

Controle Extremal Multivariável Estocástico do Tipo Newton com Atrasos Distintos de Entrada

Paulo Cesar Souza da Silva* Paulo César Pellanda*
Tiago Roux Oliveira**

* Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Defesa,
Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro – RJ, Brasil,
(e-mail: cesar.paulo151@hotmail.com, pellanda@ime.eb.br).

** Programa de Pós-Graduação em Engenharia Eletrônica,
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ),
Rio de Janeiro – RJ, Brasil,
(e-mail: tiagoroux@uerj.br)

Abstract: This paper proposes the design and analysis for a multivariable Newton-based stochastic extremum seeking control under delays. Multi-input systems with different time delays in each individual input channel are dealt with. A new predictor feedback with stochastic sinusoidal perturbation-based estimates of the Hessian's inverse is incorporated in closed loop such that the convergence rate of the real-time optimizer can be made user-assignable. Exponential stability and convergence to a small neighborhood of the unknown extremum point can be obtained. This result is rigorously reached by using backstepping transformation and averaging in infinite dimensions. A numerical example is shown in order to present the effectiveness of the proposed predictor-based stochastic extremum seeking for time-delay compensation.

Resumo: Neste artigo é proposto o projeto e análise do controlador extremal multivariável estocástico do tipo Newton na presença de atrasos. Sistemas de múltiplas entradas com distintos atrasos aplicados em canal de entrada são tratados. Um novo preditor com uma estimativa da inversa da Hessiana baseada em perturbações senoidais estocásticas (sinais de *dither*) é incorporado à malha fechada, de modo que a taxa de convergência do otimizador em tempo real possa ser especificada pelo usuário. A estabilidade exponencial e convergência a uma pequena vizinhança do ponto de extremo desconhecido são obtidas. Este resultado é rigorosamente alcançado utilizando a transformação *backstepping* e teoria da média em dimensões infinitas. Um exemplo numérico ilustra a eficiência do controlador extremal multivariável estocástico baseado em preditor para compensação de atrasos.

Keywords: Stochastic Systems; Delays; Predictor; Multivariable Extremum Seeking; Newton Algorithm; Backstepping Transformation; Averaging Theory.

Palavras-chaves: Sistemas Estocásticos; Atrasos; Preditor; Controle Extremal Multivariável; Algoritmo de Newton; Transformação *Backstepping*; Teoria da Média.

1. INTRODUÇÃO

O controle extremal (*Extremum Seeking Control* – ESC) é definido como um método adaptativo de otimização em tempo real, independente de modelos (Krstic and Wang, 2000) que visa determinar o ponto extremo de um mapeamento não linear (Krstic, 2009), sendo este um ponto de mínimo ou máximo. O ESC não possui a obrigatoriedade do conhecimento explícito da planta nem da função que se pretende otimizar, desde que se tenha o conhecimento de que essa função não linear possua um extremo (Krstic, 2014).

Apesar de existir um número extenso de trabalhos e artigos recentes abordando o controle extremal com avanços teóricos e aplicações (Krstic, 2014; Adetola and Guay, 2007; Ghaffari et al., 2012; Oliveira et al., 2011; Krstic and Wang, 2000; Guay and Zhang, 2003; Aminde et al.,

2020; Oliveira et al., 2020), não existem na literatura trabalhos que lidem com o problema de ESC multivariável estocástico (Liu and Krstic, 2012) baseado no algoritmo de Newton na presença de atrasos distintos de entrada (Oliveira et al., 2017).

Vale comentar que o controlador extremal estocástico tem como principais vantagens sobre o controlador extremal determinístico a possibilidade de considerar extremos locais, bem como a garantia de uma taxa de convergência mais rápida (Liu and Krstic, 2012).

Além disto, o algoritmo de Newton apresenta vantagens sobre o algoritmo do Gradiente, tal como: remoção da dependência da taxa de convergência da segunda derivada desconhecida (Hessiana) do mapeamento não linear a ser otimizado, sendo arbitrariamente atribuída ao projetista ou usuário (Krstic, 2014; Ghaffari et al., 2012).

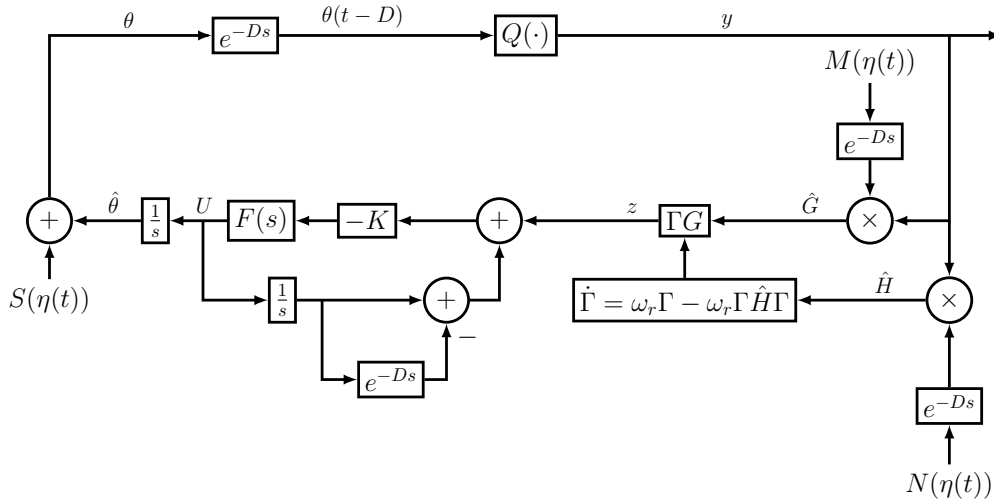


Figura 1. Diagrama de blocos do esquema básico de previsão para a compensação de atrasos distintos na entrada por busca extremal estocástica empregando o algoritmo de Newton. O preditor realimentado (33) em sua forma vetorial com $F(s) = \text{diag}\{c_1/(s + c_1), \dots, c_n/(s + c_n)\}$ e $K = \text{diag}\{k_1, \dots, k_n\}$.

Por outro lado, quando os atrasos são inseridos no sistema em malha fechada e simplesmente ignorados, estes restringem severamente a taxa de convergência das respostas do sistema ou o levam à instabilidade, já que, da literatura, foi provado que o controle extremal não é robusto a atrasos arbitrariamente longos (Oliveira et al., 2017).

Em (Oliveira et al., 2017, 2016), foi dado o início da exploração do ESC determinístico baseado nos algoritmos Gradiente e Newton com a inserção dos atrasos de entrada e/ou saída. Em (Rušiti et al., 2019), abordou-se o algoritmo de ESC do tipo Newton para maximizar as derivadas de ordem superior do mapeamento desconhecido na presença de atrasos de saída. As perturbações estocásticas também foram empregadas e permitiram-se atrasos de saída arbitrariamente longos, considerando um mapeamento dinâmico a ser otimizado. Em (Liu and Krstic, 2014), considerou-se o ESC multivariável estocástico do tipo Newton sem atrasos, cuja demonstração da estabilidade local foi estabelecida no sentido de convergência em probabilidade.

Neste artigo, encontra-se a solução para o problema de ESC multivariável estocástico com múltiplos e distintos atrasos de entrada empregando-se uma realimentação por preditor com estimativa da inversa da Hessiana desconhecida baseada em perturbações senoidais estocásticas (Liu and Krstic, 2012). A análise de estabilidade é rigorosamente construída via transformação *backstepping* (Krstic, 2009) e a teoria da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002), capturando-se o estado de dimensão infinita devido aos atrasos.

Notação: As derivadas parciais do estado $u(x, t)$ de uma equação diferencial parcial (EDP) são denotadas por $u_t(x, t)$ e $u_x(x, t)$ ou, ocasionalmente, por $\partial_t u_{av}(x, t)$ e $\partial_x u_{av}(x, t)$, para se referir ao operador do sinal médio $u_{av}(x, t)$. Admitindo-se um sistema não linear genérico $\dot{x} = f(t, x, \epsilon)$, onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $f(t, x, \epsilon)$ é periódico com período T , isto é, $f(t + T, x, \epsilon) = f(t, x, \epsilon)$, então, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, é possível obter o modelo médio dado por $\dot{x} = f_{av}(x_{av})$, com $f_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau, x_{av}, 0) d\tau$,

onde $x_{av}(t)$ denota a versão média do estado $x(t)$ da equação diferencial ordinária (EDO) (Khalil, 2002). Conforme definido em (Khalil, 2002), uma função vetorial $f(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^n$ é dita de ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$ dentro do intervalo $[t_1, t_2]$ se existem constantes positivas k e ϵ^* tais que $|f(t, \epsilon)| \leq k\epsilon$, $\forall \epsilon \in [0, \epsilon^*]$ e $\forall t \in [t_1, t_2]$. Por vezes, estimativas para as constantes k e ϵ^* serão fornecidas, podendo-se quantificar a correspondente aproximação $\mathcal{O}(\epsilon)$. Caso contrário, $\mathcal{O}(\epsilon)$ será interpretado como uma ordem da relação de magnitude válida para ϵ suficientemente pequeno.

2. BUSCA EXTREMAL MULTIVARIÁVEL ESTOCÁSTICA COM ATRASOS DISTINTOS

O ESC multivariável apresenta aplicação na qual o objetivo é maximizar ou minimizar a saída $y \in \mathbb{R}$ de um mapeamento estático não linear $y = Q(\theta)$ desconhecido através da variação em tempo real do vetor de entrada $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]$. Considera-se a matriz de atrasos $D \geq 0$ constante e conhecida no caminho de atuação, tal que a saída medida é dada por:

$$y(t) = Q(\theta(t - D)). \quad (1)$$

Os resultados encontrados neste artigo podem ser diretamente estendidos ao caso de atraso de medição, uma vez que quaisquer atrasos iguais nos canais de entrada podem ser direcionados para a saída do mapeamento estático. O caso no qual os atrasos de entrada D_{in} e de saída D_{out} ocorrem simultaneamente também pode ser tratado assumindo-se que o atraso total a ser neutralizado seja $D = D_{in} + D_{out}$, com $D_{in}, D_{out} \geq 0$. Em uma estrutura mais geral, considera-se a seguinte representação de atraso de entrada-saída:

$$\theta(t - D) := e^{-Ds}[\theta(t)], \quad (2)$$

assume-se que as entradas têm atrasos distintos, conhecidos e ordenados

$$D = \text{diag}\{D_1, D_2, \dots, D_n\}, \quad 0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \dots \leq D_n. \quad (3)$$

Além disso, considera-se que as constantes D_i , devem ser conhecidas, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

2.1 Sinais e Sistema

Sem perda de generalidade, assume-se o problema de busca pelo máximo de tal forma que o valor de θ que maximiza y em (1) é denotado por $\theta^* \in \mathbb{R}^n$. Por simplicidade, considera-se que o mapeamento *não linear quadrático* é da forma:

$$y(\theta) = y^* + \frac{1}{2}(\theta - \theta^*)^T H(\theta - \theta^*), \quad (4)$$

cujo ponto de extremo é $y^* \in \mathbb{R}$ e $H = H^T < 0$ é a matriz Hessiana desconhecida de dimensão $n \times n$ do mapeamento estático. Conectando (4) em (1), obtém-se

$$y(\theta) = y^* + \frac{1}{2}(\theta(t - D) - \theta^*)^T H(\theta(t - D) - \theta^*). \quad (5)$$

A partir de (2), em um caso geral de múltiplos e distintos atrasos nos canais de entrada, o vetor de entrada atrasado é representado como:

$$\theta(t - D) := \begin{bmatrix} \theta_1(t - D_1) \\ \theta_2(t - D_2) \\ \vdots \\ \theta_n(t - D_n) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Seja $\hat{\theta}$ a estimativa de θ^* e

$$\tilde{\theta}(t) := \hat{\theta}(t) - \theta^* \quad (7)$$

o erro de estimação. Da Figura 1 e equação (7), tem-se que $\dot{\hat{\theta}}(t) = U(t)$ e conclui-se que a dinâmica do erro pode ser escrita da seguinte maneira (atrasando-se em D ambos os lados da equação resultante):

$$\dot{\tilde{\theta}}(t - D) = \begin{bmatrix} U_1(t - D_1) \\ U_2(t - D_2) \\ \vdots \\ U_n(t - D_n) \end{bmatrix}, \quad \dot{\theta}_i(t - D_i) = U_i(t - D_i), \quad (8)$$

cujas versões média é dada por:

$$\dot{\tilde{\theta}}_i^{av}(t - D_i) = U_i^{av}(t - D_i). \quad (9)$$

Da Figura 1, também pode-se obter

$$G(t) = M(\eta(t - D_i))y(t), \quad \theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)). \quad (10)$$

Definem-se os sinais de perturbação senoidais estocásticos (também chamados de *dither*) $S(\eta(t)) \in \mathbb{R}^n$ e $M(\eta(t)) \in \mathbb{R}^n$ como:

$$S(\eta(t)) = \begin{bmatrix} a_1 \text{sen}(\eta_1(t)) & \dots & a_n \text{sen}(\eta_n(t)) \end{bmatrix}^T, \quad (11)$$

$$M(\eta(t)) = \begin{bmatrix} \frac{2}{a_1} \text{sen}(\eta_1(t)) & \dots & \frac{2}{a_n} \text{sen}(\eta_n(t)) \end{bmatrix}^T, \quad (12)$$

com amplitudes $a_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. O subscrito i indica a i -ésima entrada do vetor $\eta_i(t)$. Os elementos do vetor de perturbação gaussiana estocástica $\eta(t)$ são sequenciais e mutuamente independentes, de tal maneira que $\mathbb{E}\{\eta(t)\} = 0, \mathbb{E}\{\eta_i^2(t)\} = \sigma_i^2$ e $\mathbb{E}\{\eta_i(t) \eta_j(t)\} = 0, \forall i \neq j$, com $\mathbb{E}\{\cdot\}$ indicando o valor esperado do sinal. Assume-se também que a função densidade de probabilidade do vetor de perturbação é simétrica em torno da média.

Perturbações senoidais estocásticas são empregadas via processo de movimento browniano padrão $W_{\omega t}$ (também conhecido como processo de Wiener) sobre o limite de um círculo (Liu and Krstic, 2012; Mills and Krstic, 2018). Desse modo, refere-se ao processo de Markov como um processo estocástico, que satisfaz a propriedade de Markov

com respeito a sua filtragem natural. Da segunda expressão em (10), o sinal da entrada é construído da seguinte maneira:

$$\theta(t) = \hat{\theta}(t) + S(\eta(t)), \quad (13)$$

no qual $\hat{\theta}$ representa a estimativa de θ^* e

$$\eta_i(t) = \omega \pi (1 + \text{sen}(W_{\omega t}^i)) \quad (14)$$

representa um processo de Markov homogeneamente ergódico com frequência ω não-nula. Os termos $W_{\omega t}^i$ denotam diferentes processos de Wiener mutuamente independentes para cada canal e $\omega > 0$. Utilizando-se a escala de tempo $\tau = \omega t$ e o cálculo estocástico baseado em Ito (Liu and Krstic, 2012), obtém-se:

$$d\eta_i = -\frac{\pi}{2} \text{sen}(W_{\tau}^i) d\tau + \pi \cos(W_{\tau}^i) dW_{\tau}^i. \quad (15)$$

A estimativa da Hessiana H desconhecida é obtida por meio de:

$$\hat{H}(t) = N(\eta(t - D))y(t), \quad (16)$$

satisfazendo a seguinte propriedade da média¹

$$\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} N(\sigma)y d\sigma = H, \quad \Pi = 2\pi/\omega. \quad (17)$$

A equação (17) foi demonstrada em (Ghaffari et al., 2012; Liu and Krstic, 2014) quando um mapeamento quadrático não linear como em (4) é considerado. Assim sendo, a versão média de $H(t)$ é dada por $\hat{H}_{av}(t) = (Ny)_{av}(t) = H$.

Os elementos da matriz de dimensão $n \times n$ de demodulação $N(\eta(t))$ para a obtenção da estimativa da Hessiana são dados por:

$$N_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{16}{a_i^2} \left(\text{sen}^2(\eta_i(t - D_i)) - \frac{1}{2} \right), & i = j \\ \frac{4}{a_i a_j} \text{sen}(\eta_i(t - D_i)) \text{sen}(\eta_j(t - D_j)), & i \neq j. \end{cases} \quad (18)$$

Assim como em (Ghaffari et al., 2012; Liu and Krstic, 2014), define-se também o sinal mensurável:

$$z(t) = \Gamma(t)G(t), \quad (19)$$

e empregando-se a média, verifica-se a partir de (10), (11) e (19) que:

$$z_{av}(t) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} \Gamma M(\lambda)y d\lambda = \Gamma_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t - D), \quad (20)$$

cujo $\Gamma(t)$ é governado pela seguinte equação diferencial de Riccati:

$$\dot{\Gamma} = \omega_r \Gamma - \omega_r \hat{H} \Gamma^2, \quad (21)$$

com $\omega_r > 0$ sendo uma constante de projeto. A equação (21) gera uma estimativa da inversa da Hessiana (H^{-1}), evitando-se assim inversões da Hessiana estimada, que durante a fase transitória pode assumir valores nulos. O erro de estimação da inversa da Hessiana pode ser definido como:

$$\tilde{\Gamma}(t) = \Gamma(t) - H^{-1} \quad (22)$$

¹ A propriedade ergódica significa que a média temporal de uma função do processo ao longo das trajetórias existe quase certamente e é igual à média espacial: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(Z_t) dt = \int_{S_Z} a(z) \mu(dz)$, onde $\mu(dz)$ é uma distribuição invariante das amostras Z_t sobre S_Z (Mills and Krstic, 2018).

e sua equação dinâmica pode ser escrita a partir de (21) e (22) como:

$$\dot{\tilde{\Gamma}} = \omega_r \left[\tilde{\Gamma} + H^{-1} \right] \times \left[I_{n \times n} - \hat{H}(\tilde{\Gamma} + H^{-1}) \right]. \quad (23)$$

2.2 Realimentação via Preditor através da Estimativa Inversa da Hessiana

Pela análise da média (Krstic, 2009; Liu and Krstic, 2012), pode-se verificar de $G(t)$ em (10) e $z(t)$ em (19) que

$$z_{av}(t) = \Gamma_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t - D). \quad (24)$$

A partir de (22), a equação (24) pode ser escrita em termos de $\tilde{\Gamma}_{av}(t) = \Gamma_{av}(t) - H^{-1}$ como:

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D) + \tilde{\Gamma}_{av}(t)H\tilde{\theta}_{av}(t - D). \quad (25)$$

O segundo termo no lado direito de (25) é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$, então a linearização de $\Gamma_{av}(t)$ em H^{-1} resulta em uma versão linearizada dada por:

$$z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D), \quad (26)$$

com $\tilde{\theta}_{av}(t - D) = [\tilde{\theta}_1^{av}(t - D_1), \dots, \tilde{\theta}_n^{av}(t - D_n)]^T$. Portanto, a partir de (9) e (26), a seguinte versão do modelo médio com o estado $z_{av}(t)$ pode ser obtida:

$$\dot{z}_{av}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1^{av}(t) \\ \dot{z}_2^{av}(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n^{av}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^{av}(t - D_1) \\ U_2^{av}(t - D_2) \\ \vdots \\ U_n^{av}(t - D_n) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

De (8) e (26), os seguintes modelos médios podem ser obtidos escritos

$$\dot{\tilde{\theta}}_{av}(t - D) = U_{av}(t - D) \quad (28)$$

$$\dot{z}_{av}(t) = U_{av}(t - D). \quad (29)$$

no qual $U_{av} \in \mathbb{R}^n$ é o controle médio resultante de $U \in \mathbb{R}^n$. Para motivar o projeto da realimentação por preditor, a ideia aqui consiste em compensar o atraso através do estado futuro $z(t + D)$, ou $z_{av}(t + D)$ na sua versão média equivalente do sistema. Para se obter $z_{av}(t + D)$ com a fórmula da variação das constantes para (28) e (29), o estado futuro é dado por:

$$z_{av}(t + D) = z_{av}(t) + \int_{t-D}^t U_{av}(\sigma) d\sigma, \quad (30)$$

cujo sinal de controle $U_{av}(\sigma)$ é calculado na janela de tempo passada $[t - D, t]$. Dado qualquer matriz de ganhos estabilizante $K > 0$, o controle médio deve ser:

$$U_{av}(t) = -K \left[z_{av}(t) + \int_{t-D_i}^t U_{av}(\sigma) d\sigma \right], \quad (31)$$

resultando no controle médio $U_{av}(t) = -Kz_{av}(t + D)$, $\forall t > 0$, como desejado. Desse modo, o sistema médio deve ser, $\forall t \geq D_n$:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{av}(t)}{dt} = -K\tilde{\theta}_{av}(t) - K\tilde{\Gamma}_{av}(t + D)H\tilde{\theta}_{av}(t). \quad (32)$$

Uma vez que $K\tilde{\Gamma}_{av}H\tilde{\theta}_{av}$ é quadrático em $(\tilde{\Gamma}_{av}, \tilde{\theta}_{av})$, a linearização do sistema (32) tem autovalor determinado por $-K$. Então, a estabilidade exponencial local do algoritmo do tipo de Newton pode ser obtida com a taxa de convergência garantida, sendo independente da Hessiana H desconhecida.

Em (Oliveira and Krstic, 2015), mostra-se que o objetivo de controle pode ainda ser alcançado se uma modificação no controlador baseado em preditor, que emprega um filtro passa baixas, é aplicada tal que o teorema da média em dimensões infinitas (Hale and Lunel, 1990; Lehman, 2002) possa ser invocado. Nesse sentido, é proposto a seguinte compensação por preditor filtrado (Oliveira et al., 2017):

$$U_i(t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i \left[z_i(t) + \int_{t-D_i}^t U_i(\tau) d\tau \right] \right\}, \quad (33)$$

para todo $k_i, c_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$, com c_i suficientemente grande, i.e., a realimentação por preditor é da forma de uma filtragem passa baixas da versão não-média de (31). Utiliza-se a notação mista do domínio do tempo e da frequência em (33), para destacar que a função de transferência age como um operador em uma função no domínio do tempo. A realimentação por preditor (33) é baseada em perturbação média porque $z(t)$ em (19) é atualizado de conforme a estimativa $\tilde{\Gamma}(t)$ para a inversa da Hessiana desconhecida H^{-1} dada por (21), com $\hat{H}(t)$ em (16) satisfazendo a propriedade da média (17).

3. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

O Teorema 1 a seguir sintetiza as propriedades de estabilidade/convergência do sistema realimentado em malha fechada. Os operadores $\mathbb{E}\{\cdot\}$ e $\mathbb{P}\{\cdot\}$ denotam, respectivamente, o valor esperado e a probabilidade dos sinais.

Teorema 1 Considere o sistema em malha fechada da Figura 1, com múltiplos e distintos atrasos de entrada e um mapeamento quadrático não linear (4). Existe $c^* > 0$ tal que, $\forall c_i \geq c^*, \exists \omega^*(c_i)$ de maneira tal que $\forall \omega \geq \omega^*$, o sistema atrasado em malha fechada (8) e (33), com $z(t)$ em (19), $G(t)$ em (10), $\tilde{\Gamma}(t)$ em (21) e estado $\tilde{\Gamma}(t), \tilde{\theta}_i(t - D_i), U_i(\sigma), \forall \sigma \in [t - D_i, t]$, e $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tem uma solução localmente exponencialmente estável, satisfazendo $\forall t \rightarrow +\infty$:

$$\mathbb{E} \left\{ |\tilde{\Gamma}(t)|^2 + \sum_{i=1}^n \left[\tilde{\theta}_i(t - D_i) \right]^2 + [U_i(t)]^2 + \int_{t-D}^t [U_i(\sigma)]^2 d\sigma \right\}^{1/2} \leq \mathcal{O}(1/\omega). \quad (34)$$

Além disso,

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup |\theta(t) - \theta^*| \leq \mathcal{O}(|a| + 1/\omega) \right\} = 1, \quad (35)$$

$$\lim_{(1/\omega) \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \sup |y(t) - \theta^*| \leq \mathcal{O}(|a|^2 + 1/\omega^2) \right\} = 1. \quad (36)$$

sendo que $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$.

Os passos da prova são apresentadas nas Seções 3.1 a 3.8, a seguir.

3.1 Sistema Médio EDO-EDP

De acordo com (Krstic, 2009), o atraso em (8) pode ser representado empregando uma EDP de transporte como:

$$\dot{\tilde{\theta}}_i(t - D_i) = u_i(0, t), \quad (37)$$

$$\partial_t u_i(x, t) = \partial_x u_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (38)$$

$$u_i(D_i, t) = U_i(t), \quad (39)$$

no qual a solução de (38)-(39) é

$$u_i(x, t) = U_i(t + x - D_i), \quad (40)$$

sendo t a variável de tempo, D_i o atraso e x a variável espacial da EDP.

3.2 Sistema em Malha Fechada

Substituindo-se (10) e (16) em (33) e representando-se o integrando em (33) por meio da EDP de transporte, encontra-se:

$$U_i(t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i \left[z_i(t) + \int_0^{D_i} u_i(\tau, t) d\tau \right] \right\}. \quad (41)$$

Finalmente, substituindo (41) em (39), pode-se reescrever (37)-(39) como:

$$\dot{\theta}_i(t - D_i) = u_i(0, t), \quad (42)$$

$$\partial_t u_i(x, t) = \partial_x u_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (43)$$

$$u_i^{av}(D_i, t) = \frac{c_i}{s + c_i} \left\{ -k_i z_{av}(t) - k_i \int_0^D u_{av}(\tau, t) d\tau \right\}, \quad (44)$$

com solução

$$u_i^{av}(x, t) = U_i^{av}(t + x - D_i). \quad (45)$$

3.3 Modelo Médio do Sistema em Malha Fechada

Agora, definindo-se

$$\tilde{\vartheta}(t) := \tilde{\theta}(t - D) \quad (46)$$

e usando-se (33), a versão média do sistema (37)-(39) é

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_i^{av}(t) = u_i^{av}(0, t), \quad (47)$$

$$\partial_t u_i^{av}(x, t) = \partial_x u_i^{av}(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (48)$$

$$\frac{d}{dt} u_i^{av}(D_i, t) = -c_i u_i^{av}(D, t) + c_i k_i \left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) + \int_0^D u_i^{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (49)$$

onde o filtro $c_i/(s + c_i)$ também foi representado na forma de espaço de estado. Por outro lado, o modelo médio para a estimação do erro associada a inversa da Hessiana em (23) é $\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t) - \omega_r H \tilde{\Gamma}_{av}^2(t)$ e sua versão linearizada é descrita como:

$$\frac{d\tilde{\Gamma}_{av}(t)}{dt} = -\omega_r \tilde{\Gamma}_{av}(t). \quad (50)$$

3.4 Transformação Backstepping, sua Inversa e o Sistema Alvo

Considera-se a seguinte transformação *backstepping* (Krstic, 2009) de dimensão infinita do estado atrasado

$$w_i(x, t) = u_i^{av}(x, t) + k_i \left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) + \int_0^x u_i^{av}(\sigma, t) d\sigma \right], \quad (51)$$

onde $\vartheta_{av}(t) := z_{av}(t) = \tilde{\theta}_{av}(t - D)$ de acordo com (26). A transformação (51) mapeia o sistema linearizado (42)-(44) em:

$$\dot{\tilde{\vartheta}}_i^{av}(t) = -k_i \tilde{\vartheta}_i^{av}(t) + w_i(0, t), \quad (52)$$

$$\partial_t w_i(x, t) = \partial_x w_i(x, t), \quad x \in [0, D_i], \quad (53)$$

$$w_i(D_i, t) = -\frac{1}{c_i} \partial_t u_i^{av}(D_i, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (54)$$

Empregando (42), deriva-se parcialmente o estado transformado $w_i(x, t)$ em (51) em relação ao tempo t e considera-se $x = D_i$ tal que:

$$\partial_t w_i(D_i, t) = \partial_t u_i^{av}(D_i, t) + k_i u_i^{av}(D_i, t), \quad (55)$$

no qual $\partial_t u_i^{av}(D_i, t) = \dot{U}_i^{av}(t)$. Além disso, considere que a transformação inversa (51) é dada por:

$$u_i^{av}(x, t) = w_i(x, t) - k_i \left[e^{-k_i x} \tilde{\vartheta}_i^{av}(t) + \int_0^x e^{-k_i(x-\sigma)} w_i(\sigma, t) d\sigma \right]. \quad (56)$$

Após substituir (54) e (56) em (54), tem-se:

$$\begin{aligned} \partial_t w_i(D_i, t) &= -c_i w_i(D_i, t) + k_i w_i(D_i, t) \\ &\quad - k_i^2 \left[e^{-k_i D_i} \tilde{\vartheta}_i^{av}(t) + \int_0^{D_i} e^{-k_i(D_i-\sigma)} w_i(\sigma, t) d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

3.5 Funcional de Lyapunov-Krasovskii

A estabilidade exponencial do sistema global é estabelecida com a funcional de Lyapunov

$$V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (58)$$

onde $V_i(t)$ são funcionais do tipo

$$V_i(t) = \frac{1}{2} \left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) \right]^2 + \frac{\bar{a}_i}{2} \int_0^{D_i} (1+x) w_i(x, t)^2 dx + \frac{1}{2} w_i^2(D_i, t), \quad (59)$$

para cada subsistema em (52)-(54) e \bar{a}_i será escolhido mais adiante. Desse modo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= -k_i \left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) \right]^2 + \tilde{\vartheta}_i^{av}(t) \omega_i(0, t) \\ &\quad + \bar{a}_i \int_0^{D_i} (1+x) \omega_i(x, t) \partial_x \omega_i(x, t) + \omega_i(D_i, t) \partial_t \omega_i(D_i, t). \end{aligned} \quad (60)$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &\leq -k_i \left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) \right]^2 + \frac{\left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) \right]^2}{2\bar{a}_i} - \frac{\bar{a}_i}{2} \int_0^{D_i} \omega_i^2(x, t) dx \\ &\quad + \omega_i(D_i, t) \left[\partial_t \omega_i(D_i, t) + \frac{\bar{a}_i(1+D_i)}{2} \omega(D_i, t) \right]. \end{aligned} \quad (61)$$

Relembrando que $k_i > 0$, escolhe-se: $\bar{a}_i = \frac{1}{k_i}$. Então:

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) &= -\frac{1}{2\bar{a}_i} \left[\tilde{\vartheta}_i^{av}(t) \right]^2 - \frac{\bar{a}_i}{2} \int_0^{D_i} \omega_i^2(x, t) dx \\ &\quad + \omega_i(D_i, t) \left[\partial_t \omega_i(D_i, t) + \frac{\bar{a}_i(1+D_i)}{2} \omega_i(D_i, t) \right]. \end{aligned} \quad (62)$$

Desse modo, conclui-se que:

$$\dot{V}_i(t) \leq -\mu_i V_i(t) \quad \text{ou} \quad \dot{V}(t) \leq -\mu V(t) \quad (63)$$

para algum $\mu > 0$. Portanto, O sistema em malha fechada é exponencialmente estável no sentido de norma do estado completo:

$$\sqrt{|\tilde{v}_{av}(t)|^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2(D_i, t) + \sum_{i=1}^n \int_0^{D_i} w_i^2(x, t) dx}, \quad (64)$$

i.e., na variável transformada (\tilde{v}_{av}, w) .

3.6 Estabilidade Exponencial do Sistema Médio nas Variáveis originais

Para obter a estabilidade exponencial no sentido de norma

$$\sqrt{|\tilde{v}_{av}(t)|^2 + \sum_{i=1}^n [u_i^{av}(D_i, t)]^2 + \sum_{i=1}^n \int_0^{D_i} (u_i^{av}(x, t))^2 dx}, \quad (65)$$

precisa-se demonstrar que

$$\alpha_1 \Psi(t) \leq V(t) \leq \alpha_2 \Psi(t), \quad (66)$$

para α_1 e α_2 sendo números positivos apropriados e

$$\Psi(t) := |\tilde{v}_{av}(t)|^2 + \sum_{i=1}^n [u_i^{av}(D_i, t)]^2 + \sum_{i=1}^n \int_0^{D_i} (u_i^{av}(x, t))^2 dx. \quad (67)$$

Isso é realizado utilizando uma abordagem similar àquela detalhada em (Krstic, 2009, Theorem 1). Assim, obtém-se:

$$\Psi(t) \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1} e^{-\mu t} \Psi(0), \quad (68)$$

que completa a prova da estabilidade exponencial para o sistema médio nas variáveis originais (\tilde{v}_{av}, u_{av}) .

3.7 Invocando o Teorema da Média

Utilizando-se (8), (33) e (23), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_i(t - D_i) \\ U_i(t) \\ \tilde{\Gamma}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c_i U_i(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_i(t - D_i) \\ -c_i k_i z_i(t) - c_i k_i \int_{t-D_i}^t U_i(\tau) d(\tau) \\ \omega_r [\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1}] \times [I_{n \times n} - \hat{H}(t)(\tilde{\Gamma}(t) + H^{-1})] \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Define-se o vetor de estado

$$\mathbf{u}^\epsilon(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(t - D) \\ U(t) \\ \tilde{\Gamma}(t) \end{bmatrix}, \quad (70)$$

que geralmente permite expressar (69) na forma de uma equação diferencial funcional estocástica “tridimensional”

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}^\epsilon(t) = G(\mathbf{u}_t^\epsilon) + \epsilon F(t, \mathbf{u}_t^\epsilon, \eta(t), \epsilon), \quad (71)$$

onde $\epsilon := 1/\omega$. Portanto, uma vez que $\eta(t)$ é um processo de Markov homogeneamente ergódico com medida invariante $\mu(d\eta)$ e propriedade de ergodicidade exponencial, $\mathbf{u}_t^\epsilon(\delta) = \mathbf{u}^\epsilon(t + \delta)$ para $-D_n \leq \delta \leq 0$ e $G : \mathbf{C}_3([-D_n, 0]) \rightarrow \mathbb{R}^3$,

bem como a função Lipschitz $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{C}_3([-D_n, 0]) \times Y \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $F(t, 0, \eta, \epsilon) = 0$ são mapeamentos contínuos, pode-se aplicar o teorema da média em (Katafygiotis and Tsarkov, 1999) com seu resultado exponencial de p-estabilidade (com p=2) para o sistema aleatório inicial usando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e concluir (34).

3.8 Convergência Assintótica

Define-se o tempo de parada (Liu and Krstic, 2010):

$$\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)} := \inf \{ \forall t \geq 0 : |\mathbf{u}^\epsilon(t)| > M |\mathbf{u}^\epsilon(0)| e^{-\lambda t} + \mathcal{O}(\epsilon) \}, \quad (72)$$

como a primeira vez em que a norma do vetor de erro deixa de satisfazer a propriedade de decaimento exponencial. Além disso, definem-se as seguintes constantes: $M > 0$, $\lambda > 0$ e a função $T(\epsilon) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{N}$. Dessa maneira, a norma do vetor erro $|\mathbf{u}^\epsilon(t)|$ converge para um valor menor do que o valor residual $\Delta(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$. Trata-se de uma convergência exponencial e rápida que pode se dar de duas formas: *almost surely (a.s.)* e *in probability*:

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \forall t \geq 0 : |\mathbf{u}^\epsilon(t)| > M |\mathbf{u}^\epsilon(0)| e^{-\lambda t} + \Delta \} = \infty, \quad \text{a.s.}, \quad (73)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \{ |\mathbf{u}^\epsilon(t)| \leq M |\mathbf{u}^\epsilon(0)| e^{-\lambda t} + \Delta, \forall t \in [0, T(\epsilon)] \} = 1, \quad (74)$$

com $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\epsilon) = \infty$. A partir de (73), fica claro que $\tau_\epsilon^{\Delta(\epsilon)}$ se aproxima do infinito à medida que ϵ tende a zero. De forma similar, em (74) a função determinística $T(\epsilon)$ tende a infinito à medida que ϵ vai a zero. Segue de (73) e (74) que a convergência exponencial é satisfeita em um intervalo de tempo arbitrariamente longo. Qualquer componente do vetor erro converge para um valor menor que $\Delta(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon)$, particularmente o componente $\tilde{\theta}(t)$. Então, pode-se dizer que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P} \left\{ \limsup_{t \rightarrow \infty} |\tilde{\theta}(t)| \geq \mathcal{O}(\epsilon) \right\} = 1$. A partir das equações (7) e (13), chega-se a:

$$\theta(t) - \theta^* = \tilde{\theta}(t) + S(\eta(t)). \quad (75)$$

Uma vez que o primeiro termo no lado direito de (75) é da ordem de $\mathcal{O}(\epsilon)$ e o segundo termo é da ordem de $\mathcal{O}(|a|)$, chega-se à equação (35). Finalmente, a partir de (4) e (35), obtém-se (36). \square

4. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para avaliar a compensação dos múltiplos atrasos no ESC multivariável estocástico, considera-se o seguinte mapeamento estático não linear:

$$Q(\theta) = 5 + \frac{1}{2} \left(2(\theta_1)^2 + 4(\theta_2 - 1)^2 + 4\theta_1(\theta_2 - 1) \right), \quad (76)$$

com atrasos de entrada $D_1 = 50$ e $D_2 = 100$. O ponto extremo é dado em $\theta^* = (0, 1)$ por $y^* = 5$ e a Hessiana desconhecida do mapeamento é $H = - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. A seguir, são apresentadas simulações numéricas do preditor (33) para os seguintes valores dos parâmetros de projeto e condições iniciais: $a_1 = a_2 = 0.22$, $c = 20$, $\omega_r = 0.007$, $\Gamma(0) = \begin{bmatrix} -1/100 & 0 \\ 0 & -1/200 \end{bmatrix}$ e $K = 0.005 I_{2 \times 2}$, no qual $I_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2.

Pela Figura 2, verifica-se a preservação da estabilidade do sistema em malha fechada e a convergência da entrada da

planta para a vizinhança do valor ótimo $\theta^* = (0, 1)$ quando nenhum atraso é considerado. Na Figura 3, observa-se que a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado $y^* = 5$.

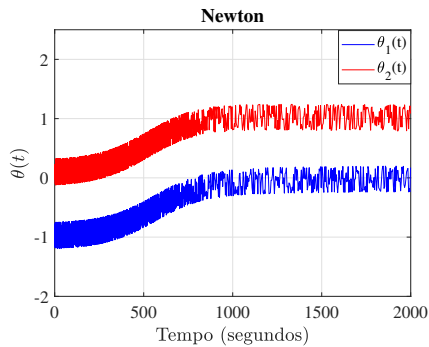


Figura 2. Entrada $\theta(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico sem atrasos.

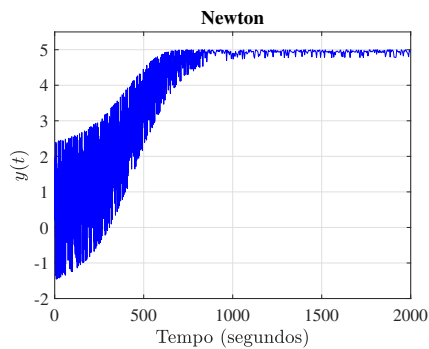


Figura 3. Saída $y(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico sem atrasos.

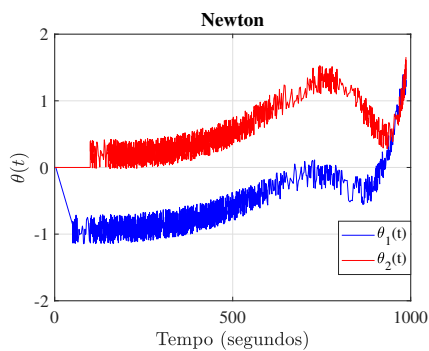


Figura 4. Entrada $\theta(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico com atrasos, porém sem preditor.

Pelos resultados das Figuras 4 e 5, verifica-se o que é exposto na literatura (Oliveira et al., 2017), que o controle extremal não é robusto na presença de atrasos, levando o sistema em malha fechada à instabilidade quando os atrasos não são devidamente compensados.

Pela Figura 6, observa-se a convergência da entrada da planta para a vizinhança do valor ótimo $\theta^* = (0, 1)$ quando o esquema proposto no artigo baseado em preditor é empregado. Na Figura 7, verifica-se $\hat{\theta}(t)$ convergindo para o ponto ótimo desejado $(0, 1)$.

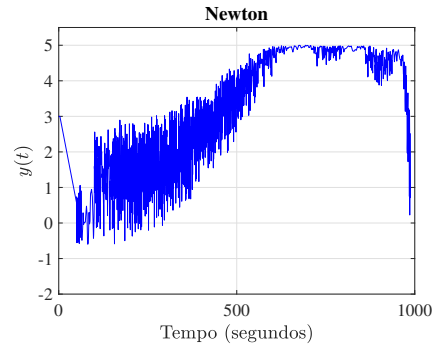


Figura 5. Saída $y(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico com atrasos, porém sem preditor.

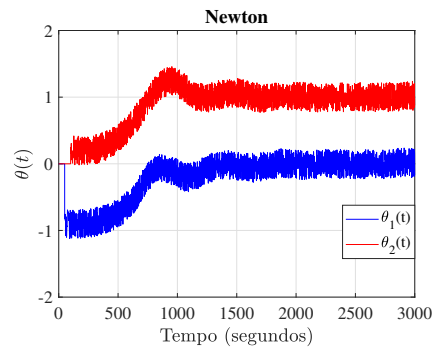


Figura 6. Entrada $\theta(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico com atrasos combinada com compensação via preditor.

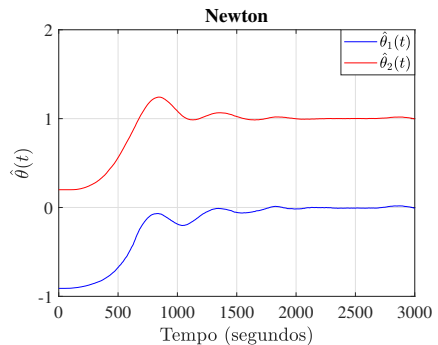


Figura 7. Estimativa $\hat{\theta}(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico com atrasos e compensação via preditor.

Na Figura 8, observa-se que o atraso total inserido foi devidamente compensado pelo preditor, a estabilidade do sistema em malha fechada foi completamente preservada ao longo do tempo e a saída da planta convergiu para a vizinhança do valor desejado $y^* = 5$. Observa-se, na Figura 9, a atenuação do sinal de controle $U(t)$ à medida que a saída do mapeamento tende à vizinhança de seu valor ótimo y^* .

5. CONCLUSÃO

Neste artigo foi proposto um novo esquema de controle extremal estocástico baseado no algoritmo de Newton para otimização multiparamétrica em tempo real na presença de múltiplos e distintos atrasos de entrada. A lei de

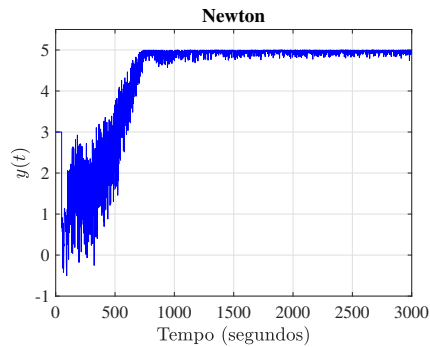


Figura 8. Saída $y(t)$ do algoritmo de Newton multivariável estocástico com atrasos e compensação via preditor.

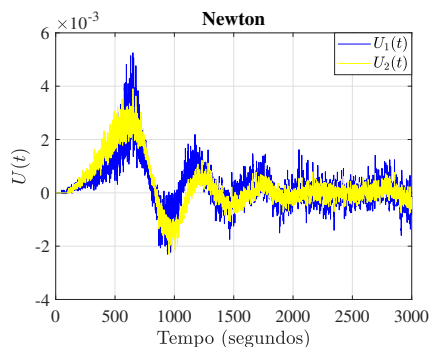


Figura 9. Sinal de controle $U(t)$ do algoritmo do Gradiente multivariável estocástico com atrasos e compensação via preditor.

controle aqui definida para compensação dos atrasos usa realimentação baseada em preditor com estimativa da inversa da Hessiana baseada em perturbações, associada ao ajuste adequado dos sinais estocásticos (de excitação). A nova abordagem preserva a estabilidade exponencial e a convergência da saída do sistema a uma pequena vizinhança do ponto de extremo, mesmo na presença de atrasos arbitrariamente longos. Realizou-se uma rigorosa prova de estabilidade via transformação *backstepping* e teorema da média em dimensões infinitas. Os resultados numéricos mostram os desafios e vantagens de se lidar com a inserção dos atrasos no sistema e a posterior implementação do preditor no algoritmo do tipo Newton para a compensação dos atrasos.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Os autores também agradecem ao CNPq e à FAPERJ pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

Adetola, V. and Guay, M. (2007). Guaranteed parameter convergence for extremum-seeking control of nonlinear systems. *Automatica*, 43, 105–110.

Aminde, N.O., Oliveira, T.R., and Hsu, L. (2020). Controle multivariável para busca extremal cíclica usando modos deslizantes e função de chaveamento periódica. *Congresso Brasileiro de Automática*, 2(1). doi:10.48011/asba.v2i1.1031.

Ghaffari, A., Krstic, M., and Netic, D. (2012). Multivariable Newton-based extremum seeking. *Automatica*, 48, 1759–1767.

Guay, M. and Zhang, T. (2003). Adaptive extremum seeking control of nonlinear dynamic systems with parametric uncertainties. *Automatica*, 39, 1283–1293.

Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (1990). Averaging in infinite dimensions. *Journal of Integral Equations and Applications*, 2, 463–494.

Katafygiotis, L. and Tsarkov, Y. (1999). Averaging and stability of quasilinear functional differential equations with markov parameters. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, 12, 1–15.

Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Krstic, M. (2009). *Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems*. Birkhauser.

Krstic, M. (2014). *Extremum Seeking Control*, in T. Samad and J. Baillic, *Encyclopedia of Systems and Control*. Springer.

Krstic, M. and Wang, H.H. (2000). Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamics systems. *Automatica*, 36, 595–601.

Lehman, B. (2002). The influence of delays when averaging slow and fast oscillations systems: Overview. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19, 201–215.

Liu, S.J. and Krstic, M. (2010). Stochastic averaging in continuous time and its applications in to extremum seeking. *IEEE Trans. Autom. Control*, 55, 2235–2250.

Liu, S.J. and Krstic, M. (2012). *Stochastic Averaging and Stochastic Extremum Seeking*. Springer.

Liu, S.J. and Krstic, M. (2014). Newton-based stochastic extremum seeking. *Automatica*, 50(3), 952–961. doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.12.023>.

Mills, G. and Krstic, M. (2018). Maximizing map sensitivity and higher derivatives via extremum seeking. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63, 3237–3247.

Oliveira, T.R., Hsu, L., and Peixoto, A.J. (2011). Output-feedback global tracking for unknown control direction plants with applications to extremum-seeking control. *Automatica*, 47, 2029–2038.

Oliveira, T.R. and Krstic, M. (2015). Newton-based extremum seeking under actuator and sensor delays. *IFAC-PapersOnline*, 48, 304–309.

Oliveira, T.R., Krstic, M., and Rodrigues, V.H.P. (2016). Busca extremal baseada no método de Newton na presença de atrasos. *XXI Congresso Brasileiro de Automática*, 1. ISSN 2525-8311.

Oliveira, T.R., Krstic, M., and Tsubakino, D. (2017). Extremum seeking for static maps with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62, 1911–1926.

Oliveira, T.R., Tsubakino, D., and Krstic, M. (2020). A simplified multivariable Gradient extremum seeking for distinct input delays with delay-independent convergence rates. In *2020 American Control Conference (ACC)*, 608–613.

Rušiti, D., Evangelisti, G., Oliveira, T.R., Gerds, M., and Krstić, M. (2019). Stochastic extremum seeking for dynamic maps with delays. *IEEE Control Systems Letters*, 3(1), 61–66.