

# Controle Extremal para Mapeamentos Dinâmicos Multivariáveis usando Função de Monitoração e Busca Cíclica<sup>\*</sup>

Nerito Oliveira Aminde<sup>\*,\*\*</sup> Tiago Roux Oliveira<sup>\*\*\*</sup> Liu Hsu<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Departamento de Manutenção Industrial, Instituto Superior Dom Bosco, Maputo, Moçambique (e-mail: neritooliveira@yahoo.com.br)

<sup>\*\*</sup> Programa de Eng. Elétrica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, (e-mail: liu@coep.ufrj.br)

<sup>\*\*\*</sup> Departamento de Eng. Eletrônica e Telecomunicações, DETEL/UERJ, Rio de Janeiro, Brasil (e-mail: tiagoroux@uerj.br)

---

**Abstract:** Recently, a multivariable sliding-mode based extremum seeking controller via monitoring function was introduced for static maps. In this paper, a generalization is made, including linear dynamics with arbitrary relative degree. For this purpose, the techniques of time-scaling and singular perturbation are considered, preserving the previous results of stability and global convergence for a neighborhood of the desired extremum. Cyclic search allows the controller to search the directional extremum at each time, cyclically. Simulation results with a system of two inputs and a single output illustrate the properties of the proposed multivariable control strategy, in terms of speed of convergence and small residual errors.

**Resumo:** Recentemente, foi introduzido um controlador extremal multivariável por modos deslizantes e função de monitoração para mapeamentos estáticos. No presente artigo, faz-se uma generalização que inclui dinâmicas lineares com grau relativo arbitrário. Para tal, usam-se as técnicas de escalonamento temporal e perturbação singular, que preservam o resultado de estabilidade e convergência global para uma vizinhança do extremo desejado. A busca cíclica permite que o controlador encontre um extremo direcional por vez, ciclicamente. Resultados de simulação com um sistema de duas entradas e uma única saída ilustram as propriedades da estratégia de controle multivariável proposta, em termos de taxa de convergência e de erros residuais pequenos.

*Keywords:* Adaptive Control; Extremum Seeking Control; Multivariable Nonlinear Systems, Monitoring Function; Cyclic search direction

*Palavras-chaves:* Controle Adaptativo; Controle Extremal; Sistemas Não-lineares Multivariáveis; Função de Monitoração; Direção de busca cíclica.

---

## 1. INTRODUÇÃO

O controle por busca extremal ou simplesmente controle extremal é uma forma de controle adaptativo que determina e rastreia os parâmetros que otimizam, em tempo real, um mapeamento não-linear desconhecido.

Existem várias técnicas de controle extremal na literatura, sendo a técnica baseada em perturbação senoidal a mais popular (Ariyur and Krstić, 2002, 2003; Tan et al., 2006), que baseia-se numa pequena perturbação no parâmetro estimado, de modo a estimar o gradiente da função objetivo e assim encontrar o ponto ótimo. O método de Newton (Ghaffari et al., 2012), foi proposto para resolver o problema da taxa de convergência no método anterior depender da Hessiana da função objetivo.

No contexto de controle extremal por modos deslizantes, os trabalhos (Korovin and Utkin, 1974; Peixoto and Oliveira, 2012; Aminde et al., 2013) consideram o problema de otimização como um problema de rastreamento de trajetória, fazendo com que a função objetivo seja conduzida a um conjunto invariante, centrado no ponto ótimo.

Recentemente, foi proposta uma nova estratégia de controle extremal multivariável por modos deslizantes, na qual usa-se a função de busca periódica (busca cíclica), que reduz um sistema multivariável em uma sequência de funções escalares (Salamah and Özgüner, 2018). No entanto, os autores formularam hipóteses muito restritivas, com relação ao gradiente da função objetivo. Então, foi proposto o controle extremal multivariável por modos deslizantes usando função de monitoração e busca cíclica em (Aminde et al., 2020), onde foram relaxadas tais hipóteses além de garantir a convergência e estabilidade globais. Entretanto, os resultados foram alcançados para plantas com os mapeamentos estáticos.

---

<sup>\*</sup> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, CNPq, FAPERJ, ISDB-Maputo e a CINOP Global.

Neste artigo, são generalizados os resultados em (Aminde et al., 2020) para mapeamentos dinâmicos com grau relativo arbitrário, que por simplicidade, são considerados sistemas dinâmicos lineares estáveis em cascata com um mapeamento não-linear. A mitigação do grau relativo é alcançado através da técnica de escalonamento temporal.

O escalonamento temporal reduz a ordem do sistema dinâmico estável e permite a análise e projeto de controladores por busca extremal, independentemente da ordem ou grau relativo do modelo e o conhecimento exato de seus parâmetros (Oliveira et al., 2014).

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere o seguinte subsistema linear incerto de grau relativo arbitrário  $n^*$ :

$$\dot{v} = u, \quad (1)$$

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (2)$$

$$z = Cx \quad (3)$$

em cascata com o subsistema estático

$$y = h(z), \quad (4)$$

onde  $u \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $z \in \mathbb{R}^n$  é uma saída não mensurada do subsistema (1)-(3) e  $y \in \mathbb{R}$  é a saída mensurada do subsistema (4).

O integrador em (1) é usado para obter um sinal virtual de controle  $v \in \mathbb{R}^n$ , que aumenta o grau relativo do sistema (Levant, 2003), i.e.,  $n \geq n^* - 1$  em vez de  $n > n^*$ . O aumento do grau relativo faz com que o chaveamento em alta frequência fique retido apenas no sinal de controle  $u$ , enquanto que o controle virtual  $v$  que aciona a planta seja totalmente contínuo, o que permite atenuar o *chattering* (Utkin et al., 1999) no sistema em malha fechada.

As matrizes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são incertas, sendo o subsistema de ordem  $n$  e conseqüente grau relativo assumidos desconhecidos. De modo a garantir existência e unicidade de soluções, assume-se que o mapeamento não-linear incerto  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  a ser otimizado (maximizado ou minimizado) é localmente Lipschitz contínuo e suficientemente suave. Assume-se também que o instante inicial é  $t = 0$  s. Para cada solução de (1)-(4), existe um intervalo de tempo máximo de definição dado por  $[0, t_M)$ , onde  $t_M$  pode ser finito ou infinito.

### 2.1 Objetivo de Controle

Deseja-se encontrar uma lei de controle  $u$  por realimentação de saída que, sem perda de generalidade e a partir de quaisquer condições iniciais, o sistema é conduzido para alcançar o ponto extremo da função objetivo  $y = h(z)$  em (4) e permanecer o mais próximo possível do mesmo. Assume-se que a função objetivo tenha um único máximo  $y^* = h(z^*)$ . Esse problema pode ser formulado no contexto de controle extremal de um sistema de controle em que  $y$  é a saída da função objetivo e  $v$  é visto como sendo a saída de um integrador cuja entrada é dada por um vetor  $u$  de sinais de controle a serem projetados. O mesmo problema também pode ser reformulado como um problema de rastreamento de trajetória em que a direção de controle é desconhecida (Oliveira et al., 2012).

### 2.2 Análise por Perturbação Singular

Em (Aminde et al., 2020), foi projetado o controle extremal multivariável via modos deslizantes, função de monitoração e busca cíclica para problemas do tipo da seção anterior, mas para mapeamentos estáticos. Aqui pretende-se mostrar que os resultados obtidos em (Aminde et al., 2020) podem ser estendidos para mapeamentos dinâmicos.

Para garantir tal generalização, considere inicialmente o sistema de simples integrador com mapeamento estático não-linear

$$\dot{v} = u, \quad (5)$$

$$y = h(v), \quad (6)$$

que pode ser controlado efetivamente usando o controle extremal via função de monitoração.

Usando o método da perturbação singular (Kokotović et al., 1999), pode-se mostrar que o controle extremal via função de monitoração (Aminde et al., 2013) é robusto às dinâmicas não modeladas rápidas tal que o sistema perturbado (5)-(6) pode ser reescrito na *forma de bloco sensor* (Kokotović et al., 1999, p. 50):

$$\dot{v} = u, \quad (7)$$

$$\eta \dot{x} = Ax + Bv, \quad (8)$$

$$y = h(Cx), \quad (9)$$

satisfazendo a desigualdade

$$|y - y^*| \leq \mathcal{O}(\sqrt{\eta} + \mu^2), \quad (10)$$

onde  $\eta > 0$  e  $\mu > 0$  são constantes de projeto, suficientemente pequenas. A demonstração completa de (10) segue os mesmos passos apresentados em (Costa and Hsu, 1991, 1992), considerando  $y^*$  como um *setpoint*.

### 2.3 Escalonamento temporal para reprojeto de controlador

Usando um escalonamento temporal linear adequado (Oliveira et al., 2014)

$$\frac{dt}{d\tau} = \eta, \quad (11)$$

o sistema (7)-(9) pode ser reescrito como

$$v' = \eta u \quad (12)$$

$$x' = Ax + Bv, \quad (13)$$

$$z = Cx, \quad (14)$$

$$y = h(z), \quad (15)$$

onde  $v' := \frac{dv}{d\tau}$  e  $x' := \frac{dx}{d\tau}$ . Isto significa que  $\exists \eta^* > 0$  tal que o sinal de entrada  $u$  pode ser escalonado em (12) para controlar o sistema original (2)-(4) em uma diferente escala de tempo dilatada por  $t = \eta\tau$ ,  $\forall \eta \in (0, \eta^*]$ .

O significado físico é de que como o controle extremal baseado em função de monitoração proposto originalmente para sistemas de grau relativo um é robusto às dinâmicas não modeladas estáveis e rápidas à medida que  $(\eta \rightarrow 0)$ , então ele será adequado para controlar dinâmicas de grau relativo arbitrário, se este estiver corretamente escalonado. Conforme esperado, o preço a ser pago é que a rapidez de convergência desacelera quando  $\eta \rightarrow 0$ .

### 2.4 Principais Hipóteses

Com relação à planta controlada (1)-(4), ou equivalentemente (12)-(15), assumem-se as seguintes hipóteses:

**(H1)** (*Sobre as incertezas*): Todos os parâmetros incertos da planta pertencem a um conjunto compacto  $\Omega$ .

**(H2)** (*Diferenciabilidade de h*): A função  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é continuamente duplamente diferenciável em todo o  $\mathbb{R}^n$ .

**(H3)** (*Sobre o subsistema linear*): a matriz  $A$  em (2) deve ser Hurwitz.

**(H4)** (*Único máximo de h(z)*): Assume-se que existe  $z^* \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y^* = h(z^*)$  é o único máximo de  $h(z)$ , onde as matrizes do gradiente e da hessiana satisfazem, respectivamente:

$$\frac{\partial h}{\partial z} \Big|_{z=z^*} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \Big|_{z=z^*} < 0,$$

onde  $z \in \mathbb{R}^n$ .

**(H5)** (*h(x) é radialmente ilimitada*): Assume-se que a função  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é radialmente ilimitada em  $\mathbb{R}^n$ . Isto garante que se  $|y|$  for limitado então  $\|x\|$  deve ser limitado.

A hipótese H1 é básica e essencial em sistemas não lineares. As hipóteses H2, H3 e H5 são necessárias para garantir que não haja escape em tempo finito, no sistema em malha fechada, enquanto a hipótese H4 apresenta propriedades de máximo de uma função não linear, sendo imprescindível em problemas de otimização.

### 3. PROJETO DO CONTROLADOR VIA FUNÇÃO DE MONITORAÇÃO E BUSCA CÍCLICA

O esquema de controle extremal cíclico multivariável via função de monitoração está ilustrado na Figura 1, correspondente ao sistema (7)-(9), sem dinâmicas não modeladas ( $\eta = 0$ ). A lei de controle para plantas multivariáveis com ganho de alta frequência desconhecido e busca cíclica é definida conforme (Aminde et al., 2020):

$$u(t) = \begin{cases} u(t)^+ = -\rho(t)\sigma(t) \operatorname{sgn}(e(t)), & t \in T^+, \\ u(t)^- = \rho(t)\sigma(t) \operatorname{sgn}(e(t)), & t \in T^-, \end{cases} \quad (16)$$

onde  $\rho(t)$  é função de modulação e  $\sigma(t)$  a função de busca cíclica a serem definidas a seguir, responsável por escolher, periodicamente, a direção de busca, e os conjuntos  $T^+$  e  $T^-$  satisfazem  $T^+ \cap T^- = \emptyset$  e  $T^+ \cup T^- = [0, t_M]$ .

#### 3.1 Funcionamento da busca cíclica

A busca cíclica é projetada de modo que ocorra mudança de direção de busca, periodicamente. Seja  $\sigma(t)$  uma função periódica com período  $T_s$ , ou seja,  $\sigma(t + T_s) = \sigma(t)$ . Define-se um intervalo de tempo  $T = [\mathcal{T}_l, \mathcal{T}_u]$  de período  $T_s = \mathcal{T}_u - \mathcal{T}_l$  e seja o conjunto de instantes  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , onde  $\mathcal{T}_l = \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1} = \mathcal{T}_u$ , sendo  $\Delta\tau_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , os  $n$  sub-intervalos dentro de cada ciclo. Seja também a base ortogonal  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$  sendo  $a_i^T = [0 \dots 0, 1, 0 \dots 0]$ , com o elemento unitário na  $i$ -ésima posição do vetor (ver detalhe na Figura 1). Então, a direção de busca cíclica em (16) pode ser definida como segue:

$$\sigma(t) = a_i \quad \forall t \in \Delta\tau_i, \forall i = 1, \dots, n, \quad (17)$$

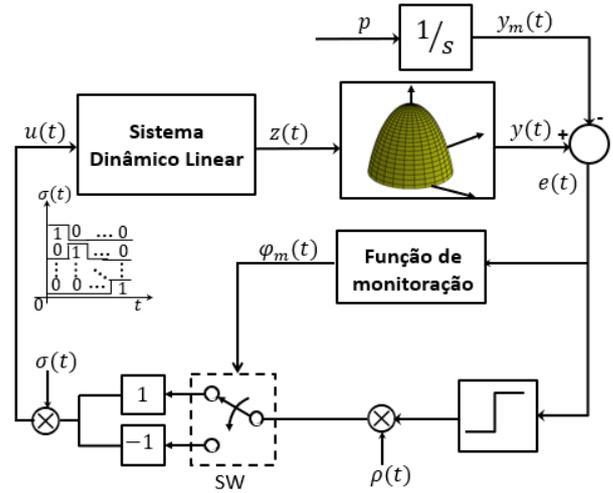


Figura 1. Esquema de controle extremal para sistemas dinâmicos lineares. A função de monitoração controla a direção de controle através da chave (SW).

Por simplicidade, escolhe-se a duração de cada sub-intervalo  $\Delta\tau_i$  igual a  $\frac{T_s}{n}, \forall i$ . Assim, durante esse intervalo, o controlador faz a busca nessa direção antes de chavear para outra direção (Salamah and Özgüner (2018)) no sub-intervalo seguinte, ou seja, o controlador cíclico multivariável funciona como um controlador escalar em cada sub-intervalo  $\Delta\tau_i$ . Dado o período  $T_s$ , para cada ciclo é atribuído um índice  $\kappa = 1, 2, \dots, \infty$ . Em qualquer ciclo  $\kappa$  e direção de busca  $i$ , indexados de  $\kappa_i$ , pode levar a um extremo direcional denotado  $y^*(\kappa_i) = h(x^*(\kappa_i))$ . Quando o sistema se aproxima ao máximo direcional ou global, perde-se a controlabilidade no sentido de que os ganhos do controlador são muito pequenos para garantir o rastreamento da saída em modos deslizantes. Assim, mais uma hipótese se faz necessária.

**(H6)** (*Regiões de baixa controlabilidade  $\mathcal{D}_\Delta$  e  $\mathcal{D}_{\Delta\kappa_i}$* ):

Sejam  $\mathcal{D}_\Delta := \{z : \|z - z^*\| < \Delta/2\}$  e, para o índice  $\kappa_i$ ,  $\mathcal{D}_{\Delta\kappa_i} := \{z : \|z_i(\kappa_i) - z_i^*(\kappa_i)\| < \Delta_{\kappa_i}/2, z_j(\kappa_i) = \text{constante}, j \neq i\}$ . Por simplicidade, ambas as regiões serão tratadas como  $\Delta$ -vizinhança.

Então, assumindo que existe uma função  $L_h(\cdot)$  classe  $\mathcal{K}$  tal que, para quaisquer constantes  $\Delta > 0$  e  $\Delta_{\kappa_i} > 0$ ,

$$L_h(\Delta) \leq \left\| \frac{\partial h}{\partial z} \right\|, \quad \forall z \notin \mathcal{D}_\Delta, \text{ e } L_h(\Delta_{\kappa_i}) \leq \left| \frac{\partial h}{\partial z_i} \right|, \quad \forall z_i \notin \mathcal{D}_{\Delta\kappa_i}.$$

Por continuidade, a hipótese (H2),  $L_h(\Delta)$  e  $L_h(\Delta_{\kappa_i})$  tendem para zero quando  $\Delta$  e  $\Delta_{\kappa_i}$  tendem para zero. Note que  $\Delta$  pode ser escolhido arbitrariamente pequeno desde que se permita que  $L_h$  seja suficientemente pequeno, devido à Hipótese (H2). Por simplicidade, escolhe-se  $\Delta = \Delta_{\kappa_i}$ .

Daqui em diante, vamos omitir o índice do ciclo de busca periódica  $\kappa$  para evitar confusão, supondo que a análise ocorre dentro de um ciclo genérico.

#### 3.2 O caso singular $\eta = 0$

Nesse caso, a equação diferencial (8) é substituída pela equação algébrica  $x = -A^{-1}Bv$  e, a partir de (7) e (9), a

primeira derivada da saída  $y$  em relação ao tempo é dada por

$$\dot{y} = \frac{\partial h^T}{\partial z} u \quad (18)$$

onde o ganho de alta frequência é dado pelo vetor gradiente, i.e.,

$$k_p(z) := [k_{p_1} \ \cdots \ k_{p_n}], \text{ e } k_{p_i}(z) := \frac{\partial h}{\partial z_i} CA^{-1}B. \quad (19)$$

Do mesmo modo que em (Oliveira et al., 2012), os sinais dos elementos  $k_{p_i} := \frac{\partial h}{\partial z_i}$  de  $k_p$ , podem ser vistos como as *direções de controle*. A hipótese (H6) permite considerar um sistema de controle não-linear com ganho de alta frequência dependente do estado, que muda de sinal em torno do ponto ótimo de modo contínuo.

A partir de (19) e hipótese (H6),  $k_p (\forall z \notin \mathcal{D}_\Delta)$ , e  $k_{p_i} (\forall z \notin \mathcal{D}_{\Delta, \kappa_i})$  satisfazem

$$0 < \underline{k}_p \leq \|k_p\|, |k_{p_i}|; \quad (20)$$

onde o limitante inferior  $\underline{k}_p \leq L_h|CA^{-1}B|$  é uma constante, considerando todas as incertezas admissíveis em  $h(\cdot)$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

O sinal do erro  $e(t)$  é definido como

$$e(t) = y(t) - y_m(t), \quad (21)$$

onde  $y_m(t)$  é uma rampa crescente em função do tempo, gerada através da seguinte trajetória de referência

$$\dot{y}_m(t) = p, \ y_m(0) = y(0), \quad (22)$$

onde  $p > 0$  é constante de projeto, para problema de maximização. Para evitar um sinal de referência ilimitado  $y_m(t)$  no controlador, pode-se saturá-lo por um limitante superior de  $y^*$  sem afetar o desempenho do controlador extremal.

A função de modulação  $\rho(t)$  será projetada de forma que  $y(t)$  possa rastrear o modelo de referência  $y_m(t)$ ,  $\forall t$ , até que o ponto extremo seja alcançado. Deste modo,  $y(t)$  é forçado a alcançar a vizinhança do máximo  $y^* = h(z^*)$  e permanecer próximo do valor ótimo, i.e., na vizinhança do vetor maximizador  $z^*$ . Em outras palavras, cada parâmetro  $z_i$  é forçado a alcançar a vizinhança de  $z_i^*$ . A partir de um certo tempo finito, obviamente a referência deixa de ser rastreada, pois  $h(z)$  fica limitado superiormente pelo seu valor máximo.

Conseqüentemente, o rastreamento será interrompido. Mas, a vizinhança do máximo já terá sido alcançada conforme desejado. A estratégia de controle proposta garante que  $y$  permanecerá próximo a  $y^*$ ,  $\forall t > t^*$ , conforme será mostrado mais adiante, no Teorema 1. A taxa de convergência de  $z$  para a região  $\mathcal{D}_\Delta$  definida em (H6) é dependente da função de modulação  $\rho(t)$ .

### 3.3 Limitante superior do erro para $\eta = 0$

De (12), (21) e (22), somando e subtraindo  $\lambda e$  à derivada de  $e$  (omitindo-se  $t$ ) tem-se:

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial z_i} u_i - p + \lambda e - \lambda e, \quad (23)$$

sendo para  $i$ -ésima direção de busca,

$$\dot{e} = -\lambda e + k_{p_i}(u_i + d_e), \quad (24)$$

onde  $\lambda > 0$  é uma constante apropriada de projeto e

$$d_e := (k_{p_i})^{-1} (-p + \lambda e). \quad (25)$$

Baseando-se no método da função de monitoração proposto em (Yan et al., 2003; Oliveira et al., 2010), pode-se reduzir a lei de controle (16) para a  $i$ -ésima direção de busca do sistema (7)–(9) em

$$u_i = -\rho U(t) \operatorname{sgn}(e), \quad (26)$$

sendo a função de modulação  $\rho$  dada por

$$\rho \geq d_e + \delta, \quad (27)$$

sendo  $U(t) = +1$  ou  $-1$ , conforme o sinal estimado de  $k_{p_i}$  no instante  $t$ , i.e., a chave SW na Figura 1 executa a troca de  $U(t)$  conforme o sinal de  $k_{p_i}$ .

Então, usando o Lema de Comparação (Filippov, 1964), tem-se que  $\forall t \geq \tau_1$ ,  $t \in \Delta\tau_1$ , enquanto  $|k_{p_i}| > L_h(\Delta)$ , a ser referida como condição de controlabilidade,

$$|e_i(t)| \leq \zeta_i(t), \quad \zeta_i(t) := |e_i(\tau_1)|e^{-\lambda(t-\tau_1)}, \quad (28)$$

### 3.4 Limitante superior do erro para $\eta \neq 0$

Para  $\eta \neq 0$  em (8), o escalonamento temporal em (11) permite que se considere a planta original (1)–(4), em uma diferente escala de tempo, controlada pelo controlador (16) devidamente escalonado por  $\eta u$  em (12). No sentido de incorporá-lo, a função de modulação deve ser reprojeta para satisfazer

$$\rho \geq \eta[|d_e| + \delta] \quad (29)$$

em vez de (27).

Analisando o método da perturbação singular apresentado na Seção 2.2, se (26) fosse usada novamente, um limitante superior para o erro de rastreamento  $e(t)$  poderia ser obtido diretamente, para  $\eta$  suficientemente pequeno, adicionando-se os termos de regime permanente e transitório em (10) e (28), respectivamente:

$$|e(t)| \leq \zeta(t), \quad \zeta(t) := |e(\tau_1)|e^{-\lambda(t-\tau_1)} + \pi_e + \mathcal{O}(\sqrt{\eta} + \mu^2), \quad (30)$$

sendo  $\pi_e$  um termo exponencial decrescente rápido relacionado aos efeitos da dinâmica estável não-modelada (8).

Ocorre que o  $\operatorname{sgn}(k_{p_i})$  é desconhecido, então não se pode implementar a lei de controle (26). Assim, a seguir apresenta-se o esquema de chaveamento baseado em função de monitoração, projetado para suprir a falta de conhecimento da direção de controle, fora da  $\Delta$ -vizinhança. Note que, o termo  $\pi_e$  pode ser desconsiderado no projeto da função de monitoração uma vez que ele apenas representa modos rápidos e estáveis pelos quais o controlador já provou ser robusto na Seção 2.2.

### 3.5 Projeto da função de monitoração

A função de monitoração foi introduzida e desenvolvida em (Yan et al., 2003; Oliveira et al., 2007, 2010) e pela primeira vez, foi aplicada ao problema de controle extremal escalar por modos deslizantes em (Aminde et al., 2013) e multivariável em (Aminde et al., 2020). Partindo-se do princípio de que a desigualdade (28) é garantida quando a direção de controle é correta, é natural usar  $\zeta_i$  como referência para se decidir quando o chaveamento de  $u_i$  em (16) ocorre de  $u_i^+$  para  $u_i^-$  (ou vice-versa), isto é, o chaveamento ocorre apenas quando (28) é violada.

Uma modificação simples em relação a  $\zeta_i$  é feita para garantir que a função de monitoração majore sempre o erro mesmo que inicialmente a direção de controle, dada por  $U$ , esteja errada.

Considere-se a seguinte função para a  $i$ -ésima direção de busca

$$\varphi_{k,i}(t) = |e_i(t_{k,i})|e^{-\lambda(t-t_{k,i})} + r, \quad k = 1, \dots, N_i \quad (31)$$

onde  $t_{1,i} = \tau_i$  (início de ciclo) e  $t_{k,i}$ , para  $k > 1$ , são os tempos de chaveamento de direção de controle,  $r > 0$  é constante arbitrariamente pequena da ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\eta} + \mu^2)$ .

Esses chaveamentos ocorrem quando o gráfico da função de monitoração encontra o módulo do erro e uma mudança de direção de controle é realizada. Múltiplos chaveamentos ocorrem quando se atinge a região de baixa controlabilidade, o que ocorre na vizinhança de um extremo direcional ou global, i.e., quando  $k_{p_i} \leq L_h$ . Perto de um ponto extremo, a perda de controlabilidade pode resultar em múltiplas ultrapassagens por esse extremo. Assim, possivelmente ocorrem mudanças de direção de controle que são detectadas pela função de monitoração definida a seguir,

$$\varphi_{mi}(t) := \varphi_{k,i}(t), \quad \forall t \in [t_{k,i}, t_{k+1,i}) \quad (32)$$

Note-se que de (31) e (32), tem-se  $|e_i(t)| < |\varphi_{k,i}(t)|$  em  $t = t_{k,i}$ , definido como o instante em que a função de monitoração  $\varphi_{mi}(t)$  encontra  $|e_i(t)|$ , isto é,

$$t_{k+1,i} := \begin{cases} \min\{t > t_{k,i} : |e_i(t)| = \varphi_{k,i}(t)\}, & \text{se existir,} \\ \tau_i + \frac{T_s}{n}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (33)$$

A seguinte desigualdade vem de (32),

$$|e(t)| \leq \varphi_m(t), \quad \forall t \in [0, t_M), \quad (34)$$

sendo  $\varphi_m(t)$  a função de monitoração formada pelo concatenamento sucessivo das funções exponenciais (31) resultantes do esquema de controle adotado, para cada sub-intervalo  $\Delta\tau_i$ , em cada ciclo de busca de período  $T_s$ . Nesta aplicação de controle extremal, o conjunto residual final do algoritmo proposto em torno do máximo  $y^*$  é dependente dos valores para os quais a função de monitoração converge. Conforme a definição em (31), o conjunto residual final será de ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\eta} + \mu^2)$ .

### 3.6 Escalonamento do Controlador

Considerando o sistema escalonado (12), o controlador (26) deve ser escalonado para ser aplicado à planta original (1)-(4). Para tal, a função de modulação deve satisfazer também a nova condição (29).

Por outro lado, sabe-se que a derivada da função objetivo não é nula fora da  $\Delta$ -vizinhança, para qualquer ciclo e direção de busca e, portanto, um limitante superior para o termo  $d_e$  em (25), que pode ser visto como uma perturbação, pode ser definido:

$$\bar{d}_e \geq |d_e|, \quad \bar{d}_e := L_h^{-1} (p + \lambda|e|). \quad (35)$$

A proposição a seguir apresenta uma possível escolha da função de modulação de modo que a desigualdade (29) seja satisfeita.

*Proposição 1.* Considere o sistema (1)-(4), direção de busca (17), trajetória de referência (22) e lei de controle

(26). Fora das regiões  $\mathcal{D}_\Delta$  e  $\mathcal{D}_{\Delta_i}$ , se a função de modulação  $\rho$  em (26) é projetada como

$$\rho := \frac{\eta}{L_h} [p + \lambda|e|] + \eta\delta, \quad (36)$$

satisfazendo (29), para  $\eta$  suficientemente pequeno, enquanto  $z \notin \mathcal{D}_{\Delta_i}$ , a partir da direção de controle inicial arbitrária, pode-se escolher  $\delta > 0$  suficientemente grande tal que (a) a direção de controle correta é encontrada no máximo em  $\tau_i + \epsilon$ , com  $\epsilon$  arbitrariamente pequeno e menor do que o sub-intervalo  $T_s/n$ , (b) a função objetivo ou cresce, ou permanece constante, salvo algumas oscilações em torno do máximo e (c) não há escape em tempo finito no sistema em malha fechada.

**Prova:** Considerando o argumento da perturbação singular e o escalonamento do tempo (11), que mostra que os sistemas (7)-(9) (12)-(15) são equivalentes para  $\eta$  suficientemente pequeno, então a demonstração para a planta original (1)-(4) segue os mesmos passos que os apresentados na prova em (Aminde et al., 2020, Proposição 1), para o caso de grau relativo um.  $\square$

*Observação 1.* Tendo em vista que o projeto é feito considerando uma escala de tempo lenta  $\eta t$ , é natural que os parâmetros da trajetória de referência  $p$  e da função de monitoração  $\lambda$  sejam reescalados apropriadamente, i.e.,  $\eta p$  e  $\eta \lambda$ , respectivamente.

### 3.7 Principal Resultado de Convergência

O Teorema 1 garante que o esquema de controle multivariável baseado na busca cíclica e função de monitoração atrai  $z$  à  $\Delta$ -vizinhança definida em (H6) do maximizador  $z^*$ . No entanto, não quer dizer que  $z(t)$  permanece em  $\mathcal{D}_\Delta$ ,  $\forall t$ . Porém, a amplitude das oscilações em torno de  $y^*$  pode ser feita da ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\eta} + \mu^2)$ .

*Teorema 1.* Considere o sistema (1)-(4), direção de busca (17), trajetória de referência (22), lei de controle (26) e função de modulação (36). Assume-se que (H1)-(H6) são válidas e  $T_s$  suficientemente grande. Então, as regiões  $\mathcal{D}_\Delta$  e  $\mathcal{D}_{\Delta_i}$  em (H6) (i) são globalmente atrativas sendo alcançadas em tempo finito e (ii) uma vez alcançadas, as oscilações em torno de  $y^*$  podem ser feitas da ordem  $\mathcal{O}(\sqrt{\eta} + \mu^2)$  escolhendo-se valores de  $\Delta$  suficientemente pequenos.

Assim como na prova de Proposição 1, a demonstração é baseada nos argumentos de perturbação singular e escalonamento de tempo e segue as etapas apresentadas na prova em (Aminde et al., 2020, Teorema 1), para  $\eta$  suficientemente pequeno.  $\square$

## 4. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Para exemplo, considere uma planta cuja função objetivo seja desconhecida, em cascata com um sistema dinâmico linear descrito por

$$\dot{v} = u, \quad (37)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v, \quad (38)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x, \quad (39)$$

e função de saída

$$y = h(z) = 5 - (z_1^2 + z_2^2 - 2\epsilon z_1 z_2) \quad (40)$$

A função estática (40) consiste da representação particular de funções do tipo

$$y = h(z) = y^* + \frac{1}{2}(z - z^*)^T H(z - z^*) \quad (41)$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2\epsilon \\ 2\epsilon & 2 \end{bmatrix} < 0$$

é a matriz Hessiana negativa definida.

É fácil notar que os parâmetros ótimos da função objetivo (40) são  $z^* = (0, 0)$  e  $y^* = 5$ , para  $0 < \epsilon < 1$ , condição para que  $h(x)$  tenha ponto de máximo.

Um segundo cenário de simulação considera o seguinte sistema para a mesma função objetivo (40):

$$\dot{v} = u, \quad (42)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -40 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} v, \quad (43)$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x. \quad (44)$$

As simulações foram realizadas considerando os seguintes parâmetros do sistema de controle,  $p = 5$ ,  $k_{pmin} = 5$ ,  $\lambda = 20$ ,  $\delta = 0.1$ , resultando em  $\rho = 5$ . Demais parâmetros:  $\epsilon = 0.1$ ,  $r = 0.1$ ,  $T_s = 1s$ . A Figura 2 ilustra a função objetivo e as trajetórias convergentes para o extremo  $y^* = 5$ , partindo de três condições iniciais,  $z_0 = (-2, 2)$  (preto),  $z_0 = (2, -2)$  (azul) e  $z_0 = (-1.5, -1.5)$  (verde). Esta função pode representar um mapeamento de otimização de potência de uma turbina eólica, onde o vetor  $x$  representaria o torque e ângulo pitch (Creaby et al., 2009). As variáveis de entrada  $z$  e saída  $y$  considerando o primeiro cenário, i.e., sistema (38)-(39), convergindo para seus valores ótimos são ilustrados na Figura 3.

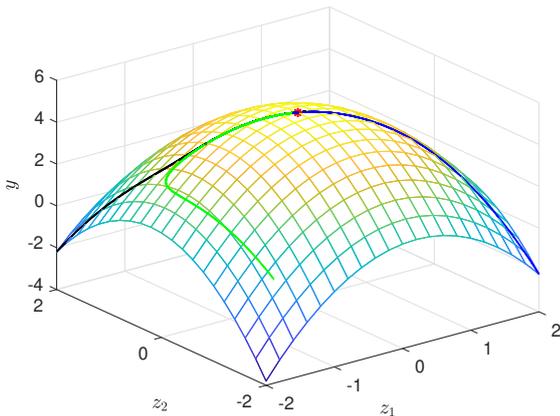


Figura 2. A função objetivo  $y = h(z)$  e o rastreamento do ponto ótimo partindo de três condições iniciais.

Os controles  $u_1$  e  $u_2$  e a função de busca cíclica  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são apresentados na Figura 4, ainda na escala  $t = \tau$ . Note que o período de busca é de 1s e, portanto, 0.5s em cada direção de busca.

No segundo cenário, considera-se a escala de tempo  $t = \eta\tau$ , com  $\eta = 0.01$ . Conforme salientado na Observação 1, os

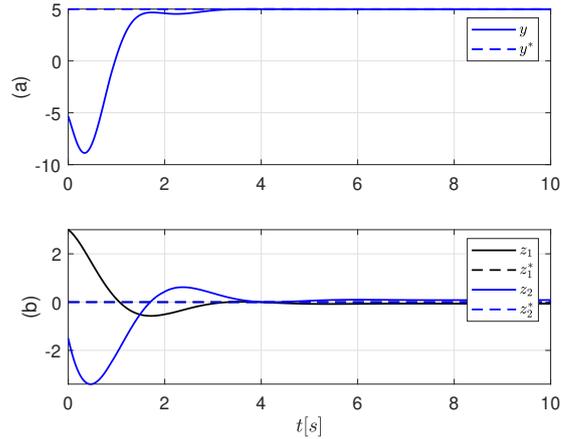


Figura 3. A convergência das variáveis  $z$  e  $y$  para seus pontos ótimos,  $z^* = (0, 0)$  e  $y^* = 5$ , partindo da condição inicial  $(3, -1.5)$ , na escala de tempo  $t = \tau$ .

parâmetros  $p$ ,  $\lambda$ ,  $\rho$  e o período de busca  $T_s$  devem ser escalonados apropriadamente, i.e., multiplicados por  $\eta$ . A Figura 5 ilustra a convergência dos sinais  $z$  e  $y$  para seus pontos ótimos. Note que após um transitório, aproximadamente 50s, entra em modo deslizante até perder o controle após o sistema entrar na região  $\mathcal{D}_\Delta$ , ou seja, após chegar nos pontos ótimos,  $z^* = (0, 0)$  e, conseqüentemente,  $y^* = 5$ . Por fim, a Figura 6 ilustra a função de monitoração majorando e monitorando a norma do erro de rastreamento. Após 300 s, nota-se que a referência foi saturada em 10, tendo erro igual a 5. No destaque, é possível ver os saltos  $r = 0.1$ , a cada mudança da direção de controle.

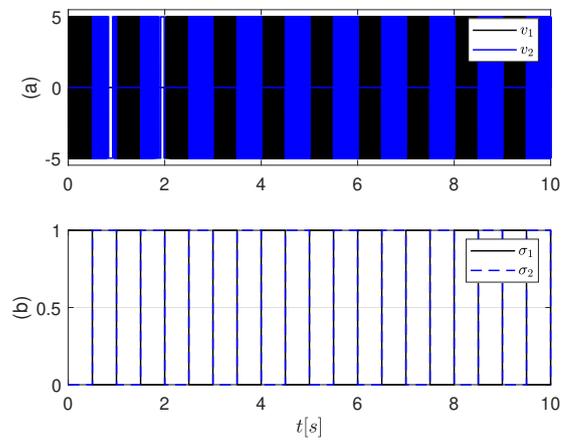


Figura 4. Sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  e a função de busca cíclica  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , com período de busca de 1s.

## 5. CONCLUSÕES

Neste artigo foi proposto um controlador por busca extremal a estrutura variável para mapeamentos dinâmicos, com grau relativo arbitrário, usando função de monitoração, escalonamento temporal e busca cíclica. Essa estratégia garante estabilidade e convergência globais para uma pequena vizinhança do extremo ótimo da função objetivo. Simulações mostram a aplicabilidade do escalonamento temporal em problemas de otimização, que traz consigo

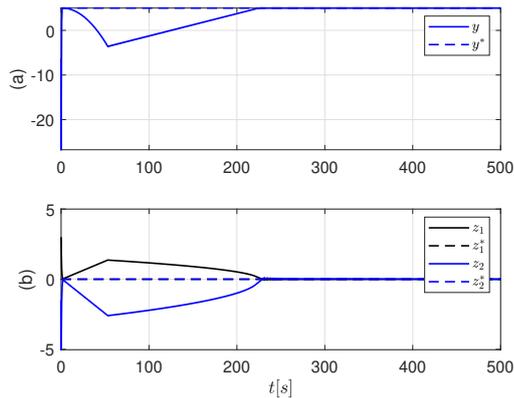


Figura 5. A convergência dos sinais  $z$  e  $y$  para seus pontos ótimos,  $z^* = (0, 0)$  e  $y^* = 5$ , partindo da condição inicial  $(3, -1.5)$  na escala de tempo  $t = \eta\tau$ .

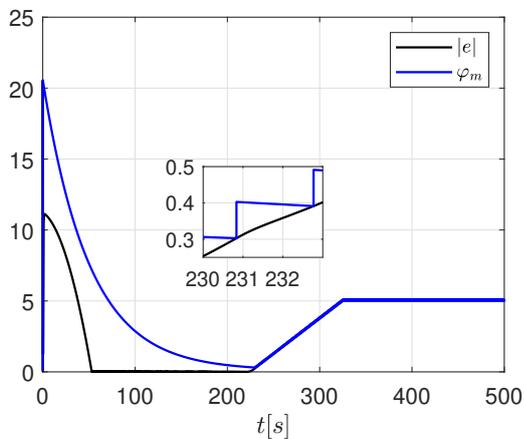


Figura 6. As curvas da função de monitoração, majorando e monitorando o módulo do erro continuamente.

a desvantagem do retardo no tempo de resposta. Uma estratégia em vista para a compensação grau relativo sem comprometer o tempo de resposta é a aplicação de diferenciadores baseados em modos deslizantes de ordem superior (HOSM) (Oliveira et al., 2019).

## REFERÊNCIAS

Aminde, N.O., Oliveira, T.R., and Hsu, L. (2013). Global output-feedback extremum seeking control via monitoring functions. In *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 1031–1036. Florence, Italy.

Aminde, N.O., Oliveira, T.R., and Hsu, L. (2020). Multivariable extremum seeking control via cyclic search and monitoring function. *Int J Adapt Control Signal Process*, 1–16. doi:https://doi.org/10.1002/acs.3151.

Ariyur, K.B. and Krstić, M. (2002). Analysis and design of multivariable extremum seeking. *American Control Conference*, 2903 – 2908.

Ariyur, K.B. and Krstić, M. (2003). *Real-Time Optimization by Extremum-Seeking Control*. John Wiley & Sons.

Costa, R.R. and Hsu, L. (1991). Unmodeled dynamics in adaptive control systems revisited. *Systems & Control Letters*, 16, 341–348.

Costa, R.R. and Hsu, L. (1992). Robustness of vs-mrac with respect to unmodeled dynamics and external

disturbances. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 6, 19–33.

Creaby, J., Li, Y., and Seem, J.E. (2009). Maximizing wind turbine energy capture using multivariable extremum seeking control. *Wind Engineering*.

Filippov, A.F. (1964). Differential equations with discontinuous right-hand side. *American Math. Soc. Translations*, 42(2), 199–231.

Ghaffari, A., Krstic, M., and Nesic, D. (2012). Multivariable newton-based extremum seeking. *Automatica*, 1759–1767.

Kokotović, P., Khalil, H.K., and O’Reilly, J. (1999). *Singular perturbation methods in control: analysis and design*. SIAM, New York, 2 edition.

Korovin, S.K. and Utkin, V.I. (1974). Using sliding modes in static optimization and nonlinear programming. *Automatica*, 10(5), 525–532.

Levant, A. (2003). Comparison of extremum seeking control algorithms for robotic application: higher-order sliding modes, differentiation and output feedback controls. *Int. J. Contr*, 76, 924–941.

Oliveira, T.R., Aminde, N.O., and Hsu, L. (2014). Monitoring function based extremum seeking control for uncertain relative degrees with light source seeking experiments. *53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 3456–3462.

Oliveira, T.R., Peixoto, A.J., and Hsu, L. (2010). Sliding mode control of uncertain multivariable nonlinear systems with unknown control direction via switching and monitoring function. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 55(4), 1028–1034.

Oliveira, T.R., Peixoto, A.J., and Hsu, L. (2012). Global real-time optimization by output-feedback extremum-seeking control with sliding modes. *Journal of Franklin Institute*, 349, 1397–1415.

Oliveira, T.R., Peixoto, A.J., Nunes, E.V.L., and Hsu, L. (2007). Control of uncertain nonlinear systems with arbitrary relative degree and unknown control direction using sliding modes. *Int. J. Adapt. Control Signal Process*, 21, 692–707.

Oliveira, T.R., Rodrigues, V.H.P., and Fridman, L. (2019). Generalized model reference adaptive control by means of global hosm differentiators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(5), 2053–2060. doi:10.1109/TAC.2018.2862466.

Peixoto, A.J. and Oliveira, T.R. (2012). Extremum seeking control via sliding mode and periodic switching function applied to raman optical amplifiers. *American Control Conference*, 5377–5382.

Salamah, Y.B. and Özgüner, U. (2018). Sliding mode multivariable extremum seeking control with application to wind farm power optimization. *American Control Conference (ACC)*, 5321 – 5326.

Tan, Y., Nesić, D., and Mareels, I.M.Y. (2006). On non-local stability properties of extremum seeking control. *Automatica*, 42(6), 889–903.

Utkin, V., Guldner, J., and Shi, J. (1999). *Sliding mode control in electromechanical systems*. Taylor & Francis Ltd.

Yan, L., Hsu, L., Costa, R.R., and Lizarralde, F. (2003). Variable structure model reference adaptive control for systems with unknown high frequency gain. *Conference on Decision and Control*.