- Dias, S., Queiroz, K., e Araujo, A. (2018). Prova de estabilidade de técnica de suavização do sinal de controle do controlador adaptativo por modelo de referência e estrutura variável. In *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. doi:doi:10.20906/CPS/CBA2018-0603.
- Dias, S., Queiroz, K., e Araujo, A. (2019). Proposta de controlador não linear para atitude de nanossatélite baseada em cinemática descrita por quatérnios. In *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Galoá. doi:10.17648/sbai-2019-111360.
- Dias, S., Queiroz, K., Araujo, A., e Dias, A. (2016). Robust control of robotic manipulators based on left inverse system and variable structure model reference adaptive control. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 30(8-10), 1389–1407. doi:10.1002/acs.2663.
- Dias, S.M., de Martins, A.M., de Araujo, A.D., e Queiroz, K. (2011). Robust Adaptive Control Applied to Chua's Circuit. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1), 5843–5848. doi:10.3182/20110828-6-IT-1002.03691.
- Díaz-Rodríguez, I.D., Han, S., e Bhattacharyya, S.P. (2019). *Analytical Design of PID Controllers*. Springer International Publishing.
- Gang, L. e Lina, Y. (2010). Nonlinear Decoupling Based Adaptive Control of Induction Motor. In *Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA), 2010 International Conference on*, volume 2, 796–799. doi:10.1109/ICICTA.2010.781.
- Hirschorn, R.M. (1979). Invertibility of multivariable nonlinear control systems. *Automatic Control, IEEE*



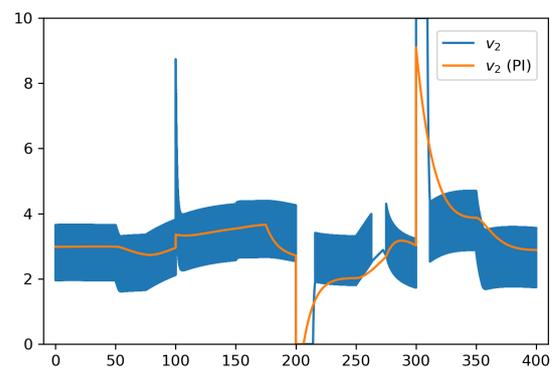
(a) Nível do tanque 1(cm × s)



(b) Nível do tanque 2(cm × s)



(c) Tensão da bomba 1(volts × s)



(d) Tensão da bomba 2(volts × s)

Figura 5. Simulação do QTP para operação fora do ponto de operação considerado utilizando como controlador a estrutura proposta e os PIs apresentados no trabalho de Johansson.

*Transactions on*, 24(6), 855–865. doi:10.1109/TAC.1979.1102181.

Hsu, L. (1990). Variable structure model-reference adaptive control (VS-MRAC) using only input and output measurements: the general case. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 35(11), 1238–1243. doi:10.1109/9.59810.

Hsu, L. e Costa, R.R. (1989). Variable structure model reference adaptive control using only input and output measurements. *International Journal of Control*, 49(2), 399–416. doi:10.1080/00207178908559643.

Hsu, L., de Araujo, A.D., e Costa, R.R. (1994). Analysis and design of I/O based variable structure adaptive control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 39(1), 4–21. doi:10.1109/9.273335.

Johansson, K.H. (2000). The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3), 456–465. doi:10.1109/87.845876.

Li, C.W. e Feng, Y.K. (1987). Functional reproducibility of general multivariable analytic non-linear systems. *International Journal of Control*, 45(1), 255–268. doi:10.1080/00207178708933726.

Li, P.f., Bo, Y., e Yan, X.p. (2009). Research on Nonlinear Decoupling Sliding Mode Control of Permanent Magnet Synchronous Motor. In *Information Engineering and Computer Science, 2009. ICIECS 2009. International*

*Conference on*, 1–4. doi:10.1109/ICIECS.2009.5365159.

Lopes, I., Dias, S., e Queiroz, K. (2020). A Left-inverse Non-linear Controller to a RRR Manipulator. In *2020 Latin American Robotics Symposium (LARS)*, 1–6. doi:10.1109/LARS/SBR/WRE51543.2020.9307143.

Malar, R. e Thyagarajan, T. (2009). Modeling of Quadruple Tank System Using Soft Computing Techniques. *European Journal of Scientific Research*, 29.

Patil, M.D., Patil, P.G., e Patil, R.S. (2010). Multi-variable Control System Design for Quadruple Tank Process using Quantitative Feedback Theory (QFT). In *Proceedings of International Conference on Control, Communication and Power Engineering*, 71–75.

Roinila, T., Vilkkö, M., e Jaatinen, A. (2008). Corrected Mathematical Model of Quadruple Tank Process. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2), 11678–11683. doi:10.3182/20080706-5-KR-1001.01979.

Singh, S. (1981). A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(2), 595–598. doi:10.1109/TAC.1981.1102657.

Zhang, M.G., Wang, Z.G., e Wang, P. (2007). Adaptive PID decoupling control based on RBF neural network and its application. In *2007 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition*, volume 2, 727–731. doi:10.1109/ICWAPR.2007.4420764.