

ÁLGEBRA DE CLIFFORD APLICADA A ANÁLISE DA POTÊNCIA ELÉTRICA EM SISTEMAS MONOFÁSICOS SOB CONDIÇÕES NÃO SENOIDAIS.

Rafael Furquim Junior.* Nivaldo Roberto Ferreira.** Fernando Augusto Moreira.***

*Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, (e-mail: rafael.furquim@ig.com.br).

**Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, (e-mail: nivaldo@ufba.br).

***Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, (e-mail: moreiraf@ufba.br).

Abstract: The first theory proposed for the analysis of power in non-sinusoidal steady state was due to Budeanu in 1927. It is based on an extrapolation of the classical method used for purely sinusoidal steady state. Since it did not explain satisfactorily some aspects of power flow behavior, other theories were subsequently proposed. Among the more recent ones is the proposition of Castro-Núñez which, in order to properly model the non-active power and the multivector aspect of electric power, employs a mathematical tool named Clifford Algebra or Geometric Algebra. This paper presents a modified formulation of Geometric Algebra that can reproduce the results of instantaneous power in time-domain.

Resumo: A primeira teoria criada para fazer a análise da potência em circuitos elétricos no regime permanente não senoidal foi devida a Budeanu em 1927. Ela se baseia numa extrapolação do método clássico utilizado para o regime puramente senoidal. Por não explicar apropriadamente alguns aspectos do comportamento do fluxo de potências permitiu a proposição de diversas outras teorias. Entre as mais recentes está a proposta de Castro-Núñez, que para modelar adequadamente a potência não ativa e o caráter multivetorial da potência elétrica utiliza uma ferramenta matemática chamada Álgebra de Clifford ou Álgebra Geométrica. Neste artigo apresenta-se uma abordagem modificada da Álgebra Geométrica que se mostra capaz de reproduzir os resultados da análise da potência instantânea no domínio do tempo.

Keywords: apparent power; multivector; geometric algebra; non-active power; harmonics.

Palavras-chaves: potência aparente; multivetor; álgebra geométrica; potência não ativa; harmônicas.

1. INTRODUÇÃO

A análise de circuitos no regime permanente senoidal tornou-se prática com o uso dos números complexos e dos fasores, sendo proposta por Steinmetz (1897), onde foram definidas as potências ativa P , reativa Q e aparente S .

A primeira definição de potência no domínio da frequência, aplicada a circuitos monofásicos de corrente alternada em regime periódico não senoidal, foi proposta por Budeanu (1927), na qual foram apresentadas as três parcelas que compõem a potência aparente S : potência ativa P , potência reativa Q_B e potência distorciva D_B . Esta teoria é amplamente utilizada na engenharia elétrica.

Logo após Budeanu propor sua teoria no domínio da frequência, Fryze (1932) propôs uma teoria para definição da potência no domínio do tempo. Esta é baseada em decomposição ortogonal, dando origem às componentes de corrente ativa e não ativa.

Contudo, estas teorias foram contestadas por vários pesquisadores e nas décadas de 70 a 90 surgiram outras, destacando-se entre elas as teorias de Shepherd e Zakikhani (1972), Akagi et al. (1983), e Czarnecki (1988). Porém, ainda não há consenso na comunidade científica que aponte uma única teoria para explicar a potência não ativa em regime não senoidal.

Assim sendo, Castro-Núñez (2013) apresentou uma teoria propondo a abordagem da álgebra de Clifford, também conhecida como álgebra geométrica, para a análise da potência em regime permanente não senoidal.

Este trabalho utiliza essa mesma ferramenta para seu desenvolvimento, porém, apresenta uma abordagem mais simples de transformação do domínio do tempo para o domínio da álgebra geométrica de Clifford, propondo pela primeira vez um operador de rotação distinto para cada frequência harmônica.

1.1 A Teoria da Potência de Budeanu

Budeanu, em 1927, compreendeu que a potência aparente tinha mais de duas componentes em condições periódicas não senoidais e postulou que a Potência Aparente é composta por duas componentes ortogonais, chamadas de Potência Ativa e Não Ativa. A Potência Ativa sendo definida como a média da potência instantânea no domínio do tempo dada por:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T p(t) dt = V_0 \cdot I_0 + \sum_{h,n \in \mathbb{Z}^+}^n V_h \cdot I_h \cdot \cos \varphi_h \quad (1.1.1)$$

Onde V_0 e I_0 representam a componente contínua da tensão e corrente, V_h e I_h as componentes harmônicas, n o número de harmônicos e h o índice harmônico. \mathbb{Z}^+ é o conjunto dos números inteiros positivos.

A Potência Não Ativa é dividida em duas componentes definidas como Potência Reativa de Budeanu Q_B e Potência de Distorção D_B . A Potência Reativa de Budeanu é calculada pela soma das potências reativas individuais de cada ordem harmônica, ou seja:

$$Q_B = \sum_{h=1}^n V_h \cdot I_h \cdot \sin \varphi_h \quad (1.1.2)$$

E a Potência de Distorção é dada por:

$$D_B = \sqrt{S^2 - P^2 - Q_B^2} \quad (1.1.3)$$

1.2 Limitações da teoria de Budeanu

As duas principais limitações da teoria de Budeanu, conforme apontado nos trabalhos de Shephard e Zakikhani (1972), e também Czarnecki (1988) são:

A redução da potência reativa, no valor de Q_B , não reduz o valor eficaz da corrente de alimentação para o valor de corrente ativa, como ocorre no caso senoidal;

A potência de distorção D_B pode, ou não, ter algo em comum com a distorção das formas de onda da tensão e corrente.

Estas limitações na potência reativa de Budeanu podem ter motivado a exclusão deste conceito da norma IEEE 1459 em sua revisão de 2010.

1.3 Potência em Regime não Senoidal no domínio do tempo.

Em um circuito com tensões e correntes em diferentes frequências, originam-se potências em diferentes frequências, incluindo-se as associadas as frequências cruzadas, sendo então a potência, multivetorial. Assim sendo, para se encontrar a potência aparente total em regime não senoidal, utiliza-se da definição de Fourier, apresentada abaixo sucintamente.

Dado um sinal $x(t)$ periódico não senoidal como abaixo:

$$x(t) = \sum_{h=1}^n \left[\sqrt{2} \cdot A_h \cdot \sin(h\omega t + \alpha) \right] \quad (1.3.1)$$

A norma ou magnitude de $x(t)$ será:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt} = \sqrt{\sum_{h=1}^n A_h^2} \quad (1.3.2)$$

onde: $x(t)$ pode ser um sinal de tensão ou de corrente, A_h é o valor eficaz da componente de ordem harmônica h , T é o período da onda fundamental.

Sendo $x(t)$ o sinal de tensão $v(t)$, sua norma ou magnitude será:

$$\|v(t)\| = \sqrt{\sum_{h=1}^n V_h^2} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2} \quad (1.3.3)$$

A potência aparente instantânea no domínio do tempo é definida como:

$$S(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (1.3.4)$$

A norma ou magnitude da potência aparente é definida como:

$$\|S(t)\| = \|v(t)\| \cdot \|i(t)\| \quad (1.3.5)$$

Substituindo-se as normas de tensão e corrente se obtém:

$$\|S(t)\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2} \cdot \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2} \quad (1.3.6)$$

Rearranjando algebricamente se obtém:

$$\|S(t)\| = \sqrt{(V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2) \cdot (I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2)} \quad (1.3.7)$$

Simplificando-se a apresentação da norma ou magnitude da potência aparente, se obtém:

$$\|S(t)\| = \sqrt{S_{11}^2 + S_{12}^2 + \dots + S_{mm}^2} \quad (1.3.8)$$

onde: $S_{ij} = (V_i)^2 \cdot (I_j)^2$

2. ÁLGEBRA DE CLIFFORD

A álgebra de Clifford, também conhecida como álgebra geométrica, é uma ferramenta matemática capaz de manipular escalares, vetores e objetos geométricos de forma relativamente simples. Portanto, tem encontrado aplicação em vários ramos da física e da engenharia.

Neste trabalho, a álgebra de Clifford será utilizada para a análise da potência em sistemas elétricos monofásicos sob condição periódica não senoidal.

2.1 Definições básicas da Álgebra Geométrica de Clifford

Um entendimento em profundidade é apresentado em Jancewicz (1988), neste trabalho apresenta-se apenas o conteúdo essencial. A base da álgebra geométrica, segundo Chappell et al. (2014), é estender o espaço vetorial euclidiano \mathbf{R}^n com uma operação de multiplicação, associativa e anticomutativa, designada produto geométrico dando origem a um espaço vetorial expandido $Cl(\mathbf{R}^n)$, sendo fechado para a soma e multiplicação de vetores.

Considerando-se a base ortonormal $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ do espaço vetorial euclidiano \mathbf{R}^2 e dois vetores quaisquer V e W deste espaço, sendo:

$$V = v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 \quad (2.1.1)$$

$$W = w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 \quad (2.1.2)$$

onde: σ_1, σ_2 são vetores unitários ortogonais de \mathbf{R}^2 e $v_1\sigma_1, v_2\sigma_2, w_1\sigma_1, w_2\sigma_2$ são vetores de \mathbf{R}^2 .

Obtém-se o espaço vetorial expandido $CI(\mathbf{R}^2)$, aplicando-se o produto geométrico de Clifford entre V e W , abaixo definido:

$$VW = V \cdot W + V \wedge W \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} VW &= (v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2)(w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2) \\ &= v_1w_1\sigma_1^2 + v_1w_2\sigma_1\sigma_2 + v_2w_1\sigma_2\sigma_1 + v_2w_2\sigma_2^2 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

onde: $V \cdot W$ é o produto interno, um escalar, e corresponde ao produto interno euclidiano e $V \wedge W$ é o produto externo, um novo tipo de elemento chamado bivector do espaço $CI(\mathbf{R}^2)$.

O produto geométrico (2.1.4) é agrupado utilizando-se do axioma da álgebra de Clifford apresentado abaixo:

$$\sigma_i\sigma_j = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow i = j \rightarrow \sigma_i^2 = \sigma_j^2 = 1 \\ -\sigma_j\sigma_i & \Leftrightarrow i \neq j \rightarrow \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i \end{cases} \quad (2.1.5)$$

Do qual origina-se o elemento $\sigma_i\sigma_j$, anticomutativo, chamado bivector, o qual tem magnitude, direção e sentido, como um segmento de área orientado, abaixo exemplificado na Fig.1

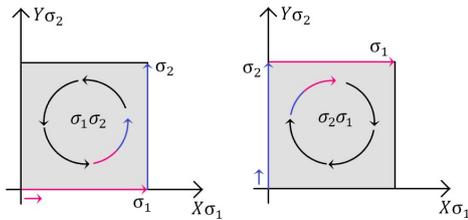


Fig. 1 Unidade bivectora em Castro-Núñez (2013).

Aplicando-se o axioma (2.1.5) ao produto geométrico (2.1.4) obtém-se no domínio geométrico de Clifford $CI(\mathbf{R}^2)$:

$$VW = (v_1w_1 + v_2w_2) + (v_1w_2 - v_2w_1)\sigma_1\sigma_2 \quad (2.1.6)$$

Portanto, um escalar, que corresponde ao produto interno e um bivector, que corresponde ao produto externo.

O produto externo da álgebra geométrica estende o conceito de número imaginário para um sistema de n-dimensões.

Conforme Hestenes e Sobczyk (1984), a propriedade de contração, apresentada abaixo, é que diferencia a álgebra geométrica de Clifford de outras álgebras associativas, ao definir que o quadrado de vetores não nulos seja positivo.

$$a^2 = aa = a \cdot a = \|a\|^2 \quad (2.1.7)$$

onde: a é um vetor e $\|a\|$ é um escalar positivo que corresponde a magnitude ou norma do vetor a .

Assim sendo, a propriedade acima proporciona uma medida de comprimento de vetores, no espaço vetorial de Clifford $CI(\mathbf{R}^2)$ que é a mesma do espaço vetorial euclidiano \mathbf{R}^2 . Seja o vetor $a = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2$, um vetor qualquer de \mathbf{R}^2 , aplicando-se (2.1.7) e (2.1.5) obtém-se a norma no domínio de Clifford:

$$\begin{aligned} a^2 &= a_1^2\sigma_1^2 + a_1a_2\sigma_1\sigma_2 + a_2a_1\sigma_2\sigma_1 + a_2^2\sigma_2^2 = a_1^2 + a_2^2 \\ a^2 &= \|a\|^2 \Rightarrow \|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 \Rightarrow \|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

2.2 A Álgebra de Clifford e as frequências harmônicas

A transformação proposta por Steinmetz (1897) para o domínio da frequência, não se aplica a circuitos com sinais n-senoidais, pois a informação da frequência angular é perdida. Abaixo se vê dois sinais distintos no domínio do tempo que são representados pelo mesmo número complexo.

$$\begin{aligned} v(t) &= 100\sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ) \rightarrow V_1 = 100e^{-j90^\circ} = -j100 \\ v(t) &= 100\sqrt{2} \cos(3\omega t - 90^\circ) \rightarrow V_3 = 100e^{-j90^\circ} = -j100 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Buscando preencher a ligação entre os domínios do tempo e da frequência, alguns pesquisadores, como Castro-Núñez (2013) e Castilla et al. (2008) utilizaram a álgebra geométrica de Clifford, por ter as bases necessárias para representar sinais periódicos não senoidais.

As transformações propostas em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012), se apresentam como um produto das bases do sistema, em função da ordem harmônica n , conforme equações abaixo:

$$\begin{cases} x_c(t) = \sqrt{2} \cos(\omega t) \leftrightarrow \sigma_1 \\ x_s(t) = \sqrt{2} \sin(\omega t) \leftrightarrow -\sigma_2 \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$\begin{cases} x_{cn}(t) = \sqrt{2} \cos(n\omega t) \leftrightarrow \sigma_{cn} = \prod_{i=2}^{n+1} \sigma_i \\ x_{sn}(t) = \sqrt{2} \sin(n\omega t) \leftrightarrow \sigma_{sn} = \prod_{i=1, i \neq 2}^{n+1} \sigma_i \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Observa-se que a natureza dos elementos propostos para a frequência fundamental em (2.2.2) tratam-se de vetores, e ainda que, a transformação de seno foi definida como o negativo da base σ_2 . Enquanto a natureza dos elementos propostos em (2.2.3), um bivector para a segunda harmônica, onde $n=2$, e um trivector para a terceira harmônica, onde $n=3$, sendo estes, incoerentes com o domínio do tempo.

No domínio do tempo, os sinais de excitação senoidais, são sempre representados por vetores, diferenciando-se apenas a velocidade angular entre a frequência fundamental e suas respectivas harmônicas, bem como, o módulo dos vetores.

Apresenta-se, neste trabalho, outra forma de representar as componentes, de tensão ou corrente, senoidais de frequência fundamental e frequências harmônicas no domínio da álgebra geométrica. Bem como, propõem-se pela primeira vez, um operador de rotação distinto para cada frequência, o qual estende o conceito de número complexo para n-dimensões. As transformações propostas são:

$$x_c(t) = \sqrt{2} \cos(n\omega t) \leftrightarrow \sigma_{(2n-1)} \quad (2.2.4)$$

$$x_s(t) = \sqrt{2} \sin(n\omega t) \leftrightarrow -\sigma_{(2n)} \quad (2.2.5)$$

as quais mostram-se equivalentes, inclusive para a frequência fundamental com $n=1$, eliminando-se a necessidade de duas definições para cada função, como proposto por Castro-Núñez e Castro-Puche (2012) em (2.2.2) e (2.2.3).

onde: $x_{-}(t)$ = sinal cosseno ou seno, de tensão ou corrente, na frequência ($n\omega$), $\sigma_{(2n-1)} \rightarrow$ sinal cosseno no domínio da álgebra geométrica, de tensão ou corrente, na frequência ($n\omega$), e $\sigma_{(2n)} \rightarrow$ sinal seno no domínio da álgebra geométrica, de tensão ou corrente, na frequência ($n\omega$).

Além disso, com as transformações propostas neste trabalho, a natureza dos sinais de excitação senoidais no domínio de Clifford são sempre vetores, portanto, em conformidade com o domínio do tempo.

As funções cosseno e seno na frequência fundamental do domínio do tempo são mapeadas para o domínio geométrico como vetores $x\sigma_1$ e $y\sigma_2$, respectivamente. Assim sendo, o produto dos vetores acima por $\sigma_1\sigma_2$ produz uma defasagem (rotação) de 90° no domínio geométrico de Clifford.

Neste trabalho propõem-se um operador de rotação $\sigma_{(2n-1)(2n)}$, para cada frequência ($n\omega$), abaixo definido e utilizando-se da propriedade acima descrita:

$$\sigma_{(2n-1)} \wedge \sigma_{(2n)} = \sigma_{(2n-1)(2n)} \quad (2.2.6)$$

A transformação e o operador de rotação propostos neste trabalho, estendem a transformação proposta por Steinmetz (1897) para o regime periódico não senoidal, utilizando-se das propriedades da álgebra geométrica e de um sistema multivetorial. Dando-se origem a um sistema, no domínio de Clifford, totalmente coerente com as operações em regime não senoidal, no domínio do tempo.

Apresentam-se, como exemplo, na Fig. 2 abaixo, as transformações e os operadores de rotação para as frequências fundamental $n=1$, e segunda harmônica $n=2$.

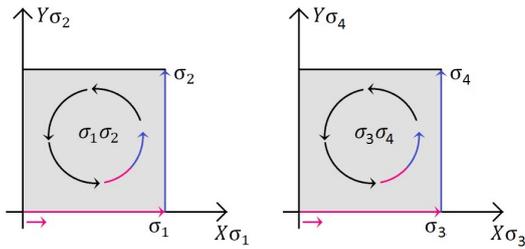


Fig. 2 Sistema multivetorial, adaptado de Castro-Núñez (2013).

Uma consequência da álgebra de Clifford é que utilizando-se do axioma (2.1.5) o quadrado de bivectores, como $\sigma_1\sigma_2$, resultam em -1, tal como $(\sigma_1\sigma_2)^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_1 = -(\sigma_1)^2 = -I$, o que é coerente com a definição da unidade imaginária j dos números complexos, tal que $j^2 = (\sigma_1\sigma_2)^2 = -1$. Assim sendo, pode-se reescrever as expressões para as reatâncias indutiva e capacitiva do domínio complexo para o domínio da álgebra geométrica, obtendo-se:

$$X_L = wL\sigma_1\sigma_2 \quad X_C = \frac{-\sigma_1\sigma_2}{wC} \quad (2.2.7)$$

Contudo, neste trabalho propomos a introdução de um operador de rotação (2.2.6) para cada frequência, portanto, as reatâncias indutiva e capacitiva ficam assim definidas:

$$X_L = wL\sigma_{(2n-1)}\sigma_{(2n)} \quad X_C = \frac{-\sigma_{(2n-1)}\sigma_{(2n)}}{wC} \quad (2.2.8)$$

onde: $\sigma_{(2n-1)(2n)} \rightarrow$ operador de rotação, $X_L =$ reatância indutiva em Ohm, $X_C =$ reatância capacitiva em Ohm, n é a ordem da frequência harmônica sendo considerada.

2.3 Potência como Produto Geométrico e Multivetor.

A equação da potência no domínio de Clifford é definida como um multivetor M . O multivetor potência como em Castro-Núñez et al. (2019) pode conter um escalar, um vetor, um bivector, por exemplo: $4, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2, \sigma_5\sigma_6$, dependendo apenas dos sinais seno ou cosseno e da ordem da maior frequência harmônica presente no circuito.

As equações que definem o multivetor potência são apresentadas abaixo:

$$M = VI = V \cdot I + VA I \quad (2.3.1)$$

onde: $M =$ potência no domínio de Clifford em VA, $V =$ vetor de tensão no domínio de Clifford, e $I =$ vetor de corrente no domínio de Clifford.

A aplicação dos produtos interno e externo da álgebra geométrica, resulta em produtos escalares e produtos de ordem k , os quais são agrupados da forma:

$$M = \sum_{k=0}^n \langle \rangle_k \quad (2.3.2)$$

Onde $k=0$ representa um escalar (potência ativa), $k=1$ um vetor, $k=2$ um bivector e assim sucessivamente, então o multivetor será:

$$M = \langle \rangle_0 + \langle \rangle_1 + \langle \rangle_2 + \dots + \langle \rangle_n \quad (2.3.3)$$

O reverso de um multivetor M é indicado conforme apresentado abaixo:

$$M^\dagger = \sum_k (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \cdot \langle M \rangle_k \quad (2.3.4)$$

O reverso do multivetor permite encontrar a norma do multivetor que é definida por:

$$\|M\| = \sqrt{\langle M \cdot M^\dagger \rangle_0} \quad (2.3.5)$$

onde: $\langle M \cdot M^\dagger \rangle_0$ representa a parte escalar do multivetor de potência M .

No entanto, como este trabalho estende a proposta de Steinmetz (1897) para o domínio de Clifford, faz-se necessário utilizar-se do conceito de conjugado, pois, caso contrário, não haveria compatibilidade com a convenção de sinais para as potências capacitiva e indutiva, exatamente como ocorre com a transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência. Portanto:

$$M = VI^* = V \cdot I^* + VA I^* \quad (2.3.6)$$

3. APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Nesta seção será utilizado o circuito da Fig. 3 abaixo, Castro-Núñez e Castro-Puche (2012), para desenvolvimento das soluções no domínio do tempo e no domínio de Clifford.

O objetivo deste exemplo é mostrar uma aplicação utilizando a metodologia proposta neste trabalho para o domínio de Clifford e evidenciar que conduz ao mesmo resultado obtido no domínio do tempo.

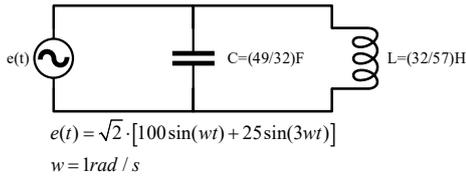


Fig. 3 Circuito usado para demonstrar as análises nos domínios do tempo e da frequência.

3.1 Resolução no Domínio do Tempo

Em função das unidades utilizadas serem as unidades padrão do SI, elas serão omitidas ao longo deste trabalho.

Realizando-se os cálculos no domínio do tempo, para cada sinal de excitação do circuito da Fig. 3, na frequência fundamental obtém-se os seguintes resultados para as correntes (valores máximos):

$$I_C(\omega t) = \frac{4900\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)}{32} \quad (3.1.2)$$

$$I_L(\omega t) = \frac{5700\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)}{32} \quad (3.1.3)$$

Considerando-se que as correntes no capacitor e no indutor estão defasadas de 180° , isto possibilita a simples soma algébrica entre estas correntes, dando como resultado uma única parcela, que será capacitiva ou indutiva, em função do módulo de cada componente. Na frequência fundamental o módulo de I_L é maior, logo a resultante da corrente é indutiva.

Os cálculos para o terceiro harmônico produzem:

$$I_C(3\omega t) = \frac{3675\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t + 90^\circ)}{32} \quad (3.1.4)$$

$$I_L(3\omega t) = \frac{1425\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t - 90^\circ)}{96} \quad (3.1.5)$$

onde: $I_C(kt)$ = corrente no capacitor na frequência (ω) ou (3ω), e $I_L(kt)$ = corrente no indutor na frequência (ω) ou (3ω).

Fazendo-se a mesma consideração acima, verifica-se que para a frequência de 3ω o módulo da corrente capacitiva I_C é maior que a indutiva, logo a resultante da corrente é capacitiva.

Abaixo apresentam-se as correntes resultantes na carga para as tensões nas frequências fundamental e terceiro harmônico, respectivamente:

$$I_{(\omega t)} = 25\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \quad (3.1.6)$$

$$I_{(3\omega t)} = 100\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t + 90^\circ) \quad (3.1.7)$$

Para o cálculo da potência instantânea no domínio do tempo $S(t)$, realiza-se o produto entre tensões e correntes abaixo indicado:

$$S_{(t)} = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2} [100 \sin(\omega t) + 25 \sin(3\omega t)] \cdot \\ \left[25\sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) + 100\sqrt{2} \cdot \sin(3\omega t + 90^\circ) \right] \end{array} \right\} \quad (3.1.8)$$

Realizando-se os produtos de tensões e correntes acima, utilizando-se das propriedades trigonométricas $\text{seno}(a+b)$ e $\text{seno}(a-b)$, encontram-se as potências instantâneas fornecidas pelas fontes. No domínio do tempo se obtém:

$$\begin{aligned} S(t) &= P + S_{11}(t) + S_{13}(t) + S_{31}(t) + S_{33}(t) \\ S_{11}(t) &= -2500 \cdot [2 \sin(\omega t) \cos(\omega t)] \\ S_{13}(t) &= 10^4 \cdot [2 \sin(\omega t) \cos(3\omega t)] \\ S_{31}(t) &= -625 \cdot [2 \sin(3\omega t) \cos(\omega t)] \\ S_{33}(t) &= 2500 \cdot [2 \sin(3\omega t) \cos(3\omega t)] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

onde: $P=0W$ e $S_{ij}(t)$ = produto entre tensão e corrente nas frequências (ω) e (3ω).

Aplicando-se (1.3.8) aos resultados das potências instantâneas eficazes obtidas em (3.1.9), calcula-se:

$$S = \sqrt{(-2500)^2 + (10^4)^2 + (-625)^2 + 2500^2} = 10625VA \quad (3.1.10)$$

Aplicando-se (1.3.8) apenas às parcelas S_{11} e S_{33} que correspondem a energia reativa Q nas frequências fundamental e terceiro harmônico, calcula-se:

$$Q = \sqrt{(-2500)^2 + 2500^2} = 3535,53VAr \quad (3.1.11)$$

Aplicando-se (1.3.8) apenas às parcelas S_{13} e S_{31} que correspondem a energia distorciva D nas frequências cruzadas, calcula-se:

$$D = \sqrt{(10^4)^2 + (-625)^2} = 10019,51VAr \quad (3.1.12)$$

Portanto, fica evidente a capacidade de análise de sistemas monofásicos não senoidais no domínio do tempo.

3.1.1 Resolução com o método de Budeanu.

A Potência Reativa de Budeanu é calculada pela soma das potências reativas individuais de cada ordem harmônica, conforme (1.1.2). No circuito apresentado anteriormente, as potências calculadas em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012), apresentaram os resultados: potência reativa na frequência fundamental $Q = j2500 \text{ VAr}$ e potência reativa no terceiro harmônico é $Q = -j2500 \text{ VAr}$.

Assim sendo, aplicando-se (1.1.2) às potências reativas acima, obtém-se $Q_B = 0 \text{ VAr}$.

O que está incoerente, pois as potências são de frequências distintas e não se compensam neste circuito como previsto pela teoria de Budeanu.

3.2 Resolução no Domínio da Álgebra de Clifford.

Aplicando-se a transformação proposta (2.2.5) aos sinais de tensão no domínio do tempo do circuito da Fig. 3, obtém-se os sinais de tensão no domínio de Clifford, resultando em:

$$\begin{aligned} \sin(n\omega t) &\leftrightarrow -\sigma_{(2n)} \rightarrow n=1 \rightarrow -\sigma_2, n=3 \rightarrow -\sigma_6 \\ v_1(t) &= 100\sqrt{2} \sin(\omega t) \rightarrow V_1 = -100\sigma_2 \\ v_3(t) &= 25\sqrt{2} \sin(3\omega t) \rightarrow V_3 = -25\sigma_6 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Considerando-se que, com o operador de rotação proposto neste trabalho, as reatâncias indutiva e capacitiva foram definidas em (2.2.8) como:

$$X_L = wL\sigma_{(2n-1)}\sigma_{(2n)} \quad X_C = \frac{-\sigma_{(2n-1)}\sigma_{(2n)}}{wC} \quad (3.2.2)$$

Levando-se em consideração os sinais de frequência com $n=1$ e $n=3$ obtém-se os operadores de rotação das reatâncias:

$$n=1 \rightarrow \sigma_1\sigma_2 \quad n=3 \rightarrow \sigma_3\sigma_6 \quad (3.2.3)$$

Realizando-se os cálculos no domínio de Clifford, com as definições acima, para a frequência $\omega = 1\text{rad/s}$ obtém-se as seguintes correntes no capacitor e no indutor:

$$I_{C(w)} = \frac{-100\sigma_2}{-\sigma_1\sigma_2} = \frac{-4900\sigma_2}{-32\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{4900\sigma_1}{32} \cdot \frac{49}{32} \quad (3.2.4)$$

$$I_{L(w)} = \frac{-100\sigma_2}{1 \cdot \frac{32\sigma_1\sigma_2}{57}} = \frac{-5700\sigma_2}{32\sigma_1\sigma_2} \cdot \frac{-\sigma_1\sigma_2}{-\sigma_1\sigma_2} = \frac{-5700\sigma_1}{32} \quad (3.2.5)$$

Como as correntes no indutor e no capacitor estão em fases opostas para a mesma frequência, é possível a soma algébrica de seus módulos no domínio de Clifford, obtendo-se:

$$I_{(w)} = I_{C(w)} + I_{L(w)} = -25\sigma_1 \quad (3.2.6)$$

Realizando-se os cálculos no domínio de Clifford, com as definições acima, para a frequência $\omega = 3\text{rad/s}$ obtém-se as seguintes correntes no capacitor e no indutor:

$$I_{C(3w)} = \frac{-25\sigma_6}{-\sigma_3\sigma_6} = \frac{-3675\sigma_6}{-32\sigma_3\sigma_6} \cdot \frac{\sigma_3\sigma_6}{\sigma_3\sigma_6} = \frac{3675\sigma_3}{32} \cdot \frac{49}{32} \quad (3.2.7)$$

$$I_{L(3w)} = \frac{-25\sigma_6}{3 \cdot \frac{32\sigma_3\sigma_6}{57}} = \frac{-475\sigma_6}{32\sigma_3\sigma_6} \cdot \frac{-\sigma_3\sigma_6}{-\sigma_3\sigma_6} = \frac{-475\sigma_3}{32} \quad (3.2.8)$$

Como as correntes no indutor e no capacitor estão em fases opostas para a mesma frequência, é possível a soma algébrica de seus módulos no domínio de Clifford, obtendo-se:

$$I_{(3w)} = I_{C(3w)} + I_{L(3w)} = 100\sigma_3 \quad (3.2.9)$$

A corrente total da carga do circuito obtém-se com a soma de (3.2.6) e (3.2.9) resultando em:

$$I_s = -25\sigma_1 + 100\sigma_3 \quad (3.2.10)$$

Levando-se em consideração que com a metodologia proposta para o operador de rotação, o número imaginário se estende para circuitos n-senoidais, a corrente do circuito também apresentará um valor conjugado, resultando em:

$$I_s^* = +25\sigma_1 - 100\sigma_3 \quad (3.2.11)$$

Aplicando-se (2.3.6), nas tensões em (3.2.1) e na corrente conjugada em (3.2.11), calculam-se as parcelas de potências no domínio de Clifford fornecidas pelas fontes do circuito. No entanto, designando-se a potência como S (e não M) por ser usual na engenharia elétrica.

$$S = VI_s^* \quad (3.2.12)$$

$$S = (-100\sigma_2 - 25\sigma_6) \cdot (+25\sigma_1 - 100\sigma_3)$$

$$S = -2500\sigma_2\sigma_1 + 10^4\sigma_2\sigma_3 - 625\sigma_6\sigma_1 + 2500\sigma_6\sigma_3 \quad (3.2.13)$$

Observa-se que este resultado é exatamente o mesmo obtido no domínio do tempo, diferindo apenas no fato de que apresenta valores eficazes e não máximos. A interpretação dos resultados em (3.2.13), com a transformação proposta, é imediata, considerando-se que $\cos(n\omega t) \rightarrow \sigma_{(2n-1)}$ e que $\sin(n\omega t) \rightarrow \sigma_{(2n)}$ então, para $n=1$ obtém-se σ_1 e σ_2 e para $n=3$ obtém-se σ_3 e σ_6 respectivamente.

Logo, obtém-se uma correspondência direta e exata com o domínio do tempo, conforme verifica-se em (3.1.9) reescrito abaixo:

$$\begin{aligned} S_{11}(t) &= -2500 \cdot [2\sin(\omega t)\cos(\omega t)] \rightarrow \sigma_2\sigma_1 \\ S_{13}(t) &= 10^4 \cdot [2\sin(\omega t)\cos(3\omega t)] \rightarrow \sigma_2\sigma_3 \\ S_{31}(t) &= -625 \cdot [2\sin(3\omega t)\cos(\omega t)] \rightarrow \sigma_6\sigma_1 \\ S_{33}(t) &= 2500 \cdot [2\sin(3\omega t)\cos(3\omega t)] \rightarrow \sigma_6\sigma_3 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Concluindo-se a análise de potência aparente, aplica-se (2.3.4) a cada parcela do multivetor (3.2.13), calculando-se o reverso do multivetor potência:

$$S_{21}^\dagger = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}} \cdot [(-2500\sigma_2\sigma_1)_2] = +2500\sigma_2\sigma_1 \quad (3.2.14)$$

onde: $k=2$ dado que as parcelas são bivectores.

Assim sendo, como as quatro parcelas do multivetor correspondem a bivectores, haverá a inversão de sinal em todas as parcelas, obtendo-se:

$$S^\dagger = +2500\sigma_2\sigma_1 - 10^4\sigma_2\sigma_3 + 625\sigma_6\sigma_1 - 2500\sigma_6\sigma_3 \quad (3.2.15)$$

Para se calcular a norma do multivetor aplica-se (2.3.5) aos resultados (3.2.13) e (3.2.15), obtendo-se:

$$\|S\| = \sqrt{\langle S \cdot S^\dagger \rangle_0} \quad (3.2.16)$$

$$S = \sqrt{\left\langle \begin{aligned} &(-2500\sigma_2\sigma_1 + 10^4\sigma_2\sigma_3 - 625\sigma_6\sigma_1 + 2500\sigma_6\sigma_3) \cdot \\ &(2500\sigma_2\sigma_1 - 10^4\sigma_2\sigma_3 + 625\sigma_6\sigma_1 - 2500\sigma_6\sigma_3) \end{aligned} \right\rangle_0}$$

Levando-se em consideração que na equação acima interessamos apenas a parte escalar da multiplicação, a equação se reduz ao apresentado abaixo:

$$S = \sqrt{2500^2 + (10^4)^2 + 625^2 + 2500^2} = 10625VA \quad (3.2.17)$$

Portanto, verifica-se que foi obtido no domínio de Clifford, resultado idêntico ao domínio do tempo, para a potência aparente total na fonte.

Analisando-se no domínio de Clifford, aplica-se (2.3.5) e calcula-se a norma de Q com os valores de potência reativa em (3.2.13), obtendo-se:

$$\|Q\| = \sqrt{\langle Q \cdot Q^\dagger \rangle_0} = \sqrt{\left\langle \begin{aligned} &(-2500\sigma_2\sigma_1 + 2500\sigma_6\sigma_3) \cdot \\ &(2500\sigma_2\sigma_1 - 2500\sigma_6\sigma_3) \end{aligned} \right\rangle_0} \quad (3.2.18)$$

$$Q = \sqrt{2500^2 + 2500^2} = 3535,53VAr$$

Levando-se em consideração que a base do sistema é ortonormal, portanto, os valores estão em quadratura e que a potência ativa é nula ($R=0\Omega$), aplica-se (1.1.3) e calcula-se a potência de distorção D :

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = \sqrt{10625^2 - 0^2 - 3535,53^2}$$

$$D = 10019,51VAr \quad (3.2.19)$$

Analisando-se no domínio de Clifford, aplica-se (2.3.5) e calcula-se a norma de D com os valores de potências cruzadas em (3.2.13), obtendo-se:

$$\|D\| = \sqrt{\langle D \cdot D^* \rangle_0} = \sqrt{\left\langle \left(\begin{array}{l} (10^4 \sigma_2 \sigma_5 - 625 \sigma_6 \sigma_1) \cdot \\ (-10^4 \sigma_2 \sigma_5 + 625 \sigma_6 \sigma_1) \end{array} \right) \right\rangle_0} \quad (3.2.20)$$

$$D = \sqrt{(10^4)^2 + 625^2} = 10019,51VAr$$

O que está de acordo com a consideração das potências em quadratura em (3.2.19). Portanto, fica evidente que os valores de potência no domínio do tempo são encontrados no domínio de Clifford, utilizando-se da transformação e operador de rotação propostos.

Verifica-se que os resultados obtidos em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012), no domínio de Clifford, divergem dos resultados encontrados no domínio do tempo, os quais são a base de comparação para qualquer sistema, abaixo apresenta-se a Tabela 1 sintetizando os resultados.

Tabela 1. Análise da Potência – Estudo de caso

Resultados obtidos neste artigo		Castro-Núñez (2012)	
Termos de Potência	Domínio do tempo	Domínio de Clifford	Domínio de Clifford
S ₁₁	$-2500 \cdot \begin{bmatrix} 2 \sin(wt) \cdot \\ \cos(wt) \end{bmatrix}$	$-2500 \sigma_2 \sigma_1$	*
S ₁₃	$10^4 \cdot \begin{bmatrix} 2 \sin(wt) \cdot \\ \cos(3wt) \end{bmatrix}$	$10^4 \sigma_2 \sigma_5$	*
S ₃₁	$-625 \cdot \begin{bmatrix} 2 \sin(3wt) \cdot \\ \cos(wt) \end{bmatrix}$	$-625 \sigma_6 \sigma_1$	*
S ₃₃	$2500 \cdot \begin{bmatrix} 2 \sin(3wt) \cdot \\ \cos(3wt) \end{bmatrix}$	$2500 \sigma_6 \sigma_5$	*
	$S(t) = P$ +S ₁₁ (t) +S ₁₃ (t) +S ₃₁ (t) +S ₃₃ (t)	$S =$ $-2500 \sigma_2 \sigma_1$ $+10^4 \sigma_2 \sigma_5$ $-625 \sigma_6 \sigma_1$ $+2500 \sigma_6 \sigma_5$	$M_S =$ $-5000 \sigma_1 \sigma_2$ $-10625 \sigma_3 \sigma_4$
	$\ S\ =$ $\sqrt{2500^2}$ $\sqrt{+(10^4)^2}$ $\sqrt{+625^2}$ $\sqrt{+2500^2}$	$\ S\ =$ $\sqrt{2500^2}$ $\sqrt{+(10^4)^2}$ $\sqrt{+625^2}$ $\sqrt{+2500^2}$	$\ M_S\ =$ $\sqrt{5000^2}$ $\sqrt{+10625^2}$
S(VA)	10625	10625	11742,7

onde: * indica não apresentado em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012) e $P=0W$.

Embora, não apresentado em detalhes em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012), é possível verificar-se que no multivetor M_S as parcelas S_{11} e S_{33} foram consideradas como sendo de mesma natureza, pois, com as transformações propostas no referido trabalho, ambas parcelas resultam em $\sigma_1 \sigma_2$ e, portanto, foram adicionadas algebricamente resultando em $-5000 \sigma_1 \sigma_2$. Assim como, as parcelas S_{13} e S_{31} também foram consideradas como sendo de mesma natureza, pois, com as transformações propostas no referido trabalho, ambas parcelas resultam em $\sigma_3 \sigma_4$ e, portanto, foram adicionadas algebricamente resultando em $-10625 \sigma_3 \sigma_4$.

Neste trabalho calcula-se em (3.2.12) a potência total no domínio de Clifford $S=VI^*$, fornecida pela fonte, a partir da corrente total, entretanto, em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012) segue-se outro caminho e calcula-se a potência total adicionando-se as potências indutiva e capacitiva do multivetor $M_S = M_L + M_C$, o qual, pelo princípio da superposição, deveria conduzir ao mesmo resultado obtido no domínio do tempo, o que não ocorreu, conforme apresentado na Tabela 1 acima.

Apenas para ilustrar-se a diferença, apresenta-se abaixo os resultados para o multivetor $M_S = M_L + M_C$, utilizando-se as transformações propostas neste trabalho:

$$M_L = (V_1 + V_3) \cdot (I_{L(w)}^* + I_{L(3w)}^*)$$

$$M_L = (-100 \sigma_2 - 25 \sigma_6) \cdot \left(\frac{+5700 \sigma_1}{32} + \frac{+475 \sigma_5}{32} \right)$$

$$M_L = \frac{-57 \cdot 10^4}{32} \sigma_2 \sigma_1 - \frac{47500}{32} \sigma_2 \sigma_5 -$$

$$\frac{25 \cdot 5700}{32} \sigma_6 \sigma_1 - \frac{25 \cdot 475}{32} \sigma_6 \sigma_5 \quad (3.2.21)$$

Confirma-se, portanto, a ocorrência de quatro parcelas distintas no multivetor potência.

$$M_C = (V_1 + V_3) \cdot (I_{C(w)}^* + I_{C(3w)}^*)$$

$$M_C = (-100 \sigma_2 - 25 \sigma_6) \cdot \left(\frac{-4900 \sigma_1}{32} + \frac{-3675 \sigma_5}{32} \right)$$

$$M_C = \frac{49 \cdot 10^4}{32} \sigma_2 \sigma_1 + \frac{367500}{32} \sigma_2 \sigma_5 +$$

$$\frac{25 \cdot 4900}{32} \sigma_6 \sigma_1 + \frac{25 \cdot 3675}{32} \sigma_6 \sigma_5 \quad (3.2.22)$$

Adicionando-se algebricamente as quatro parcelas de mesma natureza nos multivetores acima, obtém-se:

$$M_S = M_L + M_C$$

$$M_S = -2500 \sigma_2 \sigma_1 + 10^4 \sigma_2 \sigma_5 - 625 \sigma_6 \sigma_1 + 2500 \sigma_6 \sigma_5 \quad (3.2.23)$$

Obtendo-se o mesmo resultado alcançado em (3.2.13) e que está coerente com o resultado no domínio do tempo.

Logo, o multivetor potência obtido em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012), e transcrito abaixo:

$$M_S = -5000 \sigma_1 \sigma_2 - 10625 \sigma_3 \sigma_4 \quad (3.2.24)$$

apresenta apenas duas parcelas distintas, quando o domínio do tempo e o domínio de Clifford, com a transformação e

operador de rotação propostos neste trabalho, resultam em quatro parcelas distintas.

Portanto, quando comparadas ao domínio do tempo, as transformações propostas em Castro-Núñez e Castro-Puche (2012) não são suficientes para discriminar de forma inequívoca as distintas parcelas de potência, resultando então, em uma potência aparente que diverge da potência aparente no domínio do tempo.

4. CONCLUSÕES

Com a transformação e operador de rotação propostos neste trabalho, fica evidente a capacidade da álgebra geométrica de Clifford em absorver completamente a álgebra dos números complexos e, portanto, estender a análise de circuitos elétricos monofásicos em regime não senoidal de forma simples e eficaz.

A forma proposta neste trabalho para a transformação e operador de rotação, estendem o conceito de Steinmetz (1897), de sistemas senoidais, para sistemas monofásicos em regime não senoidais, de forma inequívoca e imediata, o que pode não acontecer em outras propostas, onde os resultados de potência no domínio de Clifford não correspondem aos resultados de potência no domínio do tempo, visto que, a estratificação das parcelas nas bases do sistema (sigmas) não se apresentam coerentes.

O resultado das potências no domínio do tempo é alcançado no domínio de Clifford, porém, em função da transformação e operador de rotação propostos neste trabalho, com um esforço de cálculo incomparavelmente menor que o domínio do tempo, inclusive, não sendo necessário recorrer a operações trigonométricas.

Neste trabalho buscou-se apresentar a fundamentação teórica necessária de ambos os domínios, bem como, demonstrar todas as etapas de cálculo necessárias para o completo entendimento da passagem do domínio do tempo para o domínio de Clifford, objetivando esclarecer este assunto ainda pouco difundido.

AGRADECIMENTOS

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia – FAPESB pela concessão da bolsa de estudos, tornando possível a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Akagi, H., Y. Kanazawa and A. Nabae, (1983), "Generalized Theory of the Instantaneous Reactive Power in Three-Phase Circuits," IPEC – International Power Electronics Conference, Tokyo, pp. 1375-1386.
- Budeanu, C. I. (1927), "Puissances Reactives et Fictives," Institute Romain de Energie, no. 2.
- Castilla, M., Juan Carlos Bravo, M. Ordóñez, and Juan Carlos Montaña, (2008), "Clifford Theory A Geometrical Interpretation of Multivectorial Apparent Power" IEEE

Transactions On Circuits and Systems-I: Regular Papers, Vol. 55, No. 10, November

- Castro-Núñez, M., (2013), 'The use of geometric algebra in the analysis of non-sinusoidal networks and the construction of a unified power theory for single phase systems – a paradigm shift', University of Calgary
- Castro-Núñez, M., R. Castro-Puche, (2012), "Advantages of Geometric Algebra Over Complex Numbers in the Analysis of Networks With Nonsinusoidal Sources and Linear Loads," *IEEE Transactions On Circuits and Systems-I: Regular Papers*, Vol. 59, No. 9, September.
- Castro-Núñez, M., Londoño-Monsalve, D., Castro-Puche, R. (2019), "Theorems of compensation and Tellegen in non-sinusoidal circuits via geometric algebra", *The Journal of Engineering*, Vol. 2019 Iss. 4, pp. 3409-3417.
- Chappell et al. (2014), "Geometric Algebra for Electrical and Electronic Engineers" *Proceedings of the IEEE*, Vol. 102, No. 9, September.
- Czarnecki, L. S. (1988), "Orthogonal Decomposition of the Currents in a 3-phase Nonlinear Asymmetrical Circuit with a Nonsinusoidal Voltage Source," *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, vol. 1, no. 37, pp. 30–34.
- Fryze, S. (1932), "Wirk-, Blind- und Scheinleistung in Elektrischen Stromkreisen mit Nichtsinusförmigem Verlauf von Strom und Spannung," *ETZ-A Elektrotech Zeitschrift*, vol. 53, no. 25, pp. pp. 596-599, 625-627, 700-702.
- Hestenes, D., Sobczyk, G. (1984), "*Clifford Algebra to Geometric Calculus - A Unified Language for Mathematics and Physics*", D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.
- IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions, IEEE Std 1459-2010 (Revision of IEEE Std 1459-2000), pp. 1 -40, 19 March 2010
- Jancewicz, B. (1988), *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*. Singapore: World Science.
- Shepherd, W., Zakikhani, P. (1972), "Suggested Definitions of Reactive Power for Nonsinusoidal Systems," *IEEE Proceedings*, vol. 9, no. 119, pp. 1361–1362.
- Steinmetz, C. P. (1897), *Theory and Calculation of Alternating Current Phenomena*. New York: McGraw-Hill.