

Metodologia de Controle LQRI Descentralizado Baseado em Modelo *Fuzzy* T-S Evolutivo com Alocação Robusta e Flexível de Autoestruturas

Rodrigo Possidônio Noronha * Ginalber Luiz de Oliveira Serra **

* Av. Newton Belo, S/N - Vila Maria, Imperatriz, CEP: 65906-335,
Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail:
rodrigo.noronha@ifma.edu.br)

** Av. Getúlio Vargas, 04, Monte Castelo, São Luís, CEP: 65030-005,
Instituto Federal do Maranhão, MA (e-mail: ginalber@ifma.edu.br)

Abstract: In this paper, a new LQRI control methodology based on multivariable evolving T-S fuzzy model is proposed, realized in a decentralized structure with control loop decoupling. The control objective is to obtain an augmented state feedback gain matrix, for each loop of decentralized control, that mutually satisfies the optimality conditions for the LQRI problem and the eigenvalues robust allocation in circular regions. In addition, conditions are presented so that the proposed control methodology can be realized in a robust and flexible manner.

Resumo: Neste artigo, é proposta uma nova metodologia de controle LQRI baseado em modelo *fuzzy* T-S evolutivo multivariável, realizada em uma estrutura descentralizada com desacoplamento de malhas de controle. O objetivo de controle é obter uma matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada, para cada malha de controle descentralizado, que mutuamente satisfaça as condições de otimalidade para o problema do LQRI e a alocação robusta de autovalores em regiões circulares. Além disso, são apresentadas condições para que a metodologia de controle proposta possa ser realizada de forma robusta e flexível.

Keywords: Robust Allocation; *Fuzzy* Control; Decentralization; Decoupling; LQRI.

Palavras-chaves: Alocação Robusta; Controle *Fuzzy*; Descentralização; Desacoplamento; LQRI.

1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de metodologias de controle para sistemas multivariáveis acoplados é um importante desafio para a teoria de sistemas de controle, uma vez que o acoplamento entre malhas é uma complexidade comum em sistema multivariáveis e afeta significativamente o desempenho do sistema dinâmico em malha fechada (Chehardoli et al., 2019). Além do acoplamento entre malhas, um sistema de controle multivariável está sujeito à várias outras complexidades, tais como mudanças bruscas no ponto de operação, não linearidade, não estacionariedade, desgaste natural de equipamentos, distúrbios e entre outros, tornando incerta a análise da dinâmica de acoplamento entre malhas e, conseqüentemente, a seleção de pares de variáveis de controle e variáveis controladas poderá ser incorreta. Caso a seleção de pares seja incorreta, após o desacoplamento de malhas, uma determinada variável de controle selecionada poderá não exercer maior ação de controle em uma variável controlada desse mesmo par quando comparada às outras variáveis de controle (Chiu and Arkun, 1990).

Essas complexidades desafiam a teoria de sistemas de controle multivariável baseado em modelo orientado por dados, principalmente quando o projeto é realizado base-

ado em um modelo com estrutura ou parâmetros fixos, em que se espera que o sistema de controle multivariável descentralizado irá operar em instâncias semelhantes aos dados de treinamento (Leite et al., 2019). Nesse sentido, somente a adaptação paramétrica não é o suficiente. Uma possível solução para esse problema é por meio da adaptação paramétrica e estrutural de um modelo multivariável realizada, por exemplo, através de métodos de aprendizagem autônoma e incremental. Por meio da adaptação paramétrica e estrutural, além de ser possível obter uma maior adaptabilidade do sistema de controle multivariável às complexidades citadas acima, a seleção de pares de variáveis de controle e variáveis controladas é realizada em função da rastreabilidade das mudanças dinâmicas representadas por um modelo *fuzzy* T-S evolutivo multivariável.

De forma específica para a teoria de controle, geralmente os sistemas de controle *fuzzy* Takagi-Sugeno (T-S) evolutivo têm sido implementados utilizando a estratégia de compensação paralela e distribuída (do inglês, PDC), com o objetivo de fornecer maior interpretabilidade, tratabilidade e eficiência ao projeto de controle (Dhyani et al., 2020). Por meio da estratégia PDC, é projetado um sistema de controle baseado em modelo *fuzzy* T-S evolutivo, tal que uma dinâmica não linear é particionada em várias dinâmicas locais lineares extraídas por um algoritmo de agrupamento *fuzzy* evolutivo, de tal forma que para cada

* O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

dinâmica local linear é realizado o projeto de um sistema de controle local linear (Zhao and Wang, 2021).

A literatura dispõe de várias metodologias de controle multivariável descentralizado baseado em modelo *fuzzy* T-S implementadas através da estratégia PDC (Eltantawie, 2019; El Younsi et al., 2019; Kim et al., 2017). Um aspecto comum para as metodologias citadas acima, é que o sistema de controle multivariável é previamente descentralizado e logo em seguida cada malha de controle monovariável é representada por um sistema *fuzzy* T-S, de tal forma que não há uma comunicação entre regras nas dinâmicas multivariáveis controladas de forma descentralizadas pelos sistemas de controle monovariáveis. De certa forma, as metodologias citadas acima são conservadoras no sentido de não explorar a capacidade de representação e raciocínio do conhecimento subjetivo através de um sistema *fuzzy* T-S.

Visando propor uma alternativa para o projeto de sistemas de controle multivariável, neste trabalho é proposta uma nova metodologia de controle multivariável descentralizado com desacoplamento de malhas de controle referente ao problema do regulador linear quadrático com ação integral (do inglês, LQRI), baseado em modelo *fuzzy* T-S evolutivo multivariável. A metodologia de controle proposta nesse trabalho é uma continuação da metodologia proposta em Noronha and de Oliveira Serra (2019), tal que é realizada através da estratégia PDC, no qual o consequente da i -ésima regra *fuzzy* é descrito por uma estrutura de controle multivariável local linear descentralizado com malhas desacopladas. Além disso, a metodologia de controle proposta está inserida em um contexto multiobjetivo. Essa característica é dada pelas formulações que permitem obter uma matriz de ganhos aumentada de realimentação de estados que satisfaz mutuamente as condições de otimalidade para o problema do LQRI, assim como a alocação de autovalores em regiões circulares no plano complexo. Para que o critério de controle multiobjetivo possa realizado de forma robusta e flexível para a i -ésima regra *fuzzy*, foram desenvolvidas formulações que fornecem uma condição limitada em norma para que os autovalores permaneçam alocados em regiões circulares, mesmo na presença de incertezas paramétricas aditiva/subtrativa.

2. NOTAÇÃO E TERMINOLOGIA

Seja o sistema de controle referente ao problema do LQRI de horizonte de tempo infinito com alocação de autovalores baseado em modelo *fuzzy* T-S evolutivo multivariável acoplado, descrito pela i -ésima regra *fuzzy* a seguir:

$$\mathcal{R}^i : \mathbf{SE} \ z_{1,k} \ \acute{E} \ \mathbf{H}_{1,k}^i \ E \ \dots \ E \ z_{p+m,k} \ \acute{E} \ \mathbf{H}_{p+m,k}^i$$

$$\mathbf{ENT\tilde{A}O} \ \begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^i = \mathbf{A}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{B}^i \mathbf{u}_k^i \\ \mathbf{y}_k^i = \mathbf{C}^i \mathbf{x}_k^i + \mathbf{D}^i \mathbf{u}_k^i \\ \boldsymbol{\omega}_{k+1}^i = \boldsymbol{\omega}_k^i + \mathbf{r}_k - \mathbf{y}_k^i, \end{cases} \quad (1)$$

e as variáveis do sistema de controle defuzzificadas são dadas por $\tilde{\mathbf{u}}_k = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{u}_k^i$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{k+1} = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) \boldsymbol{\omega}_{k+1}^i$, $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{x}_{k+1}^i$ e $\tilde{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{y}_k^i$, em que $\gamma_k^i(\mathbf{z}_k) = \prod_{j=1}^{p+m} \mu_{j,k}^i(z_{j,k}) (\sum_{i=1}^R \prod_{j=1}^{p+m} \mu_{j,k}^i(z_{j,k}))^{-1}$ é o grau de ativação normalizado da i -ésima regra *fuzzy*, $\mathbf{z}_k = [z_{1,k} \ z_{2,k} \ \dots \ z_{p+m,k}]^T$ é o vetor de variáveis linguísticas do antecedente ou vetor de dados, $\mathbf{H}_{j,k}^i$ é a j -ésima

dimensão do i -ésimo conjunto *fuzzy*. O consequente da i -ésima regra *fuzzy* é composto pelas matrizes $\mathbf{A}^i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}^i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C}^i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{D}^i \in \mathbb{R}^{m \times p}$, em que $\mathbf{u}_k^i \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ é o vetor de variáveis de controle, $\mathbf{y}_k^i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é o vetor de variáveis controladas, $\mathbf{x}_k^i \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de variáveis de estados do sistema, $\boldsymbol{\omega}_k^i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é o vetor de variáveis de estados do integrador e $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ é o vetor de referências.

3. IDENTIFICAÇÃO FUZZY T-S EVOLUTIVO MULTIVARIÁVEL NO ESPAÇO DE ESTADOS

A seguir é descrita a metodologia de identificação de modelo *fuzzy* T-S evolutivo multivariável no espaço de estados, em que na Seção 3.1 é realizada parametrização dos antecedentes e na Seção 3.2 é realizada a parametrização dos consequentes.

3.1 Estimação Paramétrica do Antecedente

Para parametrizar os antecedentes, nesse trabalho é utilizado o algoritmo de agrupamento *fuzzy* evolutivo proposto em Angelov (2010). Para avaliar a capacidade de um vetor de dados \mathbf{z}_k ser o ponto focal ou centro de um novo grupo, é utilizada uma medida de similaridade chamada *densidade*, dada por $\mathcal{D}_k(\mathbf{z}_k) = (k-1)[(k-1)(\sum_{j=1}^{p+m} z_{j,k}^2 + 1) + b_k - \vee_k]^{-1}$, em que $\vee_k = 2 \sum_{i=1}^{p+m} z_{j,k} c_{j,k}$, $\mathcal{D}_1(\mathbf{z}_1) = 1$, $b_k = b_{k-1} + \sum_{i=1}^{p+m} (z_{j,(k-1)})^2$, $b_1 = 0$, $c_{j,k} = c_{j,(k-1)} + z_{j,(k-1)}$ e $c_{j,1} = 0$. Na presença de uma nova dinâmica, para que \mathbf{z}_k seja selecionado como um novo ponto focal, é necessário que a *condição A* seja satisfeita: **SE** $\mathcal{D}_k(\mathbf{z}_k) > \max_{i=1}^R \mathcal{D}_k(\mathbf{z}^i)$ **ou** $\mathcal{D}_k(\mathbf{z}_k) < \min_{i=1}^R \mathcal{D}_k(\mathbf{z}^i)$ **ENTÃO** $R = R+1$. A cada atualização do vetor de dados \mathbf{z}_k é realizada a atualização da densidade dos pontos focais \mathbf{z}^i já existentes, dada por $\mathcal{D}_k(\mathbf{z}^i) = (k-1)\{(k-1) + (k-2)[(\mathcal{D}_{k-1}(\mathbf{z}^i))^{-1} - 1] + \psi_k\}^{-1}$, em que $\psi_k = \sum_{j=1}^{p+m} (z_{j,k} - z_{j,(k-1)})^2$.

Para que apenas os grupos que representam uma dinâmica relevante ou útil no atual instante sejam mantidos, é necessário verificar se *condição B*: **SE** $U_k^i < \eta$ **ENTÃO** $R = R-1$ é satisfeita. A utilidade U_k^i do i -ésimo grupo é dada por $U_k^i = (k-I^i)^{-1} \sum_{j=1}^k \mu_j^i(z_{j,k})$, em que I^i é o instante em que o i -ésimo grupo foi criado e $\eta \in [0, 0.1, 0.3]$. Por fim, é atualizada a zona de influência $\varrho_{j,k}^i$ de cada grupo, dada

por $\varrho_{j,k}^i = \sqrt{\zeta(\varrho_{j,(k-1)}^i)^2 + (1-\xi)(S_k^i)^{-1}(z_{j,k} - z_j^i)^2}$, em que ξ é a constante de aprendizagem e S_k^i é a quantidade de vetores \mathbf{z}_k pertencentes ao i -ésimo grupo.

3.2 Estimação Recursiva Paramétrica do Consequente

De acordo com Torres and de Oliveira Serra (2018), para a obtenção das matrizes \mathbf{A}^i , \mathbf{B}^i , \mathbf{C}^i e \mathbf{D}^i , é necessário obter os parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, que são obtidos através dos parâmetros de Markov *fuzzy* de um observador de estados que é incluído ao sistema para que se possa identificar o modelo diretamente de um conjunto de dados. Inicialmente, a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de estados é obtida para um conjunto de dados de treinamento previamente coletado denotado por uma matriz de vetores de dados $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{(p+m) \times N_t}$ de treinamento. Através do método de mínimos quadrados ponderados *fuzzy* em batelada, é obtida

a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de estados para o conjunto de dados de treinamento, dada por $\Theta_k^i = \hat{\mathbf{Y}}_k \mathbf{X}_k^i (\Phi_k^i)^T [\Phi_k^i \mathbf{X}_k^i (\Phi_k^i)^T]^{-1}$, em que $\Theta_k^i = [\mathbf{D}_k^i \ \mathbf{M}_{k_1}^i \ \dots \ \mathbf{M}_{k_q}^i]$ com q é o número de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de estados; $\mathbf{X}_k^i = \text{diag}[\gamma^i(\mathbf{z}_{q+1}) \ \dots \ \gamma^i(\mathbf{z}_k)]$ é a matriz de graus de ativação normalizados, $\mathbf{Y}_k^i = [\mathbf{y}_{q+1}^i \ \dots \ \mathbf{y}_k^i]$ é a matriz de vetores de variáveis controladas; $\Phi_k^i = [\phi_{q+1}^i \ \dots \ \phi_k^i]$ é a matriz de regressores com $\phi_k^i = [\mathbf{u}_k^T \ (\mathbf{v}_{k-1}^i)^T \ \dots \ (\mathbf{v}_{k-q}^i)^T]^T$ e $\mathbf{v} = [\mathbf{u}^i \ \mathbf{y}^i]$. De forma recursiva, a matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de estados é dada por $\Theta_{k+1}^i = \Theta_k^i + [\mathbf{y}_{k+1} - \Theta_k^i \phi_{k+1}^i] \mathbf{G}_{k+1}^i$, em que o vetor de ganhos $\mathbf{G}_{k+1}^i = (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{F}_k^i [(\gamma^i(\mathbf{z}_{k+1}))^{-1} + (\phi_{k+1}^i)^T \mathbf{F}_k^i \phi_{k+1}^i]^{-1}$ é inicialmente nulo e a matriz de covariância do erro $\mathbf{F}_{k+1}^i = \mathbf{F}_k^i [\mathbf{I} - \phi_{k+1}^i \mathbf{G}_{k+1}^i]$ é inicializada por $\delta \mathbf{I}$ com $\delta \in [10^2, 10^4]$.

Após a obtenção da matriz de parâmetros de Markov *fuzzy* do observador de estados, é realizada a obtenção dos parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, dados por $\mathbf{M}_j^i = \bar{\mathbf{M}}_j^i - \sum_{k=1}^j \bar{\mathbf{M}}_j^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i$ para $j = 1, 2, \dots, q$ e $\mathbf{M}_j^i = -\sum_{k=1}^q \bar{\mathbf{M}}_j^{i2} \mathbf{M}_{j-k}^i$ para $j > q$, em que $\bar{\mathbf{M}}_j^i = [\mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} (\mathbf{B}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{D}^i), -\mathbf{C}^i (\mathbf{A}^i + \mathbf{G}^i \mathbf{C}^i)^{k-1} \mathbf{G}^i] \approx [\bar{\mathbf{M}}_j^{i1}, -\bar{\mathbf{M}}_j^{i2}]$.

Com a obtenção dos parâmetros de Markov *fuzzy* do sistema, é obtida a matriz generalizada de Hankel, dada por:

$$\mathbf{H}_{j-1}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_j^i & \mathbf{M}_{j+1}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\tau-1}^i \\ \mathbf{M}_{j+1}^i & \mathbf{M}_{j+2}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\tau}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{j+\nu-1}^i & \mathbf{M}_{j+\nu}^i & \dots & \mathbf{M}_{j+\nu+\tau-2}^i \end{bmatrix}, \quad (2)$$

em que $\nu, \tau \in \mathbb{N}$ são as dimensões da matriz \mathbf{H}_{j-1}^i tal que $\nu m \leq \tau p$. Se o sistema for controlável e observável, é possível afirmar que o *rank* máximo de \mathbf{H}_{j-1}^i , para $j = 1$, é igual ao número n de valores singulares não nulos. Em função da decomposição em valores singulares, a matriz \mathbf{H}_0^i pode ser reescrita como $\mathbf{H}_0^i = \mathbf{L}^i \Sigma^i (\mathbf{S}^i)^T$. Sejam as matrizes \mathbf{L}_n^i e \mathbf{S}_n^i formadas, respectivamente, pelas n primeiras colunas de \mathbf{L}^i e \mathbf{S}^i . Sendo assim, a matriz \mathbf{H}_0^i pode ser novamente reescrita como $\mathbf{H}_0^i = \mathbf{L}_n^i \Sigma_n^i (\mathbf{S}_n^i)^T$. Por fim, as matrizes do modelo local linear pertencente ao consequente da i -ésima regra *fuzzy* são dadas por $\mathbf{A}^i = \mathbf{E}_n^T \mathbf{H}_1^i [\mathbf{E}_n^T \mathbf{H}_0^i]^{-1}$, $\mathbf{B}^i =$ o primeiro bloco $n \times p$ de \mathbf{H}_0^i , $\mathbf{C}^i = \mathbf{E}_n^T \mathbf{E}_m$ e $\mathbf{D}^i = \mathbf{M}_0^i$, em que $\mathbf{E}_n^T = [\mathbf{I}_n \ \mathbf{0}_n \ \dots \ \mathbf{0}_n]$ e $\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}_m \ \dots \ \mathbf{0}_m]$.

4. METODOLOGIA DE DESACOPLAMENTO

Nesta seção é proposta a realização do desacoplamento de modelos *fuzzy* T-S evolutivo multivariáveis acoplados. A metodologia proposta é restringida apenas à sistemas multivariáveis quadrados, em que o número de entradas p é igual ao número de saídas m .

4.1 Matriz de Ganhos Relativos Normalizados Fuzzy

Para que seja possível desacoplar o modelo multivariável local linear pertencente ao consequente da i -ésima regra *fuzzy*, é necessário analisar a dinâmica de acoplamento entre as malhas do modelo multivariável local linear e assim

selecionar os m pares de variáveis de controle e variáveis controladas referentes às m malhas monovariáveis dominantes. Nesse trabalho, a matriz de ganhos normalizados relativos (do inglês, NRG) é estendida para aplicação em modelos discretos no contexto *fuzzy*. Seja um sistema com $\mathbf{G}^i(z) = [g_{lr}^i(z)]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ para $l, r = 1, 2, \dots, m$, que é a matriz de funções de transferências referente ao modelo multivariável local linear pertencente ao consequente da i -ésima regra *fuzzy*.

Segundo He et al. (2009), considerando-se que a resposta ao degrau de peso arbitrário δ_k seja dada por $\bar{y}_{l,k}^i = \delta_k - \bar{g}_{lr,k}^i$. Dessa forma, a informação de estado dinâmico pode ser obtida através do tempo de convergência τ_{lr}^i , dado por $\tau_{lj}^i = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{y}_{l,\infty}^i - \bar{y}_{l,k}^i) = \sum_{k=1}^{\infty} [\delta_k - (\delta_k - \bar{g}_{lr,k}^i)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{g}_{lr,k}^i)$. Após isso, é definido o ganho normalizado da função de transferência $\bar{g}_{lr}^i(z)$ como $\bar{\eta}_{lr}^i = \bar{g}_{lr}^i(1)(\tau_{lr}^i)^{-1}$, em que a função de transferência $\bar{g}_{lr}^i(z)$ é a função normalizada de $g_{lr}^i(z)$ dada por $\bar{g}_{lr}^i(z) = (g_{lr}^i(1))^{-1} g_{lr}^i(z)$. De forma matricial, o ganho normalizado é dado por $\bar{\mathbf{H}}^i = \mathbf{G}^i(1) \odot \bar{\mathbf{T}}^i$, em que \odot simboliza a divisão elemento por elemento, $\bar{\mathbf{H}}^i = [\bar{\eta}_{lr}^i]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de ganhos normalizados, $\mathbf{G}^i(1) = [\bar{g}_{lr}^i(1)]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de ganhos de estado estacionário e $\bar{\mathbf{T}}^i = [\tau_{lr}^i]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a matriz de tempos de convergência. Após isso, é definido o ganho relativo normalizado (do inglês, NRG) entre a variável controlada $y_l^i(z)$ e a variável de controle $u_r^i(z)$ como $v_{lr}^i = \bar{\eta}_{lr}^i (\hat{\eta}_{lr}^i)^{-1}$, em que $\hat{\eta}_{lr}^i$ é o ganho normalizado entre a variável controlada $y_l^i(z)$ e a variável de controle $u_r^i(z)$ quando todas as outras malhas de controle estão fechadas. De forma matricial, a NRG pode ser definida como $\mathbf{Y}^i = \bar{\mathbf{H}}^i \otimes (\bar{\mathbf{H}})^{-T}$, em que $\mathbf{Y}^i = [v_{lr}^i]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é a NRG e \otimes simboliza a multiplicação elemento por elemento. É recomendável escolher os pares em que as malhas sejam dominantes, de tal forma que v_{lr}^i seja o mais próximo possível do valor unitário (Garrido et al., 2011).

4.2 Desacoplamento Invertido Fuzzy

A metodologia de desacoplamento invertido utilizada nesse trabalho e que foi estendida para o contexto *fuzzy* é baseada em Garrido et al. (2011). A estrutura da matriz desacopladora $\hat{\mathbf{D}}^i(z)$ é composta pelas matrizes $\hat{\mathbf{D}}_d^i(z) = [\hat{d}_{dl}^i(z)]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\hat{\mathbf{D}}_o^i(z) = [\hat{d}_{or}^i(z)]_{m \times m} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Por definição, a matriz $\hat{\mathbf{D}}_d^i(z)$ necessita ter apenas m elementos $\hat{d}_{dl}^i(z)$ não nulos, desde que cada elemento $\hat{d}_{dl}^i(z)$ esteja conectado à variável de controle de cada malha monovariável dominante. Já para a matriz $\hat{\mathbf{D}}_o^i(z)$, os elementos $\hat{d}_{or}^i(z)$ com o mesmo índice (lr) dos m elementos $\hat{d}_{dl}^i(z)$ conectados às m variáveis de controle das m malhas monovariáveis dominantes devem ser nulos. Para o desacoplamento dinâmico de um modelo representado por uma matriz de funções de transferência, a matriz desacopladora $\hat{\mathbf{G}}^i(z)$ é dada pela multiplicação matricial:

$$\hat{\mathbf{G}}^i(z) = \mathbf{G}^i(z) \hat{\mathbf{D}}^i(z), \quad (3)$$

em que $\hat{\mathbf{D}}^i(z)$ é a matriz desacopladora. Para o desacoplamento invertido, a matriz desacopladora também pode ser obtida como $\hat{\mathbf{D}}^i(z) = \hat{\mathbf{D}}_d^i(z) (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{D}}_o^i(z) \hat{\mathbf{D}}_d^i(z))^{-1}$.

Substituindo-se (3) em $\hat{\mathbf{D}}^i(z)$ dada relação anterior, é obtido que $\hat{\mathbf{G}}^i(z) = \mathbf{G}^i(z)\hat{\mathbf{D}}_d^i(z)(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{D}}_o^i(z)\hat{\mathbf{D}}_d^i(z))^{-1}$. Através da inversa de $\hat{\mathbf{G}}^i(z)$ e após manipulações algébricas, chega-se a:

$$(\hat{\mathbf{D}}_d^i(z))^{-1} - \hat{\mathbf{D}}_o^i(z) = (\hat{\mathbf{G}}^i(z))^{-1}\mathbf{G}^i(z) \quad (4)$$

A matriz desacopladora de um método de desacoplamento convencional se relaciona com o desacoplamento invertido através de $\hat{\mathbf{D}}^i(z) = \hat{\mathbf{D}}_d^i(z)(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{D}}_o^i(z)\hat{\mathbf{D}}_d^i(z))^{-1}$. Como essa expressão é matematicamente complexa, é mais fácil trabalhar com a sua inversa obtida através de (4), dada por:

$$(\hat{\mathbf{D}}^i(z))^{-1} = (\hat{\mathbf{D}}_d^i(z))^{-1} - \hat{\mathbf{D}}_o^i(z) \quad (5)$$

O resultado da subtração matricial $(\hat{\mathbf{D}}_d^i(z))^{-1} - \hat{\mathbf{D}}_o^i(z)$ pode ser utilizado para obtenção dos elementos desacopladores da matriz $(\hat{\mathbf{D}}^i(z))^{-1}$. Para que a matriz $\hat{\mathbf{D}}_d^i(z)$ seja não singular, é necessário que m elementos não nulos sejam referentes, cada um, a uma linha e coluna da matriz $\hat{\mathbf{D}}_d^i(z)$ (Garrido et al., 2011). Por fim, de acordo com Garrido et al. (2011), os elementos das matrizes $\hat{\mathbf{D}}_d^i(z)$ e $\hat{\mathbf{D}}_o^i(z)$ podem ser definidos, respectivamente, por $\hat{d}_{d_{lr}}^i(z) = \hat{g}_{lr}^i(z)(g_{lr}^i(z))^{-1}$ e $\hat{d}_{o_{lr}}^i(z) = -g_{lr}^i(z)(\hat{g}_{lr}^i(z))^{-1}$, em que $\hat{g}_{lr}^i(z)$ é equivalente ao modelo da malha monovariável dominante em relação à variável controlada $y_l^i(z)$.

5. METODOLOGIA DE CONTROLE PROPOSTA

Após desacopladas as malhas do modelo multivariável local linear pertencente ao consequente da i -ésima regra *fuzzy*, é realizado o projeto de controle *fuzzy* T-S evolutivo multivariável descentralizado, descrito pela i -ésima regra:

$$\mathcal{R}^i : \mathbf{SE} \ z_{1,k} \ \acute{E} \ \mathbf{H}_{1,k}^i \ E \ \dots \ E \ z_{p+m,k} \ \acute{E} \ \mathbf{H}_{p+m,k}^i$$

$$\text{ENT\~{A}O} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{1,(k+1)}^i = \mathbf{A}_1^i \mathbf{x}_{1,k}^i + \mathbf{B}_1^i u_{1,k}^i \\ y_{1,k}^i = \mathbf{C}_1^i \mathbf{x}_{1,k}^i + \mathbf{D}_1^i u_{1,k}^i \\ \omega_{1,k+1}^i = \omega_{1,k}^i + r_{1,k} - y_{1,k}^i \\ \vdots \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{m,(k+1)}^i = \mathbf{A}_m^i \mathbf{x}_{m,k}^i + \mathbf{B}_m^i u_{m,k}^i \\ y_{m,k}^i = \mathbf{C}_m^i \mathbf{x}_{m,k}^i + \mathbf{D}_m^i u_{m,k}^i \\ \omega_{m,k+1}^i = \omega_{m,k}^i + r_{m,k} - y_{m,k}^i \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (6)$$

e a saída defuzzificada para c -ésima malha de controle é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{c,k} = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) u_{c,k}^i \\ \tilde{\omega}_{c,k+1} = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) \omega_{c,k+1}^i \\ \tilde{\mathbf{x}}_{c,(k+1)} = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) \mathbf{x}_{c,(k+1)}^i \\ \tilde{y}_{c,k} = \sum_{i=1}^R \gamma_k^i(\mathbf{z}_k) y_{c,k}^i \end{array} \right. \quad (7)$$

O objetivo da metodologia de controle proposta é obter uma matriz de ganhos de realimentação de estados aumentada \mathbf{K}_c^i para $c = 1, 2, \dots, m$. Caso seja obtida \mathbf{K}_c^i , considerando-se que o par $(\mathbf{A}^i, \mathbf{B}^i)$ seja controlável, então é possível obter uma função de controle dada por:

$$u_{c,k}^i = \mathbf{K}_c^i \mathbf{x}_{c(k)}^i + \mathbf{C}_c^i \omega_{c,k}^i, \quad (8)$$

em que a matriz de ganhos aumentada de realimentação de estados é dada por $\mathbf{K}_c^i = [\mathbf{K}_c^i \ \mathbf{C}_c^i] \in \mathbb{R}^{p \times (n+m)}$, com $\mathbf{K}_c^i \in \mathbb{R}^{p \times n}$ que é a matriz de ganhos de realimentação de estados do controlador e $\mathbf{C}_c^i \in \mathbb{R}^{p \times m}$ que é a matriz de ganhos de realimentação de estados do integrador. Uma vez obtida \mathbf{K}_c^i , é possível satisfazer o critério de controle multiobjetivo proposto, que é mutuamente alocar os autovalores especificados em malha fechada e satisfazer as condições de otimalidade do índice de desempenho aumentado para o problema do LQRI, dado a seguir:

$$J_c^i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} [(\varphi_{c(k)}^i)^T \ (u_{c,k}^i)^T] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c^i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_c^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{c(k)}^i \\ u_{c,k}^i \end{bmatrix}, \quad (9)$$

em que $\mathbf{R}_c^i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ é a matriz de ponderação da c -ésima variável de controle, $\mathbf{Q}_c^i \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ é a matriz de ponderação do c -ésimo vetor de variáveis de estados aumentado. Devido à inclusão do integrador na malha de controle, as matrizes \mathbf{A}_c^i e \mathbf{B}_c^i são reescritas na forma aumentada, respectivamente, como $\mathbf{\Gamma}_c^i \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ e $\mathbf{\Pi}_c^i \in \mathbb{R}^{(m+n) \times p}$, definidas a seguir:

$$\mathbf{\Gamma}_c^i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_c^i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi}_c^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_c^i \\ -\mathbf{D}_c^i \end{bmatrix}, \quad (10)$$

com $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

A função de controle para a c -ésima malha de controle pertencente ao consequente da i -ésima regra *fuzzy* é obtida através da solução da equação algébrica discreta de Riccati aumentada, dada a seguir:

$$\mathcal{P}_c^i = (\mathbf{\Gamma}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Gamma}_c^i - (\mathbf{\Gamma}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Pi}_c^i [\mathbf{R}_c^i + (\mathbf{\Pi}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Pi}_c^i]^{-1} (\mathbf{\Pi}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Gamma}_c^i + \mathbf{Q}_c^i, \quad (11)$$

em que $\mathcal{P}_c^i > \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)}$ é a solução matricial simétrica definida positiva, tal que o índice de desempenho aumentado (9) somente pode ser otimizado se a condição de definição simétrica de \mathcal{P}_c^i for satisfeita (Alexandridis, 1996). Após obtida \mathcal{P}_c^i , é possível determinar a matriz de ganhos aumentada de realimentação de estados, dada por:

$$\mathbf{K}_c^i = -[\mathbf{R}_c^i + (\mathbf{\Pi}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Pi}_c^i]^{-1} (\mathbf{\Pi}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Gamma}_c^i \quad (12)$$

A metodologia de controle proposta nesse trabalho é baseada na teoria do problema inverso do controle ótimo e em Alexandridis (1996). Primeiramente são obtidas as matrizes \mathcal{P}_c^i e \mathbf{K}_c^i com \mathbf{R}_c^i inicialmente dada e, após isso é obtida a matriz \mathbf{Q}_c^i . No desenvolvimento inicial da teoria do regulador linear quadrático (do inglês, LQR), pensava-se que somente era possível obter $\mathcal{P}_c^i > \mathbf{0}$ se $\mathbf{R}_c^i > \mathbf{0}$ e $\mathbf{Q}_c^i \geq \mathbf{0}$. Foi proposto em Molinari (1973) que é possível obter a solução matricial da equação algébrica discreta de Riccati definida positiva mesmo quando $\mathbf{Q}_c^i < \mathbf{0}$, sendo apenas necessário que os autovalores de $\mathbf{A}_c^i + \mathbf{B}_c^i \mathbf{K}_c^i$ sejam assintoticamente estáveis. Dessa forma, para a metodologia de controle proposta, as condições de otimalidade para o problema do LQRI são satisfeitas se os autovalores de $\mathbf{\Gamma}_c^i + \mathbf{\Pi}_c^i \mathbf{K}_c^i$ estão localizados no interior do círculo de raio unitário e, $\mathbf{R}_c^i, \mathcal{P}_c^i > \mathbf{0}$. Para que o critério de controle multiobjetivo proposto seja satisfeito, é necessário reescrever (11) em termos da matriz de estados aumentada em malha fechada $\mathbf{\Xi}_c^i = \mathbf{\Gamma}_c^i + \mathbf{\Pi}_c^i \mathbf{K}_c^i$. Supondo-se que

$(\mathbf{R}_c^i)^{-1} = [\mathbf{R}_c^i + (\mathbf{\Pi}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Pi}_c^i]^{-1}$ e que \mathbf{R}_c^i pode ser definida, por conveniência, como uma matriz identidade, assim (11) é reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{P}_c^i = (\mathbf{\Xi}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{\Xi}_c^i - (\mathbf{K}_c^i)^T \mathbf{K}_c^i + \mathbf{Q}_c^i \quad (13)$$

Seja a matriz de autovalores distintos especificados em malha fechada e a matriz de autovetores associados, dadas respectivamente, por $\mathbf{\Lambda}_c^i = \text{diag}\{\lambda_{c,1}^i \dots \lambda_{c,n+m}^i\}$ e $\mathbf{V}_c^i = [\mathbf{v}_{c,1}^i \dots \mathbf{v}_{c,n+m}^i]$. Considerando-se que $\mathbf{\Xi}_c^i = \mathbf{V}_c^i \mathbf{\Lambda}_c^i (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$. Substituindo-se $\mathbf{\Xi}_c^i$ em (13) por $\mathbf{V}_c^i \mathbf{\Lambda}_c^i (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$, multiplicando (13) à direita por \mathbf{V}_c^i e à esquerda por $(\mathbf{V}_c^i)^T$ e, fazendo-se $-(\mathbf{K}_c^i)^T \mathbf{K}_c^i + \mathbf{Q}_c^i = (\mathbf{V}_c^i)^{-T} (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$, obtém-se:

$$(\mathbf{V}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i = \mathbf{\Lambda}_c^i (\mathbf{V}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i \mathbf{\Lambda}_c^i + \mathbf{I}, \quad (14)$$

como $\mathbf{\Lambda}_c^i$ e \mathcal{P}_c^i são por definição matrizes simétricas, então o termo $\mathbf{\Lambda}_c^i (\mathbf{V}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i \mathbf{\Lambda}_c^i$ em (14) pode ser reescrito como $(\mathbf{V}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i (\mathbf{\Lambda}_c^i)^2$. Dessa forma, (14) é reescrita como $(\mathbf{V}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i - (\mathbf{V}_c^i)^T \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i (\mathbf{\Lambda}_c^i)^2 = \mathbf{I}$. Após isso, é obtida a solução de (11), dada por $\mathcal{P}_c^i = (\mathbf{V}_c^i)^{-T} [\mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda}_c^i)^2]^{-1} (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$. Após obtida \mathcal{P}_c^i , são obtidas $\mathbf{K}_c^i = -(\mathbf{\Pi}_c^i)^T (\mathbf{V}_c^i)^{-T} [\mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda}_c^i)^2]^{-1} \mathbf{\Lambda}_c^i (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$ e $\mathbf{Q}_c^i = \mathcal{P}_c^i \mathbf{V}_c^i [\mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda}_c^i)^2] (\mathbf{V}_c^i)^{-1} - (\mathbf{K}_c^i)^T \mathbf{K}_c^i$.

As formulações apresentadas acima foram desenvolvidas para a obtenção das matrizes \mathcal{P}_c^i , \mathbf{K}_c^i e \mathbf{Q}_c^i em função de $\mathbf{\Lambda}_c^i$ e \mathbf{V}_c^i , de tal forma que o problema inverso do LQR foi descrito em função do problema de alocação de autovalores. A continuação da metodologia proposta é dada pela obtenção de \mathbf{V}_c^i . Segundo Rosenbrock (1974), seja a matriz de autovetores generalizados $\bar{\mathbf{V}}_{c,j}^i$ associada ao autovalor $\lambda_{c,j}^i$ para $j = 1, 2, \dots, n+m$, dada por $\bar{\mathbf{V}}_{c,j}^i = (\lambda_{c,j}^i \mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}_c^i)^{-1} \mathbf{\Pi}_c^i$, no qual a relação entre o autovetor $\mathbf{v}_{c,j}^i$ e a matriz de autovetores generalizada $\bar{\mathbf{V}}_{c,j}^i$ é dada por $\mathbf{v}_{c,j}^i = \bar{\mathbf{V}}_{c,j}^i \boldsymbol{\psi}_{c,j}^i$, em que $\boldsymbol{\psi}_{c,j}^i$ é um vetor coluna pertencente à matriz $\bar{\mathbf{\Psi}}_c^i$, tal que $\bar{\mathbf{\Psi}}_c^i = \mathbf{K}_c^i \mathbf{V}_c^i$ (Rosenbrock, 1974). Por conveniência, os vetores $\boldsymbol{\psi}_{c,j}^i$ são definidos com elementos unitários. Essa consideração é permissível, uma vez que para o subespaço associado à $\lambda_{c,j}^i$ existem inúmeros autovetores pertencentes à ele, o que não alteraria a multiplicação por um vetor com elementos unitários. Dessa forma, a matriz de autovetores \mathbf{V}_c^i associada à matriz $\mathbf{\Lambda}_c^i$ é definida como $\mathbf{V}_c^i = [\bar{\mathbf{V}}_{c,1}^i \bar{\mathbf{V}}_{c,2}^i \dots \bar{\mathbf{V}}_{c,n+m}^i]$ e, consequentemente, segundo Rosenbrock (1974), a matriz $\mathbf{K}_c^i = (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$. Desde que a relação $\bar{\mathbf{\Psi}}_c^i = -(\mathbf{\Pi}_c^i)^T (\mathbf{V}_c^i)^{-T} [\mathbf{I} - (\mathbf{\Lambda}_c^i)^2]^{-1} \mathbf{\Lambda}_c^i$ seja satisfeita, é possível obter \mathbf{K}_c^i através de $\mathbf{K}_c^i = (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$.

5.1 Alocação Regional Robusta de Autovalores

Considerando-se que a metodologia de controle proposta na Seção 5 seja realizada com a alocação de autovalores em uma união de regiões $\Omega_c^i = \bigcup_{h=1}^s \Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$, com as seguintes definições paramétricas: $d_{c,h}^i < 1$ é a distância do eixo imaginário à borda da região circular, $\rho_{c,h}^i$ é o raio da região circular e $\sigma_{c,h}^i = (\alpha_{c,h}^i, \pm \beta_{c,h}^i)$ é o centro da região circular, em que $\alpha_{c,h}^i = \pm(\rho_{c,h}^i + d_{c,h}^i)$ para a região circular localizada no semicírculo direito e esquerdo, respectivamente. Seja $\mathbf{\Delta}_c^i \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ uma matriz de incertezas paramétricas aditiva/subtrativa. Supondo-se que a equação de estados em (6) esteja submetida à

presença da matriz $\mathbf{\Delta}_c^i$, sendo assim a matriz de estados aumentada em malha fechada é reescrita como $\tilde{\mathbf{\Xi}}_c^i = \mathbf{\Gamma}_c^i + \mathbf{\Pi}_c^i \mathbf{K}_c^i \pm \mathbf{\Delta}_c^i$. O objetivo de qualquer metodologia de controle com alocação robusta de autovalores é obter uma matriz de ganhos de realimentação de estados tal que os autovalores em malha fechada tenham uma sensibilidade reduzida às variações paramétricas na matriz de estados. Partindo do exposto acima e, tendo como referência a metodologia proposta em Zhai et al. (2015), as condições para que t autovalores permaneçam alocados no interior de uma região circular, mesmo na presença de $\mathbf{\Delta}_c^i$, são dadas pelo Teorema 1, em que é proposta uma condição de robustez limitada em norma e a demonstração é realizada em função da singularidade da matriz $\tilde{\mathbf{\Xi}}_c^i$.

Lema 1. Ver: Horn and Johnson (2012)

- (1) Se $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{B} \geq |\mathbf{A}|$, então $\bar{\rho}(\mathbf{B}) \geq \bar{\rho}(|\mathbf{A}|) \geq \bar{\rho}(\mathbf{A})$.
- (2) Supondo-se que $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, então $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ com $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é não singular se $\bar{\rho}(\mathbf{A}) < 1$,

em que $\bar{\rho}(\bullet)$ é o máximo autovalor de uma matriz.

Teorema 1. Supondo-se que a matriz de estados aumentada em malha fechada contenha t autovalores localizados no interior de uma região circular $\Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$ e assumindo-se que $\Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i) \cap \bigcup_{j=t+1}^{n+m} \{\lambda_{c,j}^i(\mathbf{\Gamma}_c^i + \mathbf{\Pi}_c^i \mathbf{K}_c^i)\} = \emptyset$. O círculo $C_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$, ou seja, a borda da região circular $\Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$ satisfaz:

$$C_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i) \cap \bigcup_{j=1}^{n+m} \{\lambda_{c,j}^i(\tilde{\mathbf{\Xi}}_c^i)\} = \emptyset \quad (15)$$

se $\|\mathbf{\Delta}_c^i\|_F < J_{c,h}^i = \frac{\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i|}{\kappa_F[\mathbf{T}_c^i]}$,

em que $g_{c,j}^i \equiv |\sigma_{c,h}^i - \lambda_{c,j}^i|$, $\|\bullet\|_F$ é a norma de Frobenius, $\kappa_F[\mathbf{T}_c^i] = \|\mathbf{T}_c^i\|_F \|(\mathbf{T}_c^i)^{-1}\|_F$ e \mathbf{T}_c^i é uma matriz triangular superior obtida através da decomposição de Schur da matriz de autovetores \mathbf{V}_c^i .

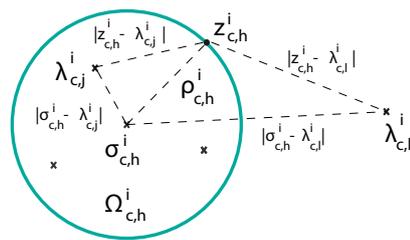


Figura 1. Descrições geométricas para o Teorema 1.

Demonstração. Seja $z_{c,h}^i$ um ponto no plano complexo tal que $z_{c,h}^i \in C_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$ e $z_{c,h}^i \cap \bigcup_{j=1}^{n+m} \{\lambda_{c,j}^i(\tilde{\mathbf{\Xi}}_c^i)\} = \emptyset$, então $z_{c,h}^i \mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_c^i$ é não singular com $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ e, consequentemente, é possível afirmar que todos os t autovalores estão alocados no interior da região circular $\Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$. De acordo com as descrições geométricas apresentadas na Figura 1, pode-se inferir que $|z_{c,h}^i - \lambda_{c,j}^i| \geq \rho_{c,h}^i - |\sigma_{c,h}^i - \lambda_{c,h}^i|$ se $\lambda_{c,h}^i \in \Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$ e $|z_{c,h}^i - \lambda_{c,l}^i| \geq |\sigma_{c,h}^i - \lambda_{c,l}^i| - \rho_{c,h}^i$ se $\lambda_{c,l}^i \notin \Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$. Então, para os $n+m$ autovalores é possível afirmar que (Zhai et al., 2015):

$$\begin{aligned} |z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i| &= \text{diag}\{|z_{c,h}^i - \lambda_{c,1}^i|, \dots, |z_{c,h}^i - \lambda_{c,n+m}^i|\} \\ |z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i| &\geq \min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i| \mathbf{I} \end{aligned} \quad (16)$$

Considerando-se que a equação de estados em (6) esteja submetida à presença de uma matriz de incertezas paramétricas aditiva/subtrativa, sendo assim a matriz de estados aumentada em malha fechada é reescrita como $\tilde{\Xi}_c^i = \Gamma_c^i + \Pi_c^i \mathbf{K}_c^i \pm \Delta_c^i$. Como a matriz $z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i = z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{V}_c^i)^{-1} \Lambda_c^i \mathbf{V}_c^i$, então devido à presença da matriz Δ_c^i , $z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i$ pode ser reescrita da seguinte forma:

$$z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i = z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{V}_c^i)^{-1} (\Xi_c^i) \mathbf{V}_c^i \pm (\mathbf{V}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{V}_c^i \quad (17)$$

Realizando-se a decomposição de Schur em (17), obtém-se que:

$$\begin{aligned} z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i &= [z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i] \{ \mathbf{I} \pm [z_{c,h}^i \mathbf{I} \\ &- (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i]^{-1} (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i \} \end{aligned} \quad (18)$$

e, aplicando a propriedade 1 do Lema 1 no termo $[z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i]^{-1} (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i$ em (18), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{c,h}^i &\left([z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i]^{-1} (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i \right) \\ &\leq \tilde{\rho}_{c,h}^i \left(|z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i|^{-1} |(\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i| \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Como $|z_{c,h}^i \mathbf{I} - \Lambda_c^i| = |z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i| \geq \min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i| \mathbf{I}$, então (19) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{c,h}^i & \left[|z_{c,h}^i \mathbf{I} - (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Xi_c^i \mathbf{T}_c^i|^{-1} |(\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i| \right] \\ & \leq \tilde{\rho}_{c,h}^i \left[(\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i| \mathbf{I})^{-1} |(\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i| \right] \\ & \leq \|(\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i| \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{T}_c^i)^{-1} \Delta_c^i \mathbf{T}_c^i\|_{\mathbf{F}} \\ & = (\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i|)^{-1} \|(\mathbf{T}_c^i)^{-1}\|_{\mathbf{F}} \|\Delta_c^i\|_{\mathbf{F}} \|\mathbf{T}_c^i\|_{\mathbf{F}} \end{aligned} \quad (20)$$

De acordo com a propriedade 2 do Lema 1, para que a matriz $z_{c,h}^i \mathbf{I} - \tilde{\Xi}_c^i$ seja não singular implica que:

$$(\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i|)^{-1} \|(\mathbf{T}_c^i)^{-1}\|_{\mathbf{F}} \|\Delta_c^i\|_{\mathbf{F}} \|\mathbf{T}_c^i\|_{\mathbf{F}} < 1 \quad (21)$$

tal que, após manipulações algébricas matriciais realizadas em (21) é possível chegar em:

$$\|\Delta_c^i\|_{\mathbf{F}} < J_{c,h}^i = \frac{\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i|}{\kappa_{\mathbf{F}}[\mathbf{T}_c^i]}, \quad (22)$$

A matriz $z_{c,h}^i \mathbf{I} - \tilde{\Xi}_c^i$ será não singular se $\|\Delta_c^i\|_{\mathbf{F}} < J_{c,h}^i$, em que $J_{c,h}^i$ é a medida de robustez obtida para a região circular $\Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$. Se $z_{c,h}^i \mathbf{I} - \tilde{\Xi}_c^i$ é não singular, então a condição apresentada em (15) é satisfeita, ou seja, $z_{c,h}^i \notin \bigcup_{j=1}^{n+m} \{\lambda_{c,j}^i(\tilde{\Xi}_c^i)\}$ com $z_{c,h}^i \in C_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$ e, consequentemente, todos os t autovalores estão alocados no interior da região circular $\Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$.

A metodologia de alocação regional robusta de autovalores proposta nesse trabalho tem como objetivo selecionar uma matriz de autovalores Λ_c^i com $\lambda_{c,j}^i \in \Omega_{c,h}^i(\rho_{c,h}^i, d_{c,h}^i, \beta_{c,h}^i)$ e a matriz de autovetores associados \mathbf{V}_c^i , tal que a medida de robustez descrita em (22) seja maximizada. Dessa forma, a matriz de ganhos aumentada de realimentação de estados \mathbf{K}_c^i é obtida tal que os autovalores em malha fechada tenham uma sensibilidade reduzida às variações paramétricas na matriz de estados em malha fechada. Com relação a um caso mais geral, para que todos os

$n+m$ autovalores permaneçam alocados no interior de suas respectivas regiões circulares, é necessário que a norma de Frobenius da matriz Δ_c^i seja inferior ao valor obtido para a região circular com menor medida de robustez $J_{c,h}^i$, $\min J_{c,h}^i$. Portanto, o funcional de custo descrito em (22) pode ser reescrito conforme a seguir:

$$\begin{cases} \|\Delta_c^i\|_{\mathbf{F}} < \text{Max}(\min J_{c,h}^i) \\ < \text{Max} \left[\min \left\{ \bigcup_{h=1}^s \frac{\min|\rho_{c,h}^i - g_{c,j}^i|}{\kappa_{\mathbf{F}}[\mathbf{T}_c^i]} \right\} \right] \\ \text{sujeito a : } \mathbf{T}_c^i \neq \mathbf{0}, \end{cases} \quad (23)$$

Para sintetizar a metodologia de controle proposta, a seguir são apresentados os principais passos para sua realização:

Etapa de Treinamento:

- **Passo 1:** Estimar os parâmetros do antecedente (Seção 3.1) e do consequente em batelada (Seção 3.2) para N_t amostras. Após isso, realizar o desacoplamento invertido *fuzzy*;
- **Passo 2:** Definir os parâmetros $\rho_{c,h}^i$, $d_{c,h}^i$ e $\beta_{c,h}^i$.

Etapa Evolutiva: para $k = N_t + 1, \dots$

- **Passo 3:** Segundo Zhai et al. (2015), definir a matriz Λ_c^i com $\lambda_{c,j}^i = L_{c,h}^i \cos(\theta) + \alpha_{c,h}^i$, em que $L_{c,h}^i = [0, \rho_{c,h}^i]$ e $\theta = [0, 2\pi]$.
- **Passo 4:** Obter a matriz $\bar{\mathbf{V}}_{c,j}^i$. Obter a matriz de autovetores \mathbf{V}_c^i . Obter \mathcal{P}_c^i . Obter $\mathbf{K}_c^i = (\mathbf{V}_c^i)^{-1}$. Obter \mathbf{Q}_c^i ;
- **Passo 5:** Otimizar o funcional de custo descrito em (23);
- **Passo 6:** Atualizar a estimativa dos parâmetros do antecedente (Seção 3.1) e do consequente (Seção 3.2). Após isso, realizar o desacoplamento invertido *fuzzy*.

6. RESULTADOS COMPUTACIONAIS

Com o intuito de avaliar o desempenho da metodologia de controle proposta, é realizado o controle de um sistema aéreo 2DOF. Esse sistema é conhecido como Quanser AERO¹, que é uma planta de laboratório de motor duplo totalmente integrado, projetado para pesquisa de controle avançado. O sistema aéreo 2DOF possui duas variáveis de entrada, que são a tensão aplicada no motor principal $u_\phi \in [-24 \text{ V}, 24 \text{ V}]$ e a tensão aplicada no motor de cauda $u_\vartheta \in [-15 \text{ V}, 15 \text{ V}]$; e duas variáveis de saída, que são o ângulo azimute $\phi \in [-360^\circ, 360^\circ]$ e o ângulo de elevação $\vartheta \in [-40^\circ, 40^\circ]$.

Para a identificação do modelo *fuzzy* T-S multivariável de treinamento, foi obtido um conjunto de dados experimentais contendo 650 amostras, coletadas com um período de amostragem igual a $T_a = 40$ ms. O algoritmo de agrupamento *fuzzy* evolutivo é realizado para o vetor de dados definido com $\mathbf{z}_k = [u_{\phi_{k-1}} \ u_{\vartheta_{k-1}} \ \phi_{k-1} \ \vartheta_{k-1}]^T$, tal que para a estimação paramétrica dos antecedentes e consequentes, foram definidos os seguintes valores paramétricos: $\zeta_{j,k}^i = 0, 1$, $\eta^i = 0, 09$, $\zeta = 0, 9$, $q = 1$, $\nu = 15$ e $\kappa = 30$. Na Figura 2, é mostrada a evolução do número de regras, no qual a linha tracejada em vermelho separa

¹ O Quanser AERO é fabricado pela Quanser Consulting Inc.

as etapas de treinamento (à esquerda da linha tracejada) e evolutiva (à direita da linha tracejada). Nota-se que ao fim da etapa de treinamento o número de regras *fuzzy* foi igual a $R = 2$. A seguir são apresentadas as NRGAs para os modelos multivariáveis locais lineares de treinamento pertencentes aos consequentes das duas regras *fuzzy*:

$$\Upsilon^1 = \begin{bmatrix} 0,4167 & 0,5833 \\ 0,5833 & 0,4167 \end{bmatrix} \quad \Upsilon^2 = \begin{bmatrix} 0,8934 & 0,1066 \\ 0,1066 & 0,8934 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

tal que para o consequente da primeira regra *fuzzy*, os pares de variáveis controladas e de controle selecionados em Υ^1 foram: $\phi - u_\vartheta$ e $\vartheta - u_\phi$; para o consequente da segunda regra, os pares selecionados em Υ^2 foram: $\phi - u_\phi$ e $\vartheta - u_\vartheta$. Após selecionados os pares, logo em seguida é realizado o desacoplamento invertido *fuzzy*. A matriz desacopladora $\hat{D}^i(z)$, para as etapas de treinamento e evolutiva, conforme proposto em Garrido et al. (2011), é dada por:

$$\hat{D}^i(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{d}_{d_{11}}^i(z)} & -\hat{d}_{o_{12}}^i(z) \\ -\hat{d}_{o_{21}}^i(z) & \frac{1}{\hat{d}_{d_{22}}^i(z)} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

cuja a definição dos elementos de $\hat{D}^i(z)$ pode ser vista na Seção 4.2.

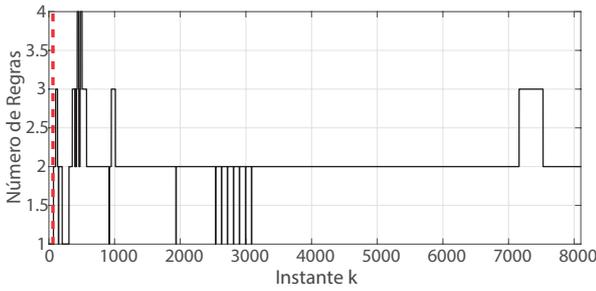


Figura 2. Evolução do número de regras *fuzzy*.

Devido à ordem da matriz Ξ_c^i ser igual a $n + m = 3$, no qual $n = 2$ é o número de valores singulares não nulos da matriz H_0^i , as alocações dos autovalores foram definidas arbitrariamente da seguinte forma: um autovalor real $\lambda_{c,1}^i \in \Omega_{c,1}^i(0,0088, 0,93, 0)$ com centro $\sigma_{c,1}^i = (0,9388, 0)$; um autovalor real $\lambda_{c,2}^i \in \Omega_{c,2}^i(0,0056, 0,9650, 0)$ com centro $\sigma_{c,2}^i = (0,9706, 0)$; um autovalor real $\lambda_{c,3}^i \in \Omega_{c,3}^i(0,0044, 0,9830, 0)$ com centro $\sigma_{c,3}^i = (0,9874, 0)$. Após realizada a parametrização das regiões circulares e realizado o desacoplamento invertido *fuzzy* para o modelo *fuzzy* T-S evolutivo multivariável de treinamento, é inicializada a etapa evolutiva da metodologia de controle proposta, realizada de forma descentralizada. A metodologia de controle proposta foi avaliada durante 8000 instantes, em que a cada instante foi inserida uma matriz de incertezas paramétricas aditiva Δ_c^i em (6) gerada através da distribuição normal. Através da otimização do funcional de custo (23), a cada instante, utilizando o algoritmo genético e os parâmetros definidos em Noronha and de Oliveira Serra (2019), foram obtidos os seguintes valores para as medidas de robustez $\text{Max}(\min J_{c,h}^i)$ com $c = 1, 2$, conforme mostrado na Figura 3. Após o fim da etapa evolutiva, o número de regras *fuzzy* foi igual a $R = 2$, conforme mostrado na Figura 2.

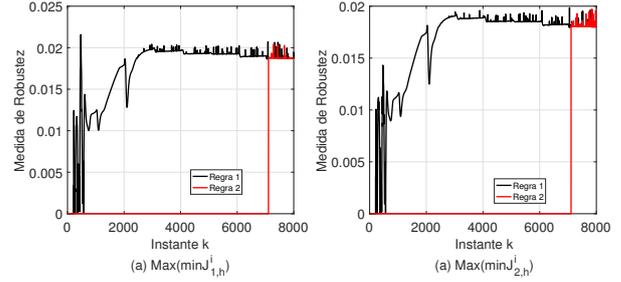


Figura 3. Medida de robustez $\text{Max}(\min J_{c,h}^i)$.

Para avaliar a robustez obtida para as regiões circulares e verificar se a condição de robustez apresentada em (23) é satisfeita, foram analisados os cenários quando $\|\Delta_c^i\|_F < \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$ e $\|\Delta_c^i\|_F > \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$. Nas Figuras 4 e 5, são mostrados os autovalores $\lambda_{c,1}^i$, $\lambda_{c,2}^i$ e $\lambda_{c,3}^i$ no plano complexo da matriz Ξ_c^i , respectivamente, para quando $\|\Delta_c^i\|_F < \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$ e $\|\Delta_c^i\|_F > \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$.

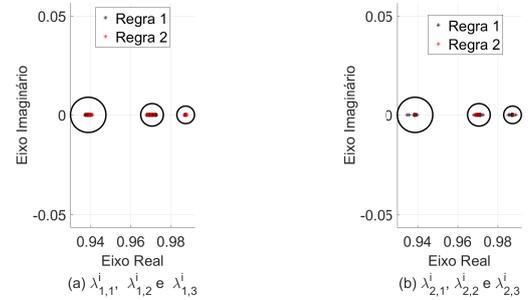


Figura 4. Autovalores para $\|\Delta_c^i\|_F < \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$.

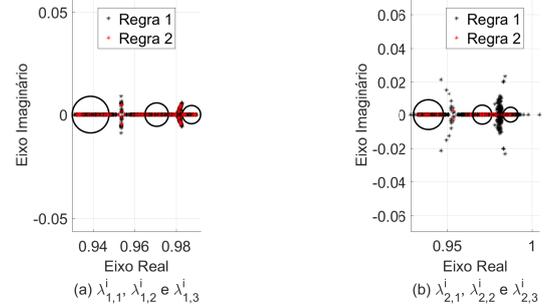


Figura 5. Autovalores para $\|\Delta_c^i\|_F > \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$.

Conforme proposto na Seção 5, para que o critério de controle multiobjetivo seja satisfeito para a i -ésima regra *fuzzy*, é necessário que as condições de otimalidade para o problema do LQRI sejam satisfeitas e os autovalores em malha fechada estejam alocados no interior de suas respectivas regiões circulares. Na Figura 5, é possível notar que quando $\|\Delta_c^i\|_F > \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$, a condição apresentada em (23) não foi satisfeita, ou seja, nem todos os $n + m$ autovalores estão alocados no interior de suas respectivas regiões circulares e, consequentemente, é possível afirmar que o critério de controle multiobjetivo para a i -ésima regra *fuzzy* não foi satisfeito. Sendo assim, mesmo que as condições de otimalidade para o problema do LQRI tenham sido satisfeitas para a i -ésima regra *fuzzy*, o critério de controle multiobjetivo não foi satisfeito. Nas Figuras 6 e 7 são

mostradas a evolução temporal das variáveis de controle e variáveis controladas, para $\|\Delta_c^i\|_F > \text{Max}(\min J_{c,h}^i)$. Nota-se que, embora os autovalores estejam dispersos no plano complexo, não foram obtidas grandes variações na evolução temporal das variáveis de controle e controladas devido aos autovalores estarem dispersos em uma pequena região no plano complexo. É importante citar que a realização da metodologia de controle proposta de forma descentralizada com desacoplamento de malhas possibilitou ao projeto de controle ser realizado de forma independente para cada malha de controle monovariável dominante, selecionada através da seleção de pares de variável de controle e variável controladas a cada instante.

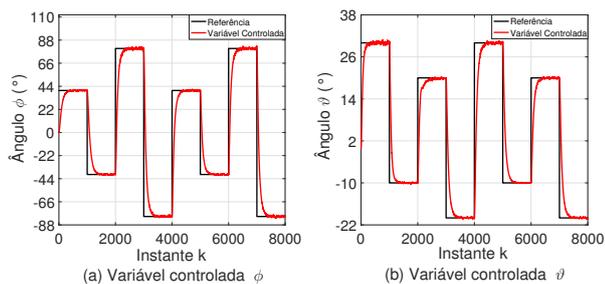


Figura 6. Variáveis controladas.

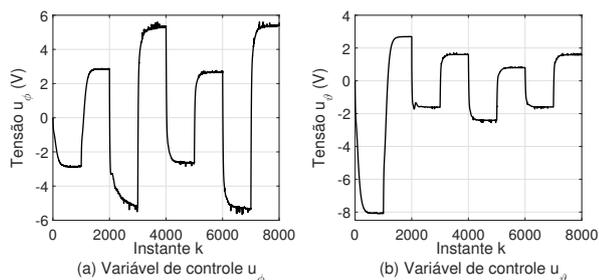


Figura 7. Variáveis de controle.

7. CONCLUSÃO

A metodologia de controle *fuzzy* T-S evolutivo proposta foi formulada para o problema do LQRI com alocação regional de autovalores realizada de forma descentralizada com desacoplamento de malhas, de tal forma que se a condição de robustez apresentada for satisfeita, o critério de controle multiobjetivo é satisfeito de forma flexível e robusta para a *i*-ésima regra *fuzzy*. Mesmo que sejam satisfeitas as condições de otimalidade para o problema do LQRI, se $\|\Delta_c^i\|_F$ for superior ao valor de $\text{Max}(\min J_{c,h}^i)$, o critério multiobjetivo não será satisfeito para a *i*-ésima regra *fuzzy*, conforme é possível notar nos resultados apresentados.

REFERÊNCIAS

Alexandridis, A. (1996). Optimal entire eigenstructure assignment of discrete-time linear systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 143(3), 301–304.

Angelov, P. (2010). Evolving takagi-sugeno fuzzy systems from streaming data (ets+). *Evolving Intelligent Systems: Methodology and Applications*, 21–50.

Chehardoli, H., Ghasemi, A., and Najafi, A. (2019). Centralized and decentralized distributed control of longitudinal vehicular platoons with non-uniform communication topology. *Asian Journal of Control*, 21(6), 2691–2699.

Chiu, M.S. and Arkun, Y. (1990). Decentralized control structure selection based on integrity considerations. *Industrial & engineering chemistry research*, 29(3), 369–373.

Dhyani, A., Panda, M.K., and Jha, B. (2020). Design of an evolving fuzzy-pid controller for optimal trajectory control of a 7-dof redundant manipulator with prioritized sub-tasks. *Expert Systems with Applications*, 162, 113021.

El Younsi, L., Benzaouia, A., and El Hajjaji, A. (2019). Decentralized control design for switching fuzzy large-scale systems by switched lyapunov function with h_∞ performance. *International Journal of Fuzzy Systems*, 21(4), 1104–1116.

Eltantawie, M. (2019). Decentralized neuro-fuzzy controllers of nonlinear quadruple tank system. *SN Applied Sciences*, 1(1), 1–9.

Garrido, J., Vázquez, F., and Morilla, F. (2011). An extended approach of inverted decoupling. *Journal of Process Control*, 21(1), 55–68.

He, M.J., Cai, W.J., Ni, W., and Xie, L.H. (2009). Rnga based control system configuration for multivariable processes. *Journal of Process control*, 19(6), 1036–1042.

Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2012). *Matrix analysis*. Cambridge University Press.

Kim, H.S., Park, J.B., and Joo, Y.H. (2017). Decentralized sampled-data tracking control of large-scale fuzzy systems: An exact discretization approach. *IEEE Access*, 5, 12668–12681.

Leite, D., Andonovski, G., Škrjanc, I., and Gomide, F. (2019). Optimal rule-based granular systems from data streams. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 28(3), 583–596.

Molinari, B. (1973). The stable regulator problem and its inverse. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5), 454–459.

Noronha, R.P. and de Oliveira Serra, G.L. (2019). Controle fuzzy evolutivo com alocação Ótima robusta de autoestruturas. In *Anais do 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente Inteligente, 2019*.

Rosenbrock, H.H. (1974). Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 20(2), 191–202.

Torres, L.M.M. and de Oliveira Serra, G.L. (2018). State-space recursive fuzzy modeling approach based on evolving data clustering. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 1–15.

Zhai, J., Gao, L., and Li, S. (2015). Robust pole assignment in a specified union region using harmony search algorithm. *Neurocomputing*, 155, 12–21.

Zhao, G. and Wang, D. (2021). Augmented tp model transformation-based parallel distributed compensation control design. *Asian Journal of Control*, 23(1), 315–330.