

# PROJETO DE CONTROLADOR ROBUSTO LQR VIA DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES

Dilson A. A. Junior\* Edvaldo Assunção\* Marco A. L. Beteto\*  
Marcelo C. M. Teixeira\*

\* Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira  
Laboratório de Pesquisa em Controle - (LPC)  
Av. José Carlos Rossi, nº 1370, 15385-000 - Ilha Solteira, SP, Brasil (e-mails:  
dilson.junior@unesp.br; edvaldo.assuncao@unesp.br;  
marco.beteto@unesp.br; marcelo.minhoto@unesp.br).

**Abstract:** In this paper, a new approach with decay rate to the resolution of the linear quadratic regulator problem (LQR), based on linear matrix inequalities (LMIs) for continuous time-invariant systems is proposed. Such approach considers conditions for each polytope vertex  $(Q_i, R_i)$ , further to allow prioritize the performance of each vertex of the set of uncertainties. A set of weighting matrices for each vertex makes it possible to improve the dynamical behavior of the uncertain system and/or the control signal. The validation of the proposed conditions is illustrated through a numerical example and a simulation of the 3-DOF helicopter from Quanser®.

**Resumo:** Neste artigo, uma nova abordagem com taxa de decaimento para a resolução do problema regulador linear quadrático (LQR), baseada em desigualdades matriciais lineares (LMIs) para sistemas lineares contínuos e invariantes no tempo é proposta. Tal abordagem considera condições para cada vértice do politopo  $(Q_i, R_i)$ , além de permitir priorizar o desempenho de cada vértice do conjunto de incertezas. Um conjunto de matrizes de ponderação para cada vértice permite melhorar o comportamento dinâmico do sistema incerto e/ou do sinal de controle. A validação das condições propostas são ilustradas por meio de um exemplo numérico e uma simulação do helicóptero 3-DOF da Quaser®.

**Keywords:** Linear Quadratic Regulator, Linear Matrix Inequalities, Decay Rate, Helicopter 3-DOF.

**Palavras-chaves:** Regulador Linear Quadrático, Desigualdades Matriciais Lineares, Taxa de Decaimento, Helicóptero 3-DOF.

## 1. INTRODUÇÃO

Em geral, problemas de controle têm como objetivo determinar um controlador que atenda a certas especificações de desempenho de projeto e que garanta a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada (Robandi et al. (2001)). No caso de sistemas de controle ótimo, a obtenção de uma lei de controle se dá através da otimização de um determinado índice de desempenho, sujeita a restrições nas variáveis de estado e controle (Boyd et al. (1994)).

Nessas circunstâncias, o Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator - LQR*), também conhecido como problema de controle ótimo quadrático, consiste em determinar uma lei de controle que minimize uma função de custo (Friedland (2005)).

O LQR vêm sendo amplamente difundido na literatura em diversas aplicações, como recentemente em Caun et al. (2015), que apresenta o controlador LQR-LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada, em Beteto et al. (2018), que apresenta o controlador LQR usando a realimentação derivativa Alcalá et al. (2018), que apresenta o controle autônomo de veículos baseado em Lyapunov com um ajuste LQR-LMI, entre outros.

Este artigo foi desenvolvido e baseado no trabalho de Caun et al. (2018), que apresenta o controle LQR-LMI aplicado a domínios convexos, com condições menos conservadoras no controle LMI. Para a resolução do controlador LQR e o projeto de controladores, são utilizadas as Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês, Linear Matrix Inequalities - LMIs). As LMIs são uma eficiente ferramenta na busca de soluções numéricas de problemas de otimização de natureza convexa que garante a estabilidade quadrática dependente de parâmetro e do custo garantido, além de ter a vantagem de incluir índices de desempenho e incertezas no modelo do sistema com certa facilidade, como a taxa de decaimento, responsável pelo transitório do sistema (BOYD et al., 1994).

Caun et al. (2018), considera apenas uma matriz  $Q$  e uma matriz  $R$  para todo o domínio das incertezas, é proposto neste artigo condições com matrizes de ponderação para cada vértice do politopo  $(Q_i, R_i)$  (Assunção et al. (2019)) que permite priorizar o desempenho de cada vértice do conjunto de incertezas que podem ocorrer durante a operação do sistema. E conforme mostrado na simulação, o comportamento do sistema incerto pode ser melhorado e/ou esforço dos sinais de controle podem ser reduzidos, sendo possível devido a utilização das LMIs. O método proposto é baseado na relação entre a função de custo e

a função de Lyapunov dependente de parâmetros combinada com o Lema de Finsler que permite acréscimo de matrizes extras e redução do número de LMIs (Oliveira and Skelton (2007)).

O artigo está organizado da seguinte forma. A Seção 2 apresenta uma breve revisão do Regulador Linear Quadrático. A Seção 3 descreve o projeto de controle LQR para sistemas incertos, cuja função de custo é obtida pela energia de saída. Na seção 4 são apresentados controladores LQR-LMI sujeitos à taxa de decaimento aplicada a sistemas incertos e invariantes no tempo. São apresentados na Seção 5 resultados e discussões sobre as simulações de um modelo numérico Massa-Mola Amortecedor e de um Helicóptero de Bancada, produzido pela Quaser<sup>®</sup>, para explicar as vantagens, comparar os resultados e validar as condições propostas. E por fim, temos, a conclusão dos resultados obtidos na Seção 6.

## 2. REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Considere o sistema controlável, linear e invariante no tempo, descrito por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

sendo  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , e o par  $(A, B)$  é controlável se e somente se

$$\text{posto}([B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]) = n, \quad (2)$$

o problema LQR consiste em encontrar uma lei de controle  $u(t)$  que minimize o índice de desempenho quadrático,  $\mathcal{J}(x(t), u(t))$ , tal que (Vinodh Kumar et al. (2016)):

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (x(t)^T Qx(t) + u(t)^T Ru(t)) dt. \quad (3)$$

*Observação 1.* As matrizes  $Q$  e  $R$  são simétricas definidas positivas  $n \times n$  e  $m \times m$  respectivamente. Elas são matrizes de ponderação do vetor de estado e do vetor de entrada de controle.

Neste problema, as variáveis de controle são expressas por uma constante de realimentação de estados, da forma:

$$u(t) = -Kx(t). \quad (4)$$

Para encontrar uma solução para o problema de otimização, considere a função de Lyapunov quadrática

$$V(x(t)) = x(t)^T Px(t) > 0, \quad (5)$$

tal que:

$$x(t)^T (Q + K^T RK)x(t) = -\frac{d(x(t)^T Px(t))}{dt}. \quad (6)$$

Logo, a lei de controle que minimiza  $\mathcal{J}$  pode ser expressa por,

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1}B^T Px(t), \quad (7)$$

de modo que  $P$  satisfaça a equação de Riccati (ARE),

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (8)$$

**Prova.** Vide Caun et al. (2018).

Um método alternativo e eficaz para resolver o problema LQR seria a utilização da técnica LMI, uma ferramenta matemática de solução de problemas de controle convexos e matriciais (Boyd et al. (1994)).

## 3. CONTROLADOR LQR PARA SISTEMAS INCERTOS E INVARIANTES NO TEMPO

Considerando o sistema incerto linear invariante no tempo descrito por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i (A_i x(t) + B_i u(t)) \Leftrightarrow \quad (9)$$

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t),$$

sendo  $A(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz que descreve o comportamento do sistema,  $B(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  o vetor de estados e  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada de controle. As matrizes  $(A, B)(\alpha)$  pertencem ao domínio politépico  $\mathcal{A}$  definido como

$$\mathcal{A} = \left\{ (A, B)(\alpha) : (A, B)(\alpha) = \sum_{i=1}^h \alpha_i (A, B)_i; \right. \\ \left. \sum_{i=1}^h \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, h \right\}, \quad (10)$$

que corresponde a um conjunto convexo de  $h$  vértices. O sistema robusto em malha fechada é dado por

$$\dot{x}(t) = (A(\alpha) + B(\alpha)K)x(t), \quad (11)$$

É possível escolher matrizes  $Q$  e  $R$  para cada vértice do politopo. Dessa forma o índice (3) pode ser substituído por (12),

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (x(t)^T Q(\alpha)x(t) + u(t)^T R(\alpha)u(t)) dt, \quad (12)$$

sendo  $Q(\alpha)$  e  $R(\alpha)$  matrizes simétricas definidas positivas e invertíveis.

Além de garantir a estabilidade do sistema (11) deseja-se atender as especificações de desempenho. Um índice de desempenho muito importante, é a restrição de taxa de decaimento, responsável pela rapidez de resposta transitória do sistema (Boyd et al. (1994)).

Considere o sistema controlado (11), a taxa de decaimento é definida como a maior constante positiva  $\gamma$ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0, \quad (13)$$

para toda solução  $x(t)$ ,  $t > 0$ . Utilizando a função de Lyapunov dependente de parâmetros,

$$V(x(t)) = x(t)^T P(\alpha)x(t) > 0, \quad (14)$$

para estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento de (11), com

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)), \quad (15)$$

para todas as trajetórias Boyd et al. (1994).

O Lema de Finsler acrescenta novos graus de liberdade na análise de sistemas incertos e possibilita a eliminação de variáveis, e é usado para expressar as condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais, com vantagens sobre a teoria já existente de Lyapunov (Boyd et al. (1994)), conforme é visto no Lema 1.

**Lema 1.** (Finsler). Considere  $W \in \mathbb{R}^{n_x}$ ,  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$  e  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m_x \times n_x}$  com  $\text{rank}(\mathcal{B}) < n_x$  e  $\mathcal{B}^\perp$  uma base para o espaço nulo de  $\mathcal{B}$  (isto é,  $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$ ). Então as seguintes condições são equivalentes:

1.  $w^T \mathcal{L} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B} w = 0;$

$$2. (\mathcal{B}^\perp)^T \mathcal{L} \mathcal{B}^\perp < 0;$$

$$3. \exists \sigma \in R : \mathcal{L} - \sigma \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$$

$$4. \exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_x \times m_x} : \mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0.$$

**Prova.** Vide Oliveira and Skelton (2007).

#### 4. LQR-LMI E A TAXA DE DECAIMENTO

**Teorema 2.** (Caun et al. (2018)) Para  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e  $x_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , o sistema incerto (9) é estável com  $u(t) = -Kx(t)$ , usando taxa de decaimento maior ou igual a  $\delta$  e custo garantido  $\mathcal{J}$  inferior a  $\mu$ , se para um dado escalar  $b > 0$ , existem matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $W_i = W_i^T > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ , de tal modo que:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \mu, W_i, Z, Y \\ \text{Sujeito a} & \begin{bmatrix} \mu & * \\ x_0 & Y^T + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} V_i & * & * & * \\ X_i & -bY - bY^T & * & * \\ Y & 0 & -Q^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -R^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

sendo  $V_i = A_i Y + B_i Z + Y^T A_i^T + Z^T B_i^T + 2\delta W_i$  e  $X_i = W_i - Y^T + bA_i Y + bB_i Z$ , o ganho de realimentação estado é dado por  $K = -ZY^{-1}$  e \* representa termos deduzidos a partir da simetria.

**Prova.** Vide Caun et al. (2018).

Considerando uma matriz  $Q$  e uma matriz  $R$  para cada vértice do politopo  $(Q_i, R_i)$  é proposto o seguinte teorema.

**Teorema 3.** Para  $Q_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $R_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , e  $x_0 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , o sistema incerto (9) é estável com  $u(t) = -Kx$ , com taxa de decaimento maior ou igual a  $\delta$ , tem desempenho otimizado se existir custo garantido  $\mathcal{J}$  inferior a  $\mu$ , se para um dado escalar  $c > 0$ , existem matrizes  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Z \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $W_i > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , com  $i = 1, 2, \dots, N$ , de tal modo que:

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & W_i = W_i^T > 0, Z, Y \end{aligned}$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \mu & * \\ x_0 & Y^T + Y - W_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} F_i & * & * & * \\ G_i & -cY - cY^T & * & * \\ Q_i Y & 0 & -Q_i & * \\ R_i Z & 0 & 0 & -R_i \end{bmatrix} < 0, \quad (19)$$

sendo  $F_i = A_i Y + B_i Z + Y^T A_i^T + Z^T B_i^T + 2\delta W_i$ ,  $G_i = W_i - Y^T + cA_i Y + cB_i Z$ ,  $Y \neq Y^T$ ,  $W_i = Y^T P Y$  e  $P = P^T > 0$ . No valor ótimo, o ganho do estado é dado por  $K = -ZY^{-1}$  e \* representa termos deduzidos a partir da simetria.

**Prova.** Considerando a unidade simplex  $\sum_{i=1}^h \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0$ . Multiplicando cada bloco (19) por  $\alpha_i \geq 0$ , com  $i = 1, 2, \dots, h$ , resulta em (20).

$$\begin{bmatrix} F(\alpha) & * & * & * \\ G(\alpha) & -cY - cY^T & * & * \\ Q(\alpha)Y & 0 & -Q(\alpha) & * \\ R(\alpha)Z & 0 & 0 & -R(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \quad (20)$$

sendo  $F(\alpha) = A(\alpha)Y + B(\alpha)Z + Y^T A(\alpha)^T + Z^T B(\alpha)^T + 2\delta W(\alpha)$ ,  $G(\alpha) = W(\alpha) - Y^T + cA(\alpha)Y + cB(\alpha)Z$  e  $W(\alpha) = Y^T P(\alpha)Y$ .

Como  $Q(\alpha)$  e  $R(\alpha)$  são matrizes simétricas definidas positivas, ambas são invertíveis. Então, pré-multiplicando por  $\Delta(\alpha)$ , e pós-multiplicando por  $\Delta(\alpha)^T$ , com

$$\Delta(\alpha) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q(\alpha)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

A desigualdade (20) torna-se

$$\begin{bmatrix} F(\alpha) & * & * & * \\ G(\alpha) & -cY - cY^T & * & * \\ Y & 0 & -Q(\alpha)^{-1} & * \\ Z & 0 & 0 & -R(\alpha)^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

sendo  $F(\alpha)$  e  $G(\alpha)$  mencionadas em (20).

Aplicando o complemento de Schur recursivamente em (22), obtemos a equivalente LMI,

$$\begin{bmatrix} O(\alpha) & * \\ G(\alpha) & -cY - cY^T \end{bmatrix} < 0, \quad (23)$$

sendo  $O(\alpha) = A(\alpha)Y + B(\alpha)Z + Y^T A(\alpha)^T + Z^T B(\alpha)^T + Z^T R(\alpha)Z + Y^T Q(\alpha)Y + 2\delta W(\alpha)$ .

Uma vez que  $W(\alpha) = Y^T P(\alpha)Y$ , implica que,

$$\begin{bmatrix} U(\alpha) & * \\ S(\alpha) & -cY - cY^T \end{bmatrix} < 0, \quad (24)$$

sendo  $U(\alpha) = A(\alpha)Y + B(\alpha)Z + Y^T A(\alpha)^T + Z^T B(\alpha)^T + Z^T R(\alpha)Z + Y^T Q(\alpha)Y + 2\delta Y^T P(\alpha)Y$  e  $S(\alpha) = Y^T P(\alpha)Y - Y^T + cA(\alpha)Y + cB(\alpha)Z$ .

Através das mudanças de variáveis  $Y = (N^T)^{-1}$  e  $Z = -KY$ , encontra-se a desigualdade (25)

$$\begin{bmatrix} L(\alpha) & * \\ M(\alpha) & -c(N^T)^{-1} - cN^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

sendo  $L(\alpha) = (A(\alpha) - B(\alpha)K)(N^T)^{-1} + N^{-1}(A(\alpha) - B(\alpha)K)^T + N^{-1}K^T R(\alpha)K(N^T)^{-1} + N^{-1}Q(\alpha)(N^T)^{-1} + 2\delta N^{-1}P(\alpha)(N^T)^{-1}$  e  $M(\alpha) = N^{-1}P(\alpha)(N^T)^{-1} - N^{-1} + c(A(\alpha) - B(\alpha)K)(N^T)^{-1}$ .

Aplicando a transformação de congruência  $\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ , à esquerda

e  $\begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}^T$  à direita, encontra-se,

$$\begin{bmatrix} H(\alpha) & * \\ T(\alpha) & -cN - cN^T \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

sendo  $H(\alpha) = N(A(\alpha) - B(\alpha)K) + (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T N^T + K^T R(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha)$  e  $T(\alpha) = P(\alpha) - N^T + cN(A(\alpha) - B(\alpha)K)$ .

Como escolha arbitrária  $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ cN \end{bmatrix}$  e desmembrando (26), obtêm-se,

$$\begin{bmatrix} K^T R(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & * \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1(A(\alpha) - B(\alpha)K) & -X_1 \\ X_2(A(\alpha) - B(\alpha)K) & -X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T X_1^T & (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T X_2^T \\ -X_1^T & -X_2^T \end{bmatrix} < 0. \quad (27)$$

Considerando  $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ,

$$\begin{bmatrix} K^T R(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & * \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{X} [(A(\alpha) - B(\alpha)K) \quad -I] + \begin{bmatrix} (A(\alpha) - B(\alpha)K)^T \\ -I \end{bmatrix} \mathcal{X}^T < 0. \quad (28)$$

Definindo  $w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{B} = [(A(\alpha) - B(\alpha)K) \quad -I]$ ,

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I \\ (A(\alpha) - B(\alpha)K) \end{bmatrix}$$

e  $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} K^T R(\alpha)K + Q(\alpha) + 2\delta P(\alpha) & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$ ,

com  $P(\alpha) = P(\alpha)^T > 0$  a desigualdade (28) equivale a condição 4. do Lema 1.

Sendo as outras propriedades do Lema 1 equivalentes. A partir da condição 1., note que  $\mathcal{B}w = 0$ , corresponde ao sistema realimentado com  $K$  e  $w^T \mathcal{L}w < 0$  corresponde à restrição de estabilidade a partir da função quadrática de Lyapunov em  $F_i$ .

Conclui-se a prova existente do Lema 1, uma vez que as propriedades (1) e (4) são equivalentes.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 5.1 Massa-Mola Amortecedor

Para a análise de factibilidade, foi considerado o sistema massa-mola-amortecedor (Figura 1).

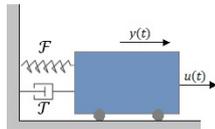


Figura 1. Massa-mola-amortecedor

O modelo de espaço de estados é:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mathcal{F} & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (29)$$

$$y(t) = [1 \quad 0] x(t), \quad (30)$$

sendo que  $-\mathcal{F} \in [-1, 2, -0, 8]$  é um parâmetro incerto, em unidade apropriada. Para gerar a região de factibilidade foi considerado um multiplicador nas matrizes  $Q_2$  e  $R_2$ . As matrizes de ponderação são  $R_1 = 10$ ,  $R_2 = r \times 5$ , com intervalo de  $1 \leq r \leq 10$  e  $Q_1 = \text{diag}(1 \quad 1)$ ,  $Q_2 = q \times \text{diag}(10 \quad 10)$ , com intervalo de  $1 \leq q \leq 10$  e condição inicial  $x_0 = [1 \quad 0]^T$ .

A Figura 2 apresentam as regiões de factibilidade do Teorema 3 com os três eixos, taxa de decaimento e parâmetros  $q$  e  $r$ , sendo a taxa de decaimento de 0 a 300 com passo de 5.

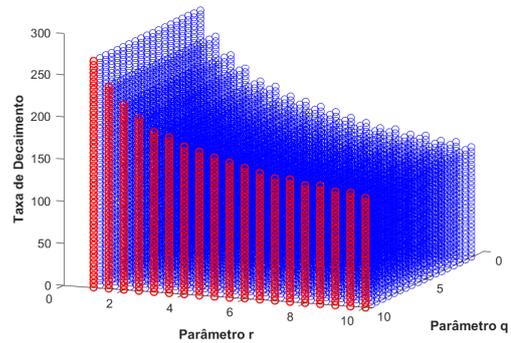


Figura 2. Regiões de Factibilidade em 3D com Condições Relaxadas para o Teorema 3.

Pelas regiões de factibilidade nota-se que os resultados foram satisfatórios, pois é possível observar que ao considerar as condições do Teorema 3, encontrou-se regiões factíveis para o problema. Além disso é possível observar que, a taxa de decaimento responsável pela curta duração do transitório do sistema, decresce à medida que o valor do parâmetro  $r$  responsável pela matriz  $R$  aumenta, exigindo menos do sinal de controle, vale ressaltar que as soluções encontradas nem sempre são implementáveis devido ao seu limite máximo (ou mínimo) de tensão, podendo levar a saturação e talvez uma redução da vida útil do atuador.

### 5.2 Helicóptero 3-DOF

Considere o modelo esquemático do helicóptero 3-DOF na Figura 3 com três graus de liberdade. O sistema é composto por dois motores de corrente contínua montados nas duas extremidades de uma estrutura retangular e que acionam duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si e o vetor de impulso é normal à haste.

O braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa leve o suficiente para permitir que os motores levantem o helicóptero. Uma tensão positiva aplicada ao motor dianteiro ( $V_f$ ) causa uma inclinação positiva enquanto uma tensão positiva aplicada ao motor traseiro ( $V_b$ ) causa uma inclinação negativa (ângulo *pitch* ( $\rho$ )). Uma tensão positiva nos dois motores provoca uma elevação do corpo (ângulo *elevation* ( $\epsilon$ ) do braço). Se o corpo inclinar, o vetor impulsão resulta no deslocamento do corpo (ângulo *travel* ( $\lambda$ )) Quanser (2002).

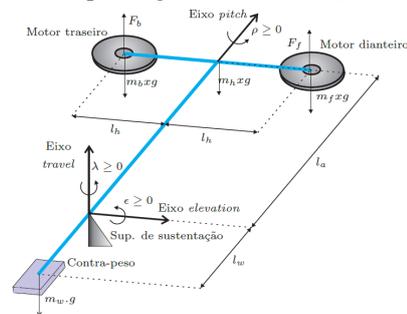


Figura 3. Modelo esquemático do helicóptero 3-DOF (Caun et al. (2015)).

O modelo de espaço de estados que descreve o helicóptero é:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t), \quad (31)$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t), \quad (32)$$

O vetor de estados  $x(t)$ , o vetor de entrada  $u(t)$  e as matrizes  $A_1, A_2, B_1, B_2$  são definidas por:

$$x(t) = [\varepsilon \ \rho \ \lambda \ \dot{\varepsilon} \ \dot{\rho} \ \dot{\lambda} \ \xi \ \gamma]^T, u(t) = \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix},$$

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Vértice 1 (100% de  $V_b$ ):

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0854 & 0,0854 \\ 0,5770 & -0,5770 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

- Vértice 2 (70% de  $V_b$ ):

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0854 & 0,0598 \\ 0,5770 & -0,4039 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

sendo:

*elevation* ( $\varepsilon$ ), *travel* ( $\lambda$ ) e *pitch* ( $\rho$ ) representa a saída.

A função principal no projeto do controlador LQR é realizar a seleção das matrizes de ponderação. Normalmente escolhemos as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  para atender aos padrões de desempenho esperados. Diferentes valores de  $Q$  e  $R$  fornecem distintas respostas do sistema.

Para efeito de comparação entre os Teoremas 2 e 3, foram realizadas duas simulações, a primeira priorizou-se os estados nos dois vértices, já a segunda foi priorizado o sinal de controle nos dois vértices. No Teorema 2, Caun et al. (2018), considera um conjunto de matriz  $Q$  e  $R$  para todo o domínio das incertezas, com isso, o Teorema 3 proposto neste artigo, permite escolher um conjunto de matriz  $Q$  e  $R$  para cada vértice do politopo ( $Q_i, R_i$ ), esta abordagem permite escolher o que priorizar, um bom desempenho do sistema dinâmico ou o sinal de controle. Para a resolução das LMIs utilizou-se o *software* MatLab® (Gahinet et al. (1994)) e a interface YALMIP (Lofberg (2004)), juntamente com o *solver* LMILab para computar a solução do problema de otimização.

Para as duas simulações fixou-se o escalar  $c = 0,003$  e a taxa de decaimento  $\delta = 0,3$ , sendo possível encontrar uma solução factível para o problema. Para a primeira simulação, utilizou-se as matrizes  $Q = \text{diag}(350 \ 0,2 \ 0,02 \ 0,02 \ 2 \ 0,02 \ 0,01 \ 1)$  e  $R = 0,025 \times \text{diag}(1 \ 1)$  obtendo-se o controlador  $K_a$  para o Teorema 2:

$$K_a = \begin{bmatrix} 106,0713 & 49,0752 & -53,0617 & 35,2096 \\ 129,0571 & -44,7563 & 45,7163 & 50,4906 \\ 13,56360 & -63,6487 & 53,1423 & -20,0493 \\ -13,4778 & 56,0433 & 60,4218 & 16,9552 \end{bmatrix},$$

e  $Q_1 = \text{diag}(350 \ 0,2 \ 0,02 \ 0,02 \ 2 \ 0,02 \ 0,01 \ 1)$ ,  $Q_2 = \text{diag}(100 \ 10 \ 0,1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$  e  $R_1 = 0,025 \times \text{diag}(1 \ 1)$ ,  $R_2 = 0,025 \times \text{diag}(1 \ 1)$ , para o Teorema 3, obtendo-se o controlador  $K_b$ :

$$K_b = \begin{bmatrix} 60,6913 & 61,6963 & -73,7001 & 27,7971 \\ 81,4198 & -50,7886 & 56,8331 & 40,5046 \\ 13,8369 & -89,7588 & 28,5591 & -25,3607 \\ -12,9061 & 70,6878 & 36,5084 & 19,2760 \end{bmatrix}.$$

Os resultados de simulação podem ser vistos nas Figuras 4 e 5.

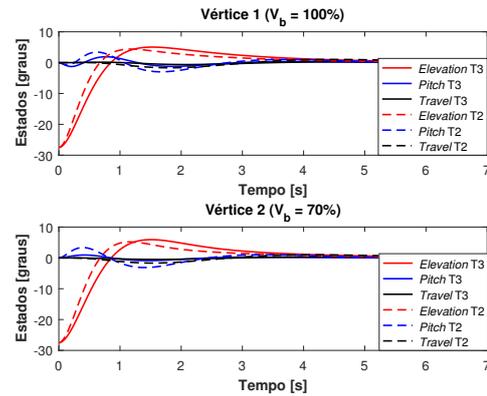


Figura 4. Comportamento do sistema dos três graus de liberdade ( $\varepsilon, \rho, \lambda$ ) dos Teoremas 2(T2) e 3(T3), priorizando os estados nos dois vértices.

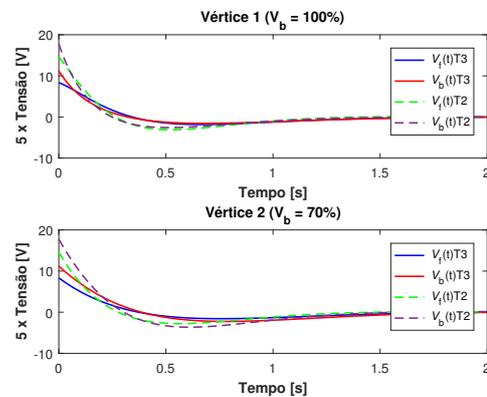


Figura 5. Sinal de controle dos Teoremas 2(T2) e 3(T3), priorizando os estados nos dois vértices.

A segunda simulação é priorizado o sinal de controle nos dois vértices, com  $Q = \text{diag}(350 \ 0,2 \ 0,02 \ 0,02 \ 2 \ 0,02 \ 0,01 \ 1)$  e  $R = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$  para o Teorema 3, obtendo-se o controlador  $K_c$ :

$$K_c = \begin{bmatrix} 59,0714 & 30,27722 & -29,1212 & 26,6859 \\ 74,5975 & -27,6174 & 24,5023 & 38,9983 \\ 9,7160 & -36,7473 & 27,4664 & -10,4945 \\ -9,8327 & 31,8882 & 32,2781 & 8,6143 \end{bmatrix},$$

e  $K_d$  a partir do Teorema 3 com  $Q_1 = \text{diag}(350 \ 0,2 \ 0,02 \ 0,02 \ 2 \ 0,02 \ 0,01 \ 1)$ ,  $Q_2 = \text{diag}(100 \ 10 \ 0,1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$  e  $R_1 = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$ ,  $R_2 = 0,1 \times \text{diag}(1 \ 1)$ :

$$K_d = \begin{bmatrix} 35,1484 & 40,2359 & -41,5462 & 21,7061 \\ 48,7737 & -32,5212 & 31,0856 & 31,6407 \\ 10,9259 & -53,4955 & 14,9470 & -13,5150 \\ -10,0895 & 41,0266 & 19,8971 & 9,9566 \end{bmatrix}.$$

Os resultados de simulação estão mostrados nas Figuras 6 e 7.

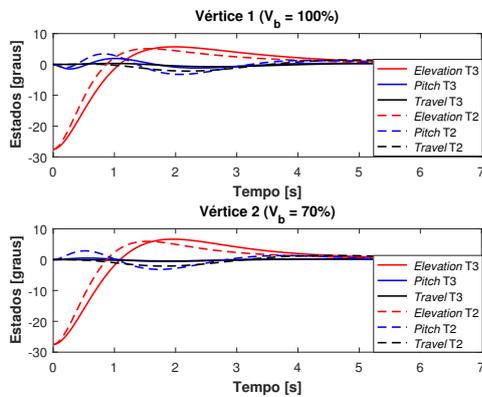


Figura 6. Comportamento do sistema dos três graus de liberdade ( $\epsilon$ ,  $\rho$ ,  $\lambda$ ) dos Teoremas 2(T2) e 3(T3), priorizando o sinal de controle nos dois vértices.

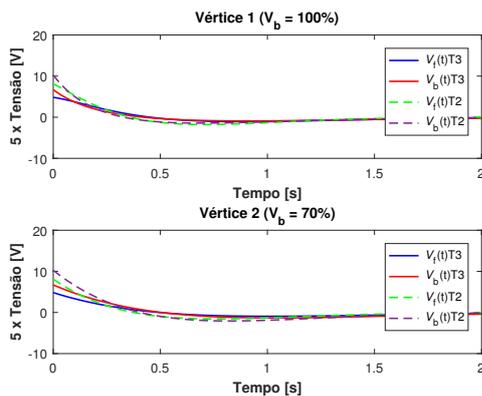


Figura 7. Sinal de controle dos Teoremas 2(T2) e 3(T3), priorizando o sinal de controle nos dois vértices.

Nota-se, pelas figuras, que o método proposto (Teorema 3) apresenta resultados satisfatórios se comparado ao Teorema 2, uma vez que é possível ter um bom desempenho do sistema com um baixo sinal de controle. Além disso, por meio do Teorema 3, pode-se escolher uma  $Q$  e uma  $R$  para cada vértice do politopo ( $Q_i, R_i$ ), podendo priorizar o vértice que representa a falha. Fica claro que as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$  devem ser escolhidas de modo a garantir um bom desempenho do sistema.

## 6. CONCLUSÃO

Neste artigo, foi proposta uma nova abordagem para garantir a estabilidade do sistema em malha fechada para cada vértice do politopo. As análises foram feitas através de simulações via *software* de um modelo numérico e de um modelo de helicóptero de bancada. Por meio da Figura 2, verificou-se que com o controlador robusto projetado, garante-se a estabilidade do sistema e, através do Lema 1 resultou-se na redução do conservadorismo. Além disso, como alternativa, o método proposto tem a vantagem de poder definir uma matriz  $Q$  e  $R$  para cada vértice do politopo, sendo a escolha ao critério do projetista.

Com a escolha adequada das matrizes de ponderação, é possível obter um bom desempenho do sistema sujeito a falha e minimizar o custo  $\mathcal{J}$ , mesmo na presença de incertezas.

## AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico).

## REFERÊNCIAS

- Alcala, E., Puig, V., Quevedo, J., Escobet, T., and Comasolivas, R. (2018). Autonomous vehicle control using a kinematic Lyapunov-based technique with LQR-LMI tuning. *Control engineering practice*, 73, 1–12.
- Assunção, E., Beteto, M.A.L., Teixeira, M.C.M., and Silva, E.R.P. (2019). Robust LQR-LMI state-derivative controller: A novel approach. In: *15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis, Bolonha - Itália*.
- Beteto, M.A.L., Assunção, E., Teixeira, M.C.M., Silva, E.R.P., Buzachero, L.F.S., and Caun, R.P. (2018). New design of robust LQR-state derivative controllers via LMIs. *IFAC-PapersOnLine*, 51(25), 422–427.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15. SIAM studies in applied mathematics: 15.
- Caun, R.P., Assunção, E., Lins, L.I., and Teixeira, M.C.M. (2015). Controlador LQR via aproximação LMI com restrição de taxa de decaimento aplicado ao helicóptero 3-DOF de bancada. *XII SBAI-XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 49–54.
- Caun, R.P., Assunção, E. and Teixeira, M.C.M., and Caun, A.P. (2018). LQR-LMI control applied to convex-bounded domains. *Cogent Engineering*, 5(1), 1457206.
- Friedland, B. (2005). *Control System Design: An Introduction to State-Space Methods (Dover Books on Engineering)*. Dover Publications, Inc., USA.
- Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A.J., and Chilali, M. (1994). The LMI control toolbox. In *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 3, 2038–2041.
- Lofberg, J. (2004). Yalmip: A toolbox for modeling and optimization in matlab. In *2004 IEEE international conference on robotics and automation (IEEE Cat. No. 04CH37508)*, 284–289.
- Oliveira, M. and Skelton, R. (2007). *Stability Tests for Constrained Linear Systems*, volume 268, 241–257.
- Quanser (2002). 3-DOF helicopter reference manual.
- Robandi, I., Nishimori, K., Nishimura, R., and Ishihara, N. (2001). Optimal feedback control design using genetic algorithm in multimachine power system. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 23(4), 263–271.
- Vinodh Kumar, E., Raaja, G.S., and Jerome, J. (2016). Adaptive PSO for optimal LQR tracking control of 2 DOF laboratory helicopter. *Applied Soft Computing*, 41, 77–90.