Relaxações LMIs para as Desigualdades de Lyapunov-Metzler no Problema de Estabilização de Sistemas Chaveados a Tempo Discreto ⋆

Andressa M. Souza, Ricardo C. L. F. Oliveira, Pedro L. D. Peres

Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP
Av. Albert Einstein, 400, 13083-852, Campinas, SP, Brasil
(e-mail: {andressa,ricfow,peres}@dt.fee.unicamp.br)

Abstract: This paper proposes a state-feedback stabilization strategy for discrete-time switched linear systems, where the switching rule and the feedback gains are designed simultaneously. The synthesis conditions are based on Lyapunov-Metzler (LM) inequalities and, contrarily to the LM or convex combination based strategies from the literature that use exhaustive search on the scalar parameters, relaxations on the stability conditions and an iterative procedure based on linear matrix inequalities are proposed to search for the scalar parameters and the matrices that solve the LM inequalities. Numerical experiments illustrate the better results obtained with the proposed approach when confronted with convex combination or LM based techniques (at the price of increasing the computational costs), being also competitive when compared with periodic switching approaches.

Resumo: Este artigo propõe uma estratégia de estabilização de sistemas lineares chaveados a tempo discreto por realimentação de estados, em que a regra de chaveamento e os ganhos de realimentação são projetados simultaneamente. As condições de síntese são baseadas em desigualdades de Lyapunov-Metzler (LM) e, contrariamente às estratégias baseadas em LM ou em combinações convexas da literatura que utilizam busca exaustiva nos parâmetros escalares, propõem-se relaxações nas condições de estabilidade e um procedimento iterativo baseado em desigualdades matriciais lineares para buscar os parâmetros escalares e as matrizes que resolvem as desigualdades de LM. Experimentos numéricos ilustram os melhores resultados da abordagem proposta quando confrontados com técnicas baseadas em LM ou em combinações convexas (às custas de um aumento do custo computacional), sendo também competitivos quando comparados com abordagens de chaveamento periódico.

Keywords: Switched linear systems; State feedback; Linear matrix inequalities; Lyapunov-Metzler inequalities; Discrete-time systems.

Palavras-chaves: Sistemas lineares chaveados; Realimentação de estados; Desigualdades matriciais lineares; Desigualdades de Lyapunov-Metzler; Sistemas a tempo discreto.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas chaveados constituem uma classe de sistemas híbridos caracterizados pela interação entre diferentes comportamentos dinâmicos. Esta classe é frequentemente representada por um conjunto finito de subsistemas e uma regra de chaveamento que é responsável por ativar um subsistema por vez em cada instante de tempo (Liberzon, 2003; Sun and Ge, 2005). Diversos fenômenos do mundo real podem ser modelados como sistemas chaveados, como, por exemplo, dinâmicas envolvendo a abertura e fechamento de chaves ou válvulas, além de problemas clássicos da engenharia, em áreas tais como eletrônica de potência, engenharia aeroespacial e controle por rede (Cardim et al., 2009; Kemer et al., 2019; Zong et al., 2021). Um requisito elementar no contexto de sistemas chaveados é assegurar a estabilidade do sistema frente aos chaveamentos, sendo que, de modo geral, a estabilidade (instabilidade) dos modos não garante que o sistema seja estável (instável). A regra de chaveamento pode ser arbitrária, em geral, associada a sinais exógenos ou parâmetros variantes no tempo (Daafouz et al., 2002; Lin and Antsaklis, 2005; Lee and Dullerud, 2006), ou controlada, tipicamente sendo computada em função dos estados do sistema (Wicks et al., 1994; Deaecto and Geromel, 2018; Feron, 1996; Geromel and Colaneri, 2006; Deaecto et al., 2015; Zhai, 2001).

Desde meados da década de 1990, a área de sistemas chaveados vem atraindo a atenção dos pesquisadores, como pode ser comprovado pelos artigos (Wicks et al., 1994; Liberzon and Morse, 1999; DeCarlo et al., 2000; Hespanha and Morse, 2002) e livros (Liberzon, 2003; Sun and Ge, 2005). A grande maioria destes resultados utiliza a teoria de estabilidade de Lyapunov, seja em tempo con-

⋆ O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, CNPq e Projeto Stic-Amsud/CAPES NetConHybSDP, code 22-STIC-09.

tínuo ou discreto, para tratar da análise de estabilidade e projeto de leis de chaveamento estabilizantes. Apesar da literatura fornecer condições para provar a estabilidade e construir leis de chaveamento, como as baseadas em múltiplas funções de Lyapunov (Hu et al., 2008; Liberzon, 1999; Wicks and DeCarlo, 1997; Pettersson, 2003; Zhang et al., 2009), desigualdades de Lyapunov-Metzler (Geromel and Colaneri, 2006; Duan and Wu, 2014; Deaecto et al., 2015; Deaecto and Geromel, 2017; Fiacchini et al., 2016) e combinação convexa estável de matrizes (Wicks et al., 1994; Pettersson and Lennartson, 2001; Zhai, 2001; Souza et al., 2022), na maior parte dos casos as soluções são formuladas em termos de condições na forma de desigualdades matriciais bilineares (em inglês, *bilinear matrix inequalities — BMIs*), que são problemas não convexos de otimização. No contexto de sistemas chaveados a tempo discreto, é importante mencionar as técnicas de estabilização periódica (Fiacchini et al., 2016) e por continuação periódica (Deaecto and Geromel, 2018), que podem ser formuladas em termos de LMIs.

Particularmente em relação às técnicas baseadas na estabilização quadrática, destacam-se os métodos que projetam a lei de chaveamento buscando uma combinação convexa estável das matrizes dinâmicas do sistema chaveado (Zhai, 2001). No trabalho de Souza et al. (2022) foi proposta uma técnica diferente de linearização das BMIs resultantes dessa abordagem, com vantagens em relação aos métodos que utilizam um *grid* para tratar os produtos entre parâmetros escalares e matrizes do problema. Neste trabalho é proposto um novo algoritmo de estabilização, potencialmente menos conservador do que o algoritmo de Souza et al. (2022) por considerar múltiplas funções de Lyapunov. Em particular, propõe-se um novo procedimento iterativo baseado em LMIs para calcular soluções estabilizantes por realimentação de estados utilizando as chamadas desigualdades de Lyapunov-Metzler (Geromel and Colaneri, 2006), sem a necessidade de recorrer a procedimentos de busca de escalares ou até mesmo a aplicações de *grids* no espaço das variáveis escalares de otimização. Além disso, diferente da técnica de Souza et al. (2022), a abordagem proposta é mais promissora para ser estendida a outros problemas de chaveamento que envolvam, por exemplo, realimentação dinâmica de saída e critérios de desempenho, além de também poder tratar sistemas chaveados a tempo contínuo. Exemplos numéricos comprovam a eficácia do método proposto e o bom desempenho quando comparado com outras estratégias similares disponíveis na literatura.

Notação: A letra N é utilizada para denotar o número de modos de um sistema chaveado, e $\mathbb{N}$ é definido como o conjunto formado pelos inteiros positivos até N, isto é, $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$. $M \in \mathbb{R}^{n\times m}$ indica que M é uma matriz real de dimensão $n \times m$, e a matriz transposta de M é simbolizada por M'. $\text{He}(M) = M + M'$ e $M \succ 0$ denota uma matriz definida positiva. O símbolo $\star$ representa um bloco induzido por simetria em uma matriz quadrada, e $\otimes$ indica o produto de Kronecker. I_n representa a matriz identidade de dimensão n, 0 a matriz nula de dimensão apropriada (em algumas situações as dimensões podem ser explicitadas) e $\mathbb{1}_N$ um vetor coluna de 1's com N componentes. O simplex unitário de dimensão r é definido por

$$\Lambda_r \triangleq \big\{\zeta \in \mathbb{R}^r : \sum_{\ell=1}^{r} \zeta_\ell = 1,\, \zeta_\ell \geq 0\big\}$$

2. PRELIMINARES

Considere o sistema linear chaveado a tempo discreto

$$\mathcal{G}_\sigma:\ x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) \tag{1}$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o estado, $u \in \mathbb{R}^m$ é a entrada de controle e σ é uma regra de comutação a ser projetada que seleciona, para cada instante de tempo um subsistema $\mathcal{G}_\sigma$, $\sigma = i \in \mathbb{N}$. As matrizes A_i e B_i possuem dimensões apropriadas e estão associadas aos subsistemas $i \in \mathbb{N}$.

O objetivo é projetar simultaneamente a regra de chaveamento σ e um conjunto de ganhos de realimentação de estados associados à lei de controle

$$u(k) = K_{\sigma(k)}x(k), \quad \forall\sigma(k) \in \mathbb{N}$$

tal que o sistema em malha fechada

$$x(k+1) = \big(A_i + B_iK_i\big)x(k) \tag{2}$$

seja globalmente assintoticamente estável.

Diferentes abordagens disponíveis na literatura tratam da análise de estabilidade (e por extensão, da estabilizabilidade) do sistema (2). Por exemplo, as técnicas baseadas no cálculo de uma combinação convexa estável de matrizes (Zhai, 2001; Souza et al., 2022), associada à existência de uma função quadrática de Lyapunov. As desigualdades de Lyapunov-Metzler, propostas em Geromel and Colaneri (2006), surgem como uma alternativa menos conservadora por considerarem múltiplas funções quadráticas de Lyapunov, como mostra o lema a seguir.

Lema *1.* Se existirem matrizes $0 \prec P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $K_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e vetores $m_i \in \Lambda_N$, $\forall i \in \mathbb{N}$, tais que

$$\Big(A_i + B_iK_i\Big)'\left(\sum_{j=1}^{N} m_{ij}P_j\right)\Big(A_i + B_iK_i\Big) - P_i \prec 0 \tag{3}$$

$\forall i \in \mathbb{N}$, então a regra de chaveamento

$$\sigma(k) = \arg\min_{i\in\mathbb{N}} x(k)'P_ix(k) \tag{4}$$

torna a origem do sistema (2) globalmente assintoticamente estável.

Prova: A prova do Lema 1 pode ser encontrada em Geromel and Colaneri (2006). □

Claramente, a condição do Lema 1 é uma BMI por conta do produto entre os escalares m_{ij} e as matrizes K_i e P_i, $\forall i \in \mathbb{N}$. Adotando mudanças de variável e restrições sobre os elementos m_{ij}, as desigualdades do Lema 1 podem ser convertidas em LMIs com uma busca sobre um parâmetro escalar, conforme descrito em Geromel and Colaneri (2006).

Neste artigo é proposto um procedimento de linearização alternativo, que não impõe nenhuma restrição sobre os escalares m_{ij}. Por meio do uso do Lema de Finsler, é realizado o desacoplamento do produto entre os escalares m_{ij} e as matrizes K_i e P_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ e uma condição BMI equivalente a (3) é obtida. Essa condição BMI pode ser abordada por meio de relaxações associadas a um algoritmo iterativo baseado em LMIs, resultando em condições potencialmente menos conservadoras, além de viabilizar o tratamento de sistemas com um número maior de modos N, que torna-se rapidamente proibitivo à aplicação de *grids*. Na seção seguinte são fornecidas condições para o cômputo de uma regra de chaveamento σ e os ganhos de realimentação K_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ estabilizantes baseadas nessa nova estratégia.

3. CONTROLE CHAVEADO POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

O Teorema 2 propõe condições de síntese de controle chaveado por realimentação de estados com a regra de chaveamento σ e os ganhos de realimentação K_i, $\forall i \in \mathbb{N}$ projetados simultaneamente.

Teorema 2. Sejam $\mathcal{Y}_i \in \mathbb{R}^{(nN+n)\times(2nN+3n)}$, $\forall i \in \mathbb{N}$, matrizes dadas. Se existirem matrizes $0 \prec P_i = P_i' \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{X}_i \in \mathbb{R}^{(2nN+3n)\times(nN+n)}$, $K_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, e vetores $m_i \in \Lambda_N$, $\forall i \in \mathbb{N}$, tais que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & \star \\ \mathcal{G}_i & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{He}(\mathcal{X}_\mathrm{i}\mathcal{Y}_\mathrm{i}) \prec 0, \forall \mathrm{i} \in \mathbb{N} \tag{5}$$

com

$$\mathcal{Q}_i = \begin{bmatrix} 0 & \star & \star \\ \mathcal{P}' & 0 & \star \\ 0 & 0 & -P_i \end{bmatrix}, \mathcal{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{bmatrix}, \mathcal{Y}_i = [Y_{1i} \ Y_{2i} \ Y_{3i}],$$

$$\mathcal{G}_i = \begin{bmatrix} -I & \mathcal{M}_i & 0 \\ 0 & -I & A_{cl_i} \end{bmatrix}, \mathcal{M}_i = (1/2)\begin{bmatrix} m_{i1}I \\ \vdots \\ m_{iN}I \end{bmatrix},$$

e $A_{cl_i} = A_i + B_iK_i$, então a regra de chaveamento (4) torna a origem do sistema (2) globalmente assintoticamente estável.

Prova: Multiplicando (5) à direita por $\mathcal{Y}_i^\perp$ e à esquerda por $\mathcal{Y}_i^{\perp\prime}$, com

$$\mathcal{Y}_i^\perp = [I \ \mathcal{H}_i]'$$

obtém-se

$$\mathcal{Q}_i + \mathrm{He}(\mathcal{H}_\mathrm{i}\mathcal{G}_\mathrm{i}) \prec 0 \tag{6}$$

com

$$\mathcal{H}_i = \begin{bmatrix} -(Y_{3i})^{-1}Y_{1i})' \\ -(Y_{3i})^{-1}Y_{2i})' \end{bmatrix}$$

Multiplicando (6) à direita por $\mathcal{G}_i^\perp$ e à esquerda por $\mathcal{G}_i^{\perp\prime}$, com

$$\mathcal{G}_i^\perp = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_iA_{cl_i} \\ A_{cl_i} \\ I \end{bmatrix}$$

obtém-se (3), $\forall i \in \mathbb{N}$. Portanto, a regra de chaveamento dada em (4) estabiliza globalmente o sistema (2). □

Uma característica interessante do Teorema 2 é que as condições são formuladas em termos de LMIs, com as matrizes dinâmicas do sistema A_{cl_i} (e consequentemente os ganhos de realimentação K_i, $\forall i \in \mathbb{N}$) encontrando-se de forma afim na condição. Essa propriedade facilita a imposição de um limitante nas entradas dos ganhos K_i, que apesar de não prevenir a saturação dos atuadores, pode ser útil do ponto de vista prático,

$$K_i = [k_{i_{j\ell}}] \in \mathbb{R}^{m\times n}, \ \ |k_{i_{j\ell}}| \le \psi$$

em que $k_{i_{j\ell}}$ representa a j-ésima linha e ℓ-ésima coluna do ganho K_i e $\psi \ge 0$ é um escalar[1] dado.

Entretanto, no Teorema 2 nota-se a necessidade de uma inicialização conveniente da matriz $\mathcal{Y}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ de forma a produzir soluções factíveis. O Teorema 3 apresenta uma proposta para as escolhas de $\mathcal{Y}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, introduzindo uma relaxação ρ com a substituição das matrizes dinâmicas A_{cl_i}, por

$$\bar{A}_{cl_i} = \rho A_i + B_i\bar{K}_i \tag{7}$$

em que $\bar{K}_i = \rho K_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Teorema 3. As escolhas

$$\mathcal{Y}_i = \begin{bmatrix} I_{(nN+n)} & 0_{(nN+n)\times n} & -I_{(nN+n)} \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{8}$$

garantem que as condições do Teorema 2, testadas com A_{cl_i} substituídas por $\bar{A}_{cl_i}$ dadas em (7), sempre fornecem uma solução factível para um valor de $\rho > 0$ suficientemente pequeno.

Prova: Adotando as matrizes $\mathcal{Y}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ dadas em (8) e fixando $\mathcal{X}_i = (-1/2)\mathcal{Y}_i'$ na desigualdade (5), obtém-se

$$\begin{bmatrix} -I & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{P}' & -I & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & -P_i & \star & \star \\ 0 & \mathcal{M}_i & 0 & -I & \star \\ 0 & 0 & \rho A_{cl_i} & 0 & -I \end{bmatrix} \prec 0$$

Adotando $P_i = dI$, $d > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, $m_{ii} = 1$, $m_{ij} = 0$, $\forall i \ne j$, para ρ suficientemente pequeno, e aplicando o complemento de Schur tem-se

$$\begin{bmatrix} -I & \star & \star \\ (dI \otimes \mathbb{1}_N)' & -(3/4)I & \star \\ 0 & 0 & -dI \end{bmatrix} \prec 0$$

Aplicando novamente o complemento de Schur obtém-se

$$\begin{bmatrix} -(3/4)I + Nd^2I & 0 \\ 0 & -dI \end{bmatrix} \prec 0$$

que sempre é verificada para $0 < d < \sqrt{3/(4N)}$. □

Diante da relaxação ρ e da mudança de variável adotada em (7), as seguintes restrições devem ser resolvidas conjuntamente com as condições do Teorema 2

$$-\rho\psi \le \bar{k}_{i_{j\ell}} \le \rho\psi, \quad \forall i \in \mathbb{N} \tag{9}$$

Note que a inicialização proposta pelo Teorema 3 garante soluções factíveis para o Teorema 2 perante um valor positivo e suficientemente pequeno de ρ. Contudo, o objetivo é calcular soluções com $\rho \ge 1$. Para isto, o valor de ρ é maximizado durante o teste das condições do Teorema 2. Além disso, ao utilizar as matrizes soluções $\mathcal{X}_i$ para inicializar as matrizes $\mathcal{Y}_i$ em um novo teste, o novo valor de ρ obtido é maior ou igual ao anterior. Tal propriedade é assegurada pela estrutura da condição (5), como mostra o próximo teorema.

Teorema 4. Sejam $\bar{\rho}$, $\bar{A}_{cl_i}$, $0 \prec \bar{P}_i = \bar{P}_i'$, $\bar{m}_i \in \Lambda_N$ e $\bar{\mathcal{X}}_i$ soluções do Teorema 2, para uma dada matriz inicial $\bar{\mathcal{Y}}_i$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$. As escolhas $\mathcal{Y}_i = \bar{\mathcal{X}}_i'$, $\forall i \in \mathbb{N}$ em um novo teste das condições do Teorema 2 garantem uma solução factível com $\rho \ge \bar{\rho}$.

[1] Diferentes valores de ψ para cada entrada da matriz de ganho podem ser considerados.

ISSN: 2175-8905 / 2177-6164

DOI: 10.20906/SBAI-SBSE-2023/3989

Prova: Adotando $\mathcal{Y}_i = \bar{\mathcal{X}}_i'$, $\forall i \in \mathbb{N}$ em um novo teste das condições do Teorema 2, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q}_i & \star \\ \mathcal{G}_i & 0 \end{bmatrix} + \mathrm{He}(\mathcal{X}_\mathrm{i}\bar{\mathcal{X}}_\mathrm{i}') \prec 0, \quad \forall \mathrm{i} \in \mathbb{N}$$

que certamente é factível para $\rho \geq \bar{\rho}$ com as escolhas $A_{cl_i} = \bar{A}_{cl_i}$, $P_i = \bar{P}_i$, $m_{ij} = \bar{m}_{ij}$, $\mathcal{X}_i = \bar{\mathcal{Y}}_i{}'$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$. $\square$

O Algoritmo 1 resume e estrutura as discussões que foram exibidas nesta seção. O código entre as linhas 10 e 15 foi introduzido como uma estratégia para acelerar a convergência. A lógica desse teste é baseada no fato de que o valor de ρ calculado na linha 5 é apenas um limitante inferior para o máximo valor admissível (depende da escolha feita para $\mathcal{Y}_i$). Contudo, como nesse ponto existem uma matriz M e um conjunto de ganhos K_i calculados, é possível testar as desigualdades de Lyapunov-Metzler em (3) sem a variável de relaxação ρ. Caso uma solução factível seja encontrada, então o algoritmo pode ser encerrado pois o sistema foi estabilizado. O preço a ser pago por esse procedimento é resolver uma LMI adicional (condição (3)), o que ocasiona um aumento no esforço computacional.

Algoritmo 1 Estabilização por realimentação de estados

1: **Inicialização:** it_{max}, ϵ, ψ, $k \leftarrow 0$,
2: $\mathcal{Y}_i \leftarrow [I\ 0\ {-I}]$, $A_{cl_i} \leftarrow \rho A_i + B_i\bar{K}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$
3: **Enquanto** $k < it_{max}$ **Faça**
4: $\quad k \leftarrow k+1$;
5: $\quad$ **maximize** ρ_k **s. a** (9) e (5)
6: $\quad$ **Se** $\rho_k \geq 1$ **Então**
7: $\quad\quad$ **Retorna** (P_i, $\rho_k^{-1}\bar{K}_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$);
8: $\quad$ **Fim Se**
9: $\quad \mathcal{Y}_i \leftarrow \mathcal{X}_i'$, $\forall i \in \mathbb{N}$;
10: $\quad \bar{m}_{ij} \leftarrow m_{ij}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$;
11: $\quad \tilde{A}_{cl_i} \leftarrow A_i + B_i(\rho_k^{-1}\bar{K}_i)$, $\forall i \in \mathbb{N}$;
12: $\quad$ **resolva** (3) com $\bar{M}$ e $\tilde{A}_{cl_i}$;
13: $\quad$ **Se** factível **Então**
14: $\quad\quad$ **Retorna** (P_i, $\rho_k^{-1}K_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$);
15: $\quad$ **Fim Se**
16: $\quad$ **Se** $|\rho_k - \rho_{k-1}| < \epsilon$ **Então**
17: $\quad\quad$ abandone;
18: $\quad$ **Fim Se**
19: **Fim Enquanto**

4. EXEMPLOS

Nos exemplos apresentados a seguir, o Algoritmo 1 foi testado com $it_{max} = 25$, $\epsilon = 10^{-4}$, as condições foram implementadas com o *parser* YALMIP (Löfberg, 2004), e as LMIs resultantes foram solucionadas com o resolvedor de programação semidefinida Mosek (Andersen and Andersen, 2000). Os experimentos foram simulados em um PC com a seguinte configuração: Core i7-12700×20 (12-th Gen), 15.3 GB de RAM, MATLAB Versão: 9.10.0.1710957 (R2021a) 64 *bits*, Ubuntu 20.04.6 (64 *bits*), Mosek 10.0.

Exemplo 1: Considere o sistema chaveado (1) proposto em Benallouch and Schutz (2012) com A_i e B_i, $i = 1,2,3,4$ dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0{,}7786 & 0{,}9908 & 0{,}1270 \\ 0{,}1616 & 0{,}8443 & 0{,}8144 \\ 0{,}9214 & 0{,}9747 & 0{,}7825 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0{,}2458 & 0{,}7409 \\ 0{,}2501 & 0{,}5257 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}3894 & 0{,}3263 & 0{,}7746 \\ 0{,}7806 & 0{,}9886 & 0{,}1297 \\ 0{,}8814 & 0{,}4718 & 0{,}3110 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0{,}2722 & 0{,}6055 \\ 0{,}1576 & 0{,}1580 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0{,}3049 & 0{,}4247 & 0{,}8979 \\ 0{,}8448 & 0{,}2485 & 0{,}6921 \\ 0{,}7558 & 0{,}9160 & 0{,}3636 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0{,}4945 & 0{,}3020 \\ 0{,}9237 & 0{,}9118 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0{,}1194 & 0{,}3964 & 0{,}2454 \\ 0{,}1034 & 0{,}2515 & 0{,}4983 \\ 0{,}6981 & 0{,}8655 & 0{,}2403 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0{,}9894 & 0{,}7205 \\ 0{,}1709 & 0{,}1519 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No intuito de comparar o método proposto com as técnicas de estabilização baseadas em combinação convexa de matrizes (Teorema 2 de Souza et al. (2022) (SOP-T2)) e as desigualdades da Lyapunov-Metzler (Teorema 4 de Geromel and Colaneri (2006) (GC-T4)), é considerado, inicialmente, apenas o projeto de uma regra de chaveamento globalmente estabilizante ($K_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$). Para comparar a acurácia dos métodos, a matriz dinâmica A_i foi substituída por $A_i = \varphi A_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, e os métodos foram aplicados para encontrar o maior valor de φ na faixa [0,01, 10] (quanto maior for o valor encontrado, menos conservador é o método). A busca pelo parâmetro escalar γ da condição GC-T4 foi implementada com a discretização da faixa $\gamma \in [0,\ 1)$ em 25 pontos igualmente espaçados (equiparando-se a $it_{max} = 25$ do método proposto).

Os resultados reportados na Tabela 1 mostram que o Algoritmo 1 consegue estabilizar o sistema modificado com valor de φ acima dos reportados por SOP-T2 e GC-T4 ($\gamma = 0{,}24$) porém demandando um maior esforço computacional, em que o número médio de iterações e o tempo médio por iteração são dados por it_{medio} e t_{medio} (s), respectivamente.

Tabela 1. Resultados do Algoritmo 1 (A1), Teorema 2 (SOP-T2) e Teorema 4 (GC-T4), propostos em Souza et al. (2022) e Geromel and Colaneri (2006), para o Exemplo 1.

	φ_{max}	it_{medio}	t_{medio} (s)
A1	0,89	5,00	1,15
SOP-T2	0,74	2,60	0,19
GC-T4	0,51	2,50	0,03

Em seguida, é realizada uma comparação com as estratégias de controle por realimentação de estados do Teorema 2 (SOP-T2) e Corolário 3.3 (D-C3.3) propostas em Souza et al. (2022) e Deaecto (2010), respectivamente.

Em todas as abordagens, a restrição de magnitude nos ganhos é considerada, e como em Deaecto (2010) os ganhos são dados por $K_i = Y_i S_i^{-1}$, as matrizes $S_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ foram restritas a matrizes diagonais, sendo s_{i_j} o j-ésimo elemento da diagonal, e as seguintes limitações dos ganhos foram implementadas

$$-s_{i_\ell}\psi \leq y_{i_{j,\ell}} \leq s_{i_\ell}\psi$$

em que $y_{i_{j,\ell}}$ representa a j-ésima linha e ℓ-ésima coluna das matrizes $Y_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

O sistema novamente é alterado, desta vez com $B_i = \eta B_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$, sendo o critério de comparação o menor valor do parâmetro $\eta \in [0{,}01,\ 10]$ que estabiliza o sistema modificado. Os resultados da Tabela 2 apontam que o Algoritmo 1 consegue estabilizar o sistema com valores de η inferiores aos reportados em SOP-T2 e D-C3.3 ($\gamma = 0$, para os casos $\psi = 1$ e $\psi = 10$), novamente demandando maior esforço computacional, em que o número médio de iterações e o tempo médio por iteração são dados por it_{medio} e t_{medio} (s), respectivamente.

Tabela 2. Resultados do Algoritmo 1 (A1), Teorema 2 (SOP-T2) e Corolário 3.3 (D-C3.3), propostos em Souza et al. (2022) e Deaecto (2010), respectivamente, para o Exemplo 1.

	ψ	η_{min}	it_{medio}	t_{medio} (s)
A1		0,01	3,50	0,77
SOP-T2	0,1	1,66	4,89	0,32
D-C3.3			infactível	
A1		0,01	3,64	0,91
SOP-T2	1	0,17	2,69	0,20
D-C3.3		1,67	1,00	0,02
A1		0,01	1,29	0,27
SOP-T2	10	0,02	2,17	0,14
D-C3.3		0,17	1,00	0,02

Os resultados demonstram que embora o efeito das matrizes B_i, $\forall i \in \mathbb{N}$, seja mínimo ($\eta_{min} = 0{,}01$), e as entradas dos ganhos de controle limitadas ($\psi = 10$), a técnica proposta se mostrou eficiente, com soluções que superam tanto os métodos de estabilização baseados em combinação convexa estável quanto em desigualdades Lyapunov-Metzler com outra abordagem de linearização.

Exemplo 2: Considere a estabilização simultânea de três pêndulos invertidos proposta em Al-Areqi et al. (2012), sendo cada modelo linearizado $\mathrm{P}\textsc{i}_i$, $i = 1, 2, 3$ dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_i(t) \\ \ddot{\phi}_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{(m_i + M_i)g}{M_i l_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_i(t) \\ \dot{\phi}_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{-1}{M_i l_i} \end{bmatrix} F_i$$

em que ϕ_i é o ângulo do pêndulo, F_i é a força que atua sobre o carrinho e $g = 9{,}81$ m/s^2 é a aceleração gravitacional. Cada pêndulo possui valor de massa $m_i = 0{,}3$ Kg, o carrinho associado $M_i = 0{,}1$ Kg, e os valores dos comprimentos para os pêndulos $\mathrm{P}\textsc{i}_1$, $\mathrm{P}\textsc{i}_2$ e $\mathrm{P}\textsc{i}_3$ são respectivamente $l_{1/2/3} = 0{,}1336/0{,}242/0{,}545\, m$, o que leva a diferentes frequências naturais $\omega_{1/2/3} = 12/9/6$ s^{-1}. As matrizes do modelo discretizado com o tempo de amostragem $\tau = 0{,}1$ segundos são dadas por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1{,}0017 & 0{,}0250 \\ 0{,}1335 & 1{,}0017 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0{,}0230 \\ -1{,}8393 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1{,}0030 & 0{,}0250 \\ 0{,}2376 & 1{,}0030 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0129 \\ -1{,}0341 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1{,}0067 & 0{,}0251 \\ 0{,}5358 & 1{,}0067 \end{bmatrix}, B_3 \begin{bmatrix} -0.0057 \\ -0.4597 \end{bmatrix}$$

Os resultados obtidos com a abordagem proposta em comparação com os métodos de Geromel and Colaneri (2006) e Deaecto (2010) são apresentados nas Tabelas 3 e 4, respectivamente, utilizando análise similar à do Exemplo 1.

Exemplo 3: Este experimento tem como objetivo realizar uma avaliação mais abrangente em termos de precisão e esforço computacional de uma comparação entre o Algoritmo 1 (A1), o Teorema 2 (SOP-T2) de Souza et al. (2022) e o Teorema 4 (GC-T4) de Geromel and Colaneri (2006). Para isso foi criado um conjunto de sistemas que certamente podem ser estabilizados pela estabilização quadrática utilizando a condição dada em Zhai (2001). Para as dimensões $n \in \{2, \ldots, 5\}$ e $N \in \{2, \ldots, 5\}$, foram gerados

Tabela 3. Resultados do Algoritmo 1 (A1), Teorema 2 (SOP-T2) e Teorema 4 (GC-T4), propostos em Souza et al. (2022) e Geromel and Colaneri (2006), para o Exemplo 2.

	φ_{max}	it_{medio}	t_{medio} (s)
A1	0,79	4,17	0,21
SOP-T2	0,74	2,50	0,04
GC-T4	0,68	1,00	0,01

Tabela 4. Resultados do Algoritmo 1 (A1), Teorema 2 (SOP-T2) e Corolário 3.3 (D-C3.3), propostos em Souza et al. (2022) e Deaecto (2010), para o Exemplo 2.

	ψ	η_{min}	it_{medio}	t_{medio} (s)
A1		0,57	1,50	0,06
SOP-T2	0,1	1,07	3,00	0,05
D-C3.3		3,16	1,00	0,01
A1		0,06	1,22	0,05
SOP-T2	1	0,10	2,00	0,03
D-C3.3		0,31	1,00	0,01
A1		0,02	1,00	0,04
SOP-T2	10	0,02	1,60	0,03
D-C3.3		0,04	1,00	0,01

50 sistemas que possuem todos os modos instáveis mas que garantidamente são estabilizáveis por chaveamento puro ($K_i = 0$). A melhoria promovida pela estratégia de aceleração da convergência (linhas 10–15 de A1) pode ser avaliada pelo desempenho do algoritmo sem essas linhas, referido por A1*.

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos em termos do número de sistemas estabilizados (E) e o tempo computacional demandado (em minutos). Como pode ser visto, GC-T4 oferece bons resultados apenas para sistemas com dois modos. SOP-T2 não tem uma queda tão acentuada quanto GC-T4 à medida que N cresce, mas a perda de desempenho é bem maior quando comparada com A1. Contudo, claramente A1 demanda o maior esforço computacional. Finalmente, comparando A1 e A1*, é nítida a vantagem propiciada pela técnica de aceleração da convergência, que aumenta em 27,63% a eficácia e diminui o tempo computacional em aproximadamente 3 minutos.

Com o intuito de enriquecer as informações oferecidas pelo experimento, a técnica proposta é comparada com outras abordagens de controle chaveado para sistemas discretos. A primeira abordagem, apresentada em (Fiacchini et al., 2016) (FGJ), consiste na determinação de uma regra de chaveamento (parametrizada em termos de um inteiro positivo κ) que depende do valor dos estados e de um caminho de transição (tamanho κ) entre os modos do sistema. A segunda técnica é proposta em (Deaecto and Geromel, 2018) (DG) e se baseia em uma continuação periódica parametrizada por uma matriz de Lyapunov dependente de κ instantes de tempo, podendo também computar ganhos de realimentação de estados. Ambas as técnicas podem ser formuladas em termos de LMIs e são aplicadas na mesma base de sistemas. A Tabela 6 apresenta o total de sistemas estabilizados por cada uma dessas técnicas, juntamente com os tempos computacionais associados. O aumento de κ permite que as técnicas FGJ e DG estabilizem um número maior de sistemas do que A1 ($\kappa = 4$). Nesse contexto a técnica FGJ, embora não seja a mais acurada, demandou

Tabela 5. Número de sistemas estabilizados (E) e tempo computacional (t, em minutos) do Algoritmo 1 com (A1) e sem (A1*) as linhas 10–15 habilitadas, Teorema 2 (SOP-T2) (Souza et al., 2022) e (Geromel and Colaneri, 2006, Teorema 4) (GC-T4), em uma base de sistemas garantidamente estabilizáveis por Zhai (2001).

n	N	SOP-T2		GC-T4		A1*		A1	
		E	t	E	t	E	t	E	t
2	2	41	0.6	37	4.0	40	0.6	40	0.8
2	3	27	0.7	1	15.6	41	1.5	47	1.7
2	4	10	0.8	0	16.5	29	2.6	38	4.0
2	5	4	0.9	0	17.4	18	4.6	39	7.2
3	2	40	0.6	40	3.3	34	0.8	39	1.0
3	3	29	0.8	1	16.0	35	2.2	46	1.9
3	4	20	1.0	0	16.7	29	4.9	46	4.8
3	5	12	1.1	0	17.7	20	8.4	42	9.2
4	2	43	0.7	41	3.1	37	1.1	41	1.5
4	3	31	0.8	0	16.2	30	3.9	48	3.0
4	4	17	1.2	0	17.2	19	9.1	43	8.1
4	5	14	1.6	0	17.5	17	24.3	45	18.8
5	2	40	0.8	35	5.0	36	2.1	46	2.5
5	3	31	1.1	3	15.5	30	7.6	49	4.7
5	4	18	1.8	0	17.4	15	23.6	41	18.6
5	5	18	2.9	0	18.0	14	61.0	44	48.4
Total		**49.4%**	17.38	**19.8%**	217.13	**55.5%**	158.48	**86.7%**	136.01

o menor esforço computacional entre os métodos testados. Por outro lado, uma desvantagem das técnicas DG e FGJ é a característica exponencial do crescimento do número de variáveis em FGJ, e do número de subproblemas a serem resolvidos em DG conforme κ aumenta, enquanto as abordagens baseadas em LM exibem crescimento polinomial com as dimensões do sistema. Além disso, as abordagens com base em LM podem ser estendidas de maneira direta para tratar sistemas em tempo contínuo, enquanto FGJ e DG são restritas a sistemas chaveados a tempo discreto.

Tabela 6. Resultados obtidos pelo Algoritmo 1 (A1) e as técnicas de (Fiacchini et al., 2016) (FGJ) e (Deaecto and Geromel, 2018) parametrizadas em termos de κ na base de dados investigada no Exemplo 3. O tempo computacional t é dado em minutos.

	$\kappa = 1$	t	$\kappa = 2$	t	$\kappa = 3$	t	$\kappa = 4$	t
FGJ	39.8%	2.76	67.3%	3.06	82.2%	4.71	88.7%	21.14
DG	0.00%	6.40	70.6%	21.19	83.7%	59.42	93.6%	160.00
A1				86.7%, 136.01				

5. CONCLUSÃO

Este artigo apresentou uma abordagem alternativa para estabilização de sistemas lineares chaveados a tempo discreto baseada nas desigualdades de Lyapunov-Metzler, sem a necessidade de aplicar *grids* nem restrições de estrutura sobre a matriz que contém os escalares da condição. Os ganhos de realimentação e a regra de chaveamento são projetados simultaneamente por meio de um procedimento iterativo no qual, a cada iteração, são resolvidas LMIs. Experimentos numéricos comprovam a eficácia do método proposto, com resultados vantajosos em termos de precisão quando comparado com outras técnicas similares. Como extensões deste trabalho, podem ser investigados os projetos de controle com critérios de desempenho baseados nas normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, e do tratamento da realimentação de saída.

REFERÊNCIAS

Al-Areqi, S., Görges, D., and Liu, S. (2012). Robust feedback control and scheduling of networked embedded control systems. In *Proc. IFAC Conf. Anal. Design Hybrid Syst. (ADHS 12)*, 127–132. Eindhoven, The Netherlands.

Andersen, E.D. and Andersen, K.D. (2000). The MOSEK interior point optimizer for linear programming: An implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang (eds.), *High Performance Optimization*, volume 33 of *Applied Optimization*, 197–232. Springer US. `http://www.mosek.com`.

Benallouch, M. and Schutz, G. (2012). Robust $\mathcal{H}_\infty$ model predictive control for discrete-time switched linear systems. *IFAC Proc. Vol.*, 45(17), 424–429. Proc. 4th IFAC Nonlinear Model Predictive Control Conf. (NMPC12).

Cardim, R., Teixeira, M.C.M., Assunção, E., and Covacic, M.R. (2009). Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC–DC power converter. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, 56(9), 3505–3513.

Daafouz, J., Riedinger, P., and Iung, C. (2002). Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 47(11), 1883–1887.

Deaecto, G.S. (2010). *Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação.* Ph.D. thesis, FEEC — Universidade Estadual de Campinas.

Deaecto, G.S. and Geromel, J.C. (2017). Stability analysis and control design of discrete-time switched affine systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 62(8), 4058–4065.

Deaecto, G.S. and Geromel, J.C. (2018). Stability and performance of discrete-time switched linear systems. *Syst. Control Lett.*, 118, 1–7.

Deaecto, G.S., Souza, M., and Geromel, J.C. (2015). Discrete-time switched linear systems state feedback design with application to networked control. *IEEE Trans. Autom. Control*, 60(3), 877–881.

DeCarlo, R.A., Branicky, M.S., Pettersson, S., and Lennartson, B. (2000). Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proc. IEEE*, 88(7), 1069–1082.

Duan, C. and Wu, F. (2014). Analysis and control of switched linear systems via modified Lyapunov-Metzler inequalities. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 24(2), 276–294.

Feron, E. (1996). Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback. Technical Report CICS-P-468, MIT, Cambridge, MA, USA.

Fiacchini, M., Girard, A., and Jungers, M. (2016). On the stabilizability of discrete-time switched linear systems: Novel conditions and comparisons. *IEEE Trans. Autom. Control*, 61(5), 1181–1193.

Geromel, J.C. and Colaneri, P. (2006). Stability and stabilization of discrete time switched systems. *Int. J. Control*, 79(7), 719–728.

Hespanha, J.P. and Morse, A.S. (2002). Switching between stabilizing controllers. *Automatica*, 38(11), 1905–1917.

Hu, T., Ma, L., and Lin, Z. (2008). Stabilization of switched systems via composite quadratic functions. *IEEE Trans. Autom. Control*, 53(11), 2571–2585.

Kemer, E., Başak, H., and Prempain, E. (2019). Switched $\mathcal{H}_2$ state-feedback control with application to a fighter aircraft. *Journal of Aerospace Engineering*, 233(14), 5428–5437.

Lee, J.W. and Dullerud, G.E. (2006). Uniform stabilization of discrete-time switched and Markovian jump linear systems. *Automatica*, 42(2), 205–218.

Liberzon, D. (1999). Stabilizing a linear system with finite-state hybrid output feedback. In *Proc. 17th Medit. Conf. Control Aut. (MED2009)*, 176–183. Thessaloniki, Greece.

Liberzon, D. (2003). *Switching in Systems and Control*. Systems and Control: Foundations and Applications. Birkhäuser, Boston, MA.

Liberzon, D. and Morse, A.S. (1999). Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Syst. Mag.*, 19(5), 59–70.

Lin, H. and Antsaklis, P.J. (2005). Stability and persistent disturbance attenuation properties for a class of networked control systems: Switched system approach. *Int. J. Control*, 78(18), 1447–1458.

Löfberg, J. (2004). YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In *Proc. 2004 IEEE Int. Symp. on Comput. Aided Control Syst. Des.*, 284–289. Taipei, Taiwan. `http://yalmip.github.io`.

Pettersson, S. (2003). Synthesis of switched linear systems. In *Proc. 42nd IEEE Conf. Decision Control*, 5283–5288. Maui, HI, USA.

Pettersson, S. and Lennartson, B. (2001). Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy. In *Proc. 2001 Amer. Control Conf.*, 223–228. Arlington, VA, USA.

Souza, A.M., Oliveira, R.C.L.F., and Peres, P.L.D. (2022). Controle chaveado via realimentação de estados para sistemas lineares chaveados a tempo discreto por meio de lmis iterativas. In *XXIV CBA*. Fortaleza, CE, Brasil.

Sun, Z. and Ge, S.S. (2005). *Switched Linear Systems: Control and Design*. Springer Verlag, London, UK.

Wicks, M.A. and DeCarlo, R.A. (1997). Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In *Proc. 1997 Amer. Control Conf.*, 1709–1713. Albuquerque, NM, USA.

Wicks, M.A., Peleties, P., and DeCarlo, R.A. (1994). Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *Proc. 33rd IEEE Conf. Decision Control*, 3492–3497. Lake Buena Vista, FL, USA.

Zhai, G. (2001). Quadratic stabilizability of discrete-time switched systems via state and output feedback. In *Proc. 40th IEEE Conf. Decision Control*, 2165–2166. Orlando, FL, 2001.

Zhang, W., Abate, A., Hu, J., and Vitus, M.P. (2009). Exponential stabilization of discrete-time switched linear systems. *Automatica*, 45(11), 2526–2536.

Zong, G., Ren, H., and Karimi, H.R. (2021). Event-triggered communication and annular finite-time H_∞ filtering for networked switched systems. *IEEE Trans. Cybern.*, 51(1), 309–317.