

---

# ESTRATÉGIAS ADAPTATIVAS EM SOCIEDADES DE FORMIGAS

Renato Bevilacqua<sup>1</sup>, Marcos Casado Castaño<sup>1</sup>,

Luiz Henrique Alves Monteiro<sup>2,1</sup>, José Roberto Castilho Piqueira<sup>1</sup>

(1) Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Dep. Engenharia Eletrônica - Laboratório de Automação e Controle  
Av. Prof. Luciano Gualberto, trav. 03, 158  
CEP 05508-900 – São Paulo – SP – Brasil

(2) Universidade Presbiteriana Mackenzie  
Pós-Graduação – Engenharia Elétrica  
Rua da Consolação, 896, 5o andar  
CEP 01302-000 – São Paulo – SP – Brasil

---

**Resumo** Nós analisamos o modelo proposto por Deneubourg *et alii*, 1983 (J. Theor. Biol., 105, 259-271) para estudar a estratégia empregada por sociedades de formigas na captura de alimento. Esse modelo sugere que há um determinado grau de aleatoriedade na comunicação das formigas que minimiza o tempo de captura do alimento distribuído entre várias fontes. Discutimos como a idéia de auto-organização, subjacente a esse modelo, poderia ser aplicada na solução de problemas de automação e de otimização, e como a fidelidade da comunicação poderia ser usada para controlar o comportamento de sociedades de robôs.

**Abstract** We analyse a model proposed by Deneubourg *et alii*, 1983 (J. Theor. Biol., 105, 259-271) for studying the strategy used by ant societies in food recruitment. This model reveals that there is a level of randomness in ant communication that minimizes the time of food recruitment. We discuss how the concept of self-organization that comes with this model could be applied for solving automation and optimization problems, and how the communication fidelity might be used for controlling the behaviour of interactive robot societies.

## 1 INTRODUÇÃO

Comportamentos globais muito complicados podem resultar da interação de sistemas dinâmicos individuais muito simples. Esses comportamentos podem ser observados em vários sistemas biológicos, como, por exemplo, em colônias de insetos sociais. A visão tradicional sobre o comportamento desses insetos enxerga-os como pequenos seres autômatos que obedecem a um programa genético estritamente estabelecido. Assim, supõe-se que eles possuem uma quantidade de

“inteligência” individual suficiente para cooperarem de modo organizado. Essa visão se origina da idéia de que atividades complicadas estão necessariamente associadas a indivíduos complicados. Atualmente, uma nova interpretação vem ganhando força, segundo a qual os elementos aleatórios do meio ambiente e a maleabilidade do comportamento individual desempenham papéis fundamentais na organização do funcionamento (Deneubourg *et alii*, 1983; Deneubourg *et alii*, 1986) e da estruturação da sociedade (Franks e Franks, 1993; Bonebeau *et alii*, 1996).

O processo de procura e coleta de alimento realizado por colônias de formigas pode ser entendido como uma dessas atividades. O ambiente onde colônias de formigas vivem é mais ou menos previsível no tempo e no espaço. Pode-se comparar duas situações extremas em que fontes de alimento se apresentam: uma colônia de pulgões, como fonte durável (da ordem de meses), e um pássaro morto, que é uma fonte ocasional. A fim de explorar os pulgões, as formigas desenvolvem rotas estáveis entre o formigueiro e o ninho dos pulgões. Nessa situação, é benéfico que as formigas mantenham estruturas (rotas) permanentes com baixo nível de erro ou de flutuação, isto é, que poucas formigas “errem” o caminho (Deneubourg *et alii*, 1983; Deneubourg *et alii*, 1986).

Porém, depender de uma única fonte de alimento é muito arriscado para a sobrevivência da colônia. Assim, também é interessante explorar o pássaro morto, como fonte extra de alimento. Para isso, algumas formigas têm que “errar” o caminho original, isto é, deixar as rotas estáveis para que possam descobrir, ao acaso, a ave morta (Deneubourg *et alii*, 1983; Deneubourg *et alii*, 1986).

Na natureza, um ambiente variável pode dificultar o desenvolvimento e a manutenção de estruturas permanentes (rotas estáveis). Nessa situação, uma reação possível da sociedade é tentar eliminar as flutuações externas através de comportamentos apropriados, como estocagem de alimento e

---

Artigo Submetido em 11/09/1998

1a. Revisão em 25/02/1999; 2a. Revisão em 17/06/1999

Aceito sob recomendação do Ed. Consultor Prof. Dr. Liu Hsu

controle de temperatura. Outra reação possível é o desenvolvimento de estruturas temporárias geradas por um processo de auto-organização (Deneubourg *et alii*, 1983; Deneubourg *et alii*, 1986). Todos esses mecanismos favorecem a adaptação/adequação das formigas ao seu meio.

Nesse contexto, auto-organização significa que padrões de comportamento no nível social emergem espontaneamente a partir das interações entre os indivíduos. Esse processo é comparável à auto-organização descrita em fenômenos físico-químicos, em que, a partir de um determinado valor do parâmetro de controle, as não-linearidades intrínsecas ao sistema podem amplificar determinadas flutuações, causando o surgimento de padrões espaciais e/ou temporais nesse sistema. Exemplos clássicos são as células de convecção de Rayleigh-Bénard e reações químicas oscilantes tipo Belousov-Zhabotinski (Nicolis, 1987). No primeiro caso, a diferença de temperatura entre as placas que confinam um líquido determina o tipo de comportamento desse líquido. A partir de um valor crítico da diferença de temperatura entre as placas, o calor que era exclusivamente transportado (da placa quente para a placa fria) por condução, passa a ser transportado também por convecção. Assim, para uma diferença de temperatura menor que a crítica, o líquido tem uma velocidade macroscópica nula. Entretanto, para um valor acima do valor crítico, o líquido passa a girar, de modo que sua velocidade macroscópica torna-se não-nula. Outros exemplos de sistemas que podem ser considerados auto-organizantes são: um furacão, os ciclos de corrente no sol, o comportamento de plasmas confinados magneticamente em máquinas tipo tokamak (Kucinski, 1998), o movimento coletivo de cardumes de peixes (Niwa, 1994), o ciclo de vida da ameba *Dictyostelium discoideum* (Nicolis, 1987), a organização espacial do miocárdio observada durante o processo de fibrilação ventricular (Bayly *et alii*, 1998) etc.

Semelhantemente, o aparecimento de uma nova fonte de alimento perto do formigueiro pode provocar a transição de um padrão não-cooperativo de pesquisa aleatória do meio para um modo coletivo e cooperativo, em que cada vez mais formigas são recrutadas para integrar a trilha que conecta a fonte ao formigueiro.

As formigas, como outros seres vivos, desenvolveram interações e comunicações que podem apresentar graus diversos de aleatoriedade que variam com a espécie e com as condições do meio (Bruyn, 1977). Um desses sistemas é baseado na deposição de feromônio no percurso realizado, geralmente entre o formigueiro e a fonte de alimento. Feromônio é o hormônio produzido pelas formigas cuja função é estabelecer um padrão de identificação e de comunicação entre elas. Uma quantidade inicial de feromônio depositado na trilha fará com que essa trilha seja detectada por outras recrutas e, à medida que caminham pela trilha em direção à fonte de alimento, as formigas recém-atraídas também depositam feromônio. Tem-se, a partir daí, um processo de realimentação positiva no qual, quanto mais feromônio estiver presente na trilha, mais formigas perdidas serão atraídas e maior será a quantidade de feromônio depositado na trilha, deixando o sistema de comunicação mais determinístico (Pasteels *et alii*, 1987). Entretanto, apesar desse constante reforço de feromônio (necessário para compensar as perdas por evaporação), algumas formigas podem se afastar da trilha, o que impõe um certo nível de erro nesse sistema de comunicação.

Nossa proposta é analisar como o nível de erro durante a comunicação interfere no desenvolvimento e na eficiência do processo de recrutamento para a coleta de alimento, e

apresentar possíveis aplicações tecnológicas, pois uma sociedade de insetos assemelha-se a uma máquina eficiente, flexível e robusta, constituída por componentes “simples” (insetos).

## 2 APLICAÇÕES

As aplicações tecnológicas em engenharia baseiam-se em duas características da dinâmica de sociedades de formigas: a aleatoriedade do comportamento individual e a cooperação entre os agentes.

Um comportamento individual é definido como aleatório se, dentro de um determinado conjunto de decisões possíveis (por exemplo: ir em frente, virar à esquerda, virar à direita), a ação que será realizada pelo indivíduo é, a priori, imprevisível. Cooperação, nesse contexto, consiste no agrupamento de agentes que interagem durante a solução do problema, trocando informações ou “dicas”, normalmente indicando regiões a serem exploradas ou evitadas (Bilchev e Parmee, 1997).

Na área de automação, pode ser feita uma analogia entre uma equipe de robôs “simples” trabalhando em conjunto e uma sociedade de formigas (Deneubourg *et alii*, 1991). Ambos são flexíveis e robustos. Flexibilidade representa a habilidade de se lidar com situações imprevistas ou informações incorretas sem alterações significativas no seu comportamento. Robustez reflete-se na continuidade dos funcionamento da equipe, mesmo quando parte de seus componentes é danificada.

Em áreas como controle ótimo e programação matemática, esses indivíduos tornam-se “virtuais”, ou seja, seus comportamentos são descritos por algoritmos empregados como ferramentas de sistemas computacionais dinâmicos.

Não obstante, em ambas as áreas, para que essa equipe de robôs possa ser implementada, cada unidade deve atuar somente com informações do ambiente à sua volta ou de unidades próximas, sem a necessidade de um sistema central de controle. Dessa maneira, a “inteligência” fica distribuída, minimizando o problema de acúmulo de informação, que pode ser proibitivo em certas aplicações mais complexas.

Apresentam-se três aplicações nas quais se utilizam essas idéias.

### 2.1 Exploração coletiva

Muitas atividades técnicas podem ser definidas como o movimento harmonizado de veículos num ambiente heterogêneo e imprevisto. Esses veículos coletam informação (cartografia, pesquisa científica, segurança), objetos (mineração, limpeza, pesca) ou são combatentes (bombeiros, veículos militares). Considere apenas um caso muito simples, em que nossa equipe de veículos-robôs tem que se deslocar de um ponto a outro em um ambiente de difícil locomoção.

Os veículos se distribuem no espaço e sempre procuram o caminho mais fácil. Se um veículo progride facilmente, ele não muda sua direção, ao passo que, quando bloqueado, ele se move à direita ou à esquerda, a fim de encontrar uma região de progressão mais fácil. Adiciona-se uma comunicação entre os veículos, que pode ser, por exemplo, um sinal que atrai os demais. A potência desse sinal é correlacionada à velocidade do veículo, de modo que quanto maior sua velocidade, maior a intensidade do sinal. Assim, a topologia local do terreno modula a emissão do sinal.

Simulações mostram que, de início, os veículos agrupam-se em cadeias nas zonas de fácil progressão (Deneubourg *et alii*, 1991). Entretanto, se a velocidade de uma cadeia diminui, sua atratividade também diminui e seus membros começam a se dispersar e explorar o ambiente a sua volta. Quando um deles descobre um novo caminho, sua velocidade aumenta, atraindo os demais e formando uma nova cadeia.

## 2.2 Transporte

A relação entre comportamento coletivo e movimentos individuais é encontrada também em problemas de transporte. Especula-se sobre a possibilidade de uma frota de veículos – sem uma unidade central de controle – transportar objetos eficientemente entre inúmeros pontos diferentes, evitando colisões e adaptando-se a um número variável de objetos a transportar.

Nesse sistema, são necessárias interações de curto e de longo alcance entre as unidades para que se possa organizar o tráfego. Isso o torna essencialmente diferente do sistema de tráfego convencional, no qual um grande número de unidades (veículos automotores, em geral) com interações muito fracas obedecem às decisões de um comando central (semáforos, por exemplo).

Especula-se que, através dessas interações, cada unidade poderia ser capaz de se orientar sozinha, passando a fazer parte de um veículo coletivo grande e independente.

Essa idéia já está sendo testada em protótipos e talvez seja a solução futura para os problemas de trânsito das grandes cidades (Deneubourg *et alii*, 1991).

## 2.3 Problema do Caixeiro Viajante

O comportamento natural das formigas inspirou a construção de um algoritmo no qual um conjunto de “formigas” artificiais cooperam para a solução de um problema através da troca de informação via o feromônio depositado sobre as trilhas. Esse algoritmo tem sido aplicado em problemas de otimização combinatória, como o problema do caixeiro viajante (Dorigo e Gambarella, 1997). A analogia adotada advém do fato das formigas conseguirem restabelecer rotas interrompidas por obstáculos, de maneira que a nova rota é a mais curta possível. Nesse algoritmo, formigas “virtuais” são enviadas para várias cidades e, após cada interação, a quantidade de feromônio em cada trilha é atualizada proporcionalmente à distância percorrida pelas formigas, selecionando o percurso ótimo entre as cidades (Dorigo e Gambarella, 1996).

Uma recente extensão dessa idéia é a elaboração de um método de busca em espaços contínuos (Bilchev e Parmee, 1997). Modelando-se a vizinhança do formigueiro (ponto de partida) por uma estrutura discreta, chega-se a um sistema computacional dinâmico – conhecido como algoritmo Ant Colony – que é empregado para solucionar problemas de otimização em espaços contínuos. Simulações numéricas comprovam eficiência igual ou superior à de outros sistemas computacionais como o Simulated Annealing e o Algoritmo Genético (Bilchev e Parmee, 1997).

## 3 O MODELO

A partir deste item, apresentamos uma análise estendida do modelo para a exploração de alimentos proposto por Deneubourg *et alii* (1983), no sentido de compreender seu

significado físico e, a partir daí, ressaltar certas características de seu comportamento dinâmico. Nossa contribuição está na determinação e análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio na situação em que há várias fontes de alimento, e nas escolhas e aproximações feitas no cálculo dos parâmetros que representam a maneira pela qual as formigas interagem.

Inicialmente, é necessário uma descrição do recrutamento global. A descoberta de uma nova fonte de alimento requer a mobilização de formigas para garantir sua exploração eficiente. Os mecanismos pelos quais as sociedades de formigas conseguem reunir grandes quantidades de indivíduos nas fontes de comida constituem o recrutamento de alimento. Certamente, o recrutamento de alimento está relacionado com o recrutamento de indivíduos. Dessa forma, seria correto nos referirmos ao processo de recrutamento como sendo o recrutamento de formigas para a coleta de alimento. Entretanto, por simplicidade, usamos indiferentemente as expressões recrutamento de formigas e recrutamento de alimento para designar o mesmo processo.

Assume-se que uma equação logística se adapta bem a esse objetivo. Seja  $X(t)$  o número de operárias na fonte de alimento no instante  $t$ . O fluxo médio de formigas chegando na fonte de alimento  $J_+$  é (Deneubourg *et alii*, 1983):

$$J_+ = aX(N-X) \quad (1)$$

sendo  $N$  o número de formigas disponíveis para participarem do recrutamento, e  $a$  a taxa efetiva de recrutamento dividida pelo número de recrutas no formigueiro.

O fluxo de partida da fonte de alimento  $J_-$  é representado por (Deneubourg *et alii*, 1983):

$$J_- = -bX. \quad (2)$$

sendo  $b$  o inverso do tempo médio gasto entre ficar perto do alimento e voltar para o formigueiro. Quando a fonte de alimento é exaurida, esse último termo governa sozinho a evolução de  $X$ . Assim, a taxa total de evolução de  $X$  é (Deneubourg *et alii*, 1983):

$$\dot{X} = aX(N-X) - bX \quad (\text{alimento presente}) \quad (3)$$

$$\dot{X} = -bX \quad (\text{alimento exaurido}) \quad (4)$$

usando-se a notação  $\dot{X} = \frac{dX}{dt}$ .

Esse modelo de recrutamento pode ser generalizado para descrever o caso em que  $k$  fontes são apresentadas simultaneamente a um formigueiro. Assim (Deneubourg *et alii*, 1983):

$$\dot{X}_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} X_j \left( N - \sum_{i=1}^k X_i \right) - b X_i \quad (\text{alimento presente}) \quad (5)$$

$$\dot{X}_i = -b X_i \quad (\text{alimento exaurido}) \quad (6)$$

$X_i$  é o número de formigas ao redor da fonte  $i$ ,  $a_{ij}$  é a taxa efetiva de recrutamento para as formigas recrutadas para a fonte  $i$  que efetivamente chegam até  $i$  e  $a_{ij}$  é a taxa efetiva de recrutamento para as formigas recrutadas para  $j$  e que erroneamente vão para  $i$ . Os termos  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$  são calculados de acordo com a hipótese de que as formigas ao redor das fontes espalham-se de acordo com uma distribuição gaussiana centrada nas fontes de alimento (Deneubourg *et alii*, 1983). Conforme o desvio padrão  $\sigma$  da gaussiana diminui, o ruído

diminui. Assim, quanto mais estreita é a gaussiana, mais determinístico é o recrutamento, e maior é a proporção de formigas recrutadas que efetivamente chegam à fonte de alimento.

Para cada fonte  $i$ , a equação para o consumo do alimento é (Deneubourg *et alii*, 1983):

$$\dot{Q}_i = -bzX_i \quad (7)$$

$Q_i$  é o volume de alimento na fonte  $i$  e  $z$  é o volume médio de alimento carregado por uma formiga.

### 3.1 Interpretação dos parâmetros $a_{ii}$ e $a_{ij}$

Em linhas gerais, tanto o parâmetro  $a_{ii}$  como o parâmetro  $a_{ij}$  podem ser expressos como taxas efetivas de recrutamento dividida pelo número de recrutas do formigueiro. Entretanto, antes da definição dos parâmetros  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$ , é necessário mostrar as condições do experimento desenvolvido por Parro (Deneubourg *et alii*, 1983) no qual se baseia esse modelo.

No instante inicial  $t = 0$ , uma quantidade de comida  $Q_0$  é igualmente distribuída entre  $k$  fontes circulares com raio  $d$ . Essas fontes estão equidistantes do ninho a uma distância que é mantida constante e igual a 1m. Além disso, a distância entre as duas fontes extremas também é constante e igual a 1m e a distância entre as fontes vizinhas são iguais também, mas variam de acordo com o número de fontes (Deneubourg *et alii*, 1983).

Define-se  $D_{ij}$  como o módulo da distância entre as fontes  $i$  e  $j$ :

$$D_{ij} = |\vec{D}_{ij}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| \quad (8)$$

Sejam  $k$  fontes de alimento, todas idênticas, circulares e com raio  $d$ . O número de formigas  $X_i$  em volta da fonte de alimento  $i$  é dado por uma gaussiana centrada nessa fonte. Assumimos que o parâmetro  $a_{ii}$  pode ser escrito como:

$$a_{ii} = a_{potencial} \frac{\int_{r_i-d}^{r_i+d} e^{-\frac{(r_i-u)^2}{2\sigma^2}} du}{\int_0^\infty e^{-\frac{(r_i-u)^2}{2\sigma^2}} du} \quad (9)$$

$r_i$  é a distância da fonte  $i$  até o formigueiro e  $\sigma$  é o desvio padrão da gaussiana centrada na fonte  $i$  (por simplicidade  $\sigma$  é o mesmo para todas as fontes). A aleatoriedade do processo de recrutamento é expressa pelo parâmetro  $\sigma$ .

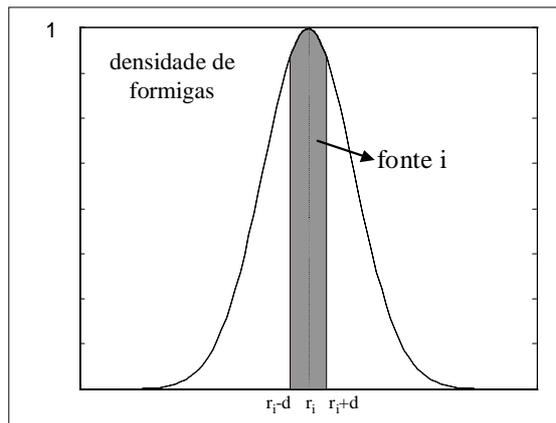
Observando a expressão acima, nota-se que a taxa de recrutamento  $a_{ii}$  é escrita como uma taxa de recrutamento potencial ponderada por um fator de normalização. O termo corresponde à taxa de recrutamento considerando todas as formigas recrutadas que participam, efetivamente ou não, da exploração do alimento.

A razão entre a integral contida no numerador e a integral do denominador da expressão de  $a_{ii}$  representa a porcentagem das formigas que foram recrutadas para uma determinada área de exploração e que efetivamente lá chegaram. Assim, esse quociente é um fator de ponderação da taxa de recrutamento potencial.

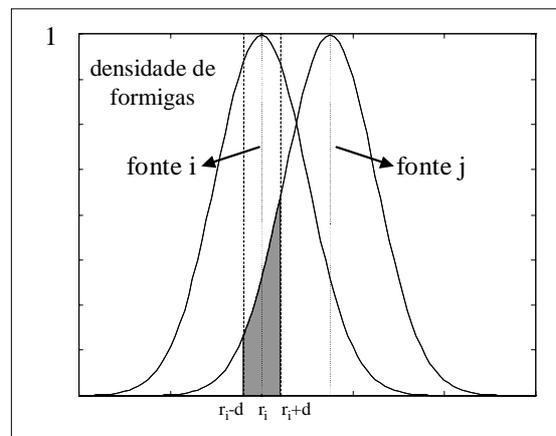
Escrevemos o parâmetro  $a_{ij}$  como:

$$a_{ij} = a_{potencial} \frac{\int_{D_{ij}-d}^{D_{ij}+d} e^{-\frac{(r_j-u)^2}{2\sigma^2}} du}{\int_0^\infty e^{-\frac{(r_j-u)^2}{2\sigma^2}} du} \quad (10)$$

Da mesma forma que  $a_{ii}$ , a taxa efetiva de recrutamento  $a_{ij}$  é expressa como uma taxa de recrutamento potencial ponderada por um fator de normalização. Assim, a razão entre a integral contida no numerador e a integral do denominador da expressão de  $a_{ij}$  representa a porcentagem das formigas que foram recrutadas numa determinada área de exploração para a fonte  $j$  mas que se desviaram do caminho e chegaram, erroneamente, à fonte  $i$ .



**Figura 1: distribuição das formigas em torno da fonte. A área hachurada é proporcional ao número de formigas presentes na fonte.**



**Figura 2: distribuição das formigas em torno de duas fontes. A área hachurada é proporcional ao número de formigas “perdidas” da fonte j que encontram a fonte i.**

As figuras 1 e 2 ilustram como o número de formigas varia em torno de uma fonte de alimento. Se a dimensão da fonte é muito menor que a distância entre a fonte e o formigueiro ( $d \ll r_i$ ), os valores das integrais contidas nos parâmetros  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$ , correspondentes às áreas hachuradas, podem ser aproximados por:

$$\int_{r_i-d}^{r_i+d} e^{-\frac{(r_i-u)^2}{2\sigma^2}} du \cong 2d \quad e$$

$$\int_{D_{ij}-d}^{D_{ij}+d} e^{-\frac{(r_j-u)^2}{2\sigma^2}} du \cong 2d \cdot e^{-\frac{D_{ij}^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

e o valor da integral contida no denominador das expressões (9) e (10) pode ser aproximado por:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{(r_i - u)^2}{2\sigma^2}} du \cong \sigma\sqrt{2\pi} \quad (12)$$

Assim, para um ecossistema com  $k$  fontes de alimento, os parâmetros  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$  são calculados de maneira aproximada por:

$$a_{ii} = \frac{a_{potencial}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot 2d \quad e$$

$$a_{ij} = \frac{a_{potencial}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot 2d \cdot e^{-\frac{D^2_{ij}}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

#### 4 SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O MODELO COM UMA FONTE

A equação diferencial que descreve o número de formigas na fonte quando ainda existe alimento (equação (3)) possui a seguinte solução (Verhaeghe e Deneubourg, 1983):

$$X(t) = \frac{\theta X_0 e^{\theta \cdot t}}{\theta - a_{11}X_0 + a_{11}X_0 e^{\theta \cdot t}} \quad (14)$$

sendo  $\theta = a_{11}N - b$  e  $X_0$  o número inicial de formigas na fonte.

Tomando-se  $\dot{X} = 0$  na equação (3), chega-se a um ponto de equilíbrio instável e outro assintoticamente estável. A estabilidade desses pontos foi determinada através de linearização da equação em torno do ponto de equilíbrio (Guckenheimer e Holmes, 1986). Se  $N > b/a_{11}$ , os pontos de equilíbrio são:

$$\bar{X}_A = 0 \quad e \quad \bar{X}_B = N - \frac{b}{a_{11}} \quad (15)$$

$\bar{X}_B$  é positivo e estável e  $\bar{X}_A = 0$  é instável pois, a partir do momento em que uma formiga descobre a nova fonte e, por meio do depósito de feromônio, “avisa” as outras recrutas, o processo de exploração progride e o número de formigas tende a crescer. Caso  $N < b/a_{11}$ ,  $\bar{X}_A$  é o único ponto de equilíbrio e estável.

A equação diferencial que rege a dinâmica do número de formigas na fonte quando o alimento se esgota (equação (4)) apresenta a seguinte solução:

$$X(t) = X_1 e^{-b \cdot t} \quad (16)$$

que é válida quanto  $t \geq T$ , sendo  $T$  o instante em que o alimento se esgota.  $X_1$  é o número de formigas presentes na fonte no instante  $t = T$ .

Para o cálculo de  $T$ , é necessário solucionar a equação (7) para o consumo de alimento. A solução analítica de (7) é:

$$Q(t) = Q_0 - \frac{bz}{a_{11}} \ln \left( \frac{\theta - a_{11}X_0 + a_{11}X_0 e^{\theta \cdot t}}{\theta} \right) \quad (17)$$

sendo  $Q_0$  o volume inicial de alimento.

Para se determinar o tempo  $T$  em que o alimento se esgota, toma-se  $Q(T)=0$  e isola-se  $T$  na expressão acima, chegando a (Verhaeghe e Deneubourg, 1983):

$$T = \frac{1}{\theta} \ln \left( \frac{\theta \cdot e^{\frac{Q_0 \cdot a_{11}}{bz}} - \theta}{a_{11}X_0} + 1 \right) \quad (18)$$

#### 4.1 Análise do modelo com auxílio de valores numéricos

Neste item, mostra-se a variação temporal da quantidade de alimento e do número de formigas na fonte, utilizando os seguintes valores experimentais (Deneubourg *et alii*, 1983):

$$a_{11} = 32 \cdot 10^{-5} \text{ ([min.formiga]}^{-1}) \quad b = 16 \cdot 10^{-3} \text{ ([min]}^{-1})$$

$$N = 650 \text{ ([formiga])} \quad d = 7 \cdot 10^{-1} \text{ ([cm])}$$

$$Q_0 = 100 \text{ ([mm}^3\text{)]} \quad z = 39 \cdot 10^{-2} \text{ (mm}^3\text{/formiga)}$$

Para os valores acima, o tempo de esgotamento da fonte de alimento é  $T \cong 60$  minutos. A variação temporal da quantidade de alimento  $Q(t)$  pode ser observada na figura 3, construída com o auxílio da expressão (17).

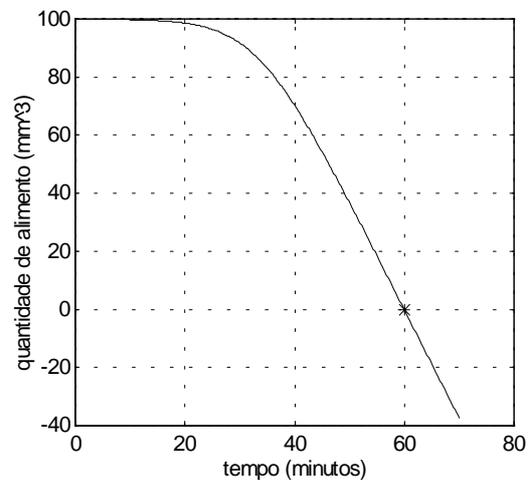


Figura 3: quantidade de alimento na fonte como função do tempo. Observe que o alimento se esgota em  $T = 60$  minutos.

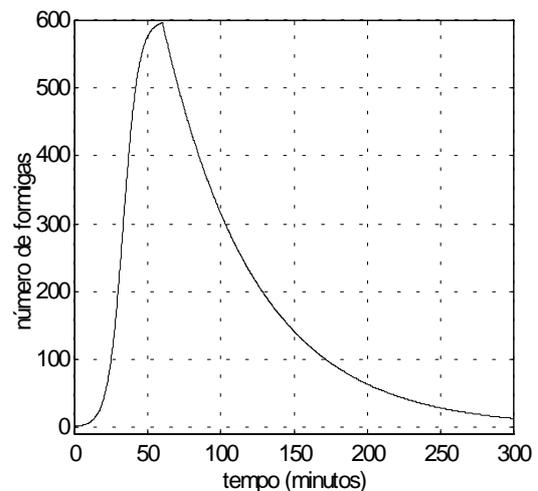


Figura 4: número de formigas na fonte como função do tempo.

Conhecendo  $T$ , pode-se fazer um gráfico da variação temporal do número de formigas presentes na fonte, utilizando as expressões (14) e (16). A expressão (14) governa o comportamento do sistema para  $t \leq T$ , enquanto a expressão (16) vale para  $t \geq T$ . Assim, obtém-se a figura 4, onde se

observa que o ponto de máximo corresponde ao instante em que o alimento na fonte se esgota.

O tempo de exploração do alimento varia em função da eficácia no recrutamento. Nota-se que as formigas perdidas não contribuem para a exploração, já que não existem outras fontes para serem encontradas. A figura 5 mostra com clareza esse fato. O eixo das abscissas representa  $1/\sigma$  e o eixo das ordenadas representa o tempo  $T$  para o esgotamento da fonte.

No caso em que existe apenas uma fonte, quanto mais formigas perdidas, maior é o tempo para coletar todo alimento. Por isso,  $T$  diminui com  $1/\sigma$ .

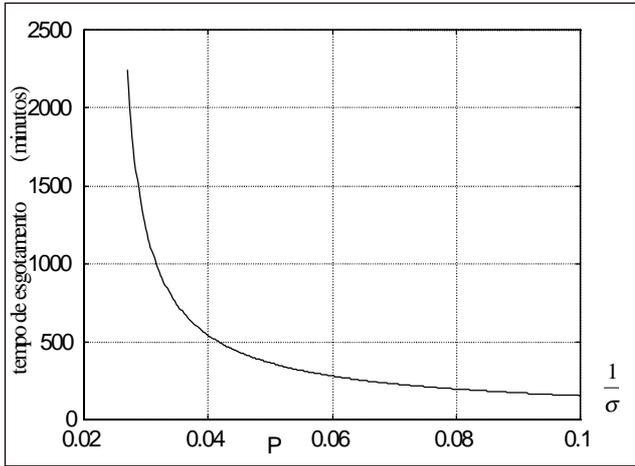


Figura 5: tempo de esgotamento da fonte em função da precisão no recrutamento.

## 5 ANÁLISE E SOLUÇÃO PARA O MODELO COM DUAS FONTES

### 5.1 Parâmetros $a_{ij}$ e $a_{ij}$ para 2 fontes

Quando há duas fontes idênticas e equidistantes do formigueiro, pode-se assumir que a taxa de formigas recrutadas para a fonte 1 que chega na fonte 2 é igual à taxa de formigas recrutadas para a fonte 2 que chega na fonte 1, pois  $D_{12} = D_{21}$ . Dessa forma:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{a_{potencial}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot 2d \quad (19)$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{a_{potencial}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot 2d \cdot e^{-\frac{D^2_{12}}{2\sigma^2}} \quad (20)$$

A variação dos parâmetros  $a_{11}$  e  $a_{12}$  em função da aleatoriedade do comportamento é mostrada nas figuras 6 e 7.

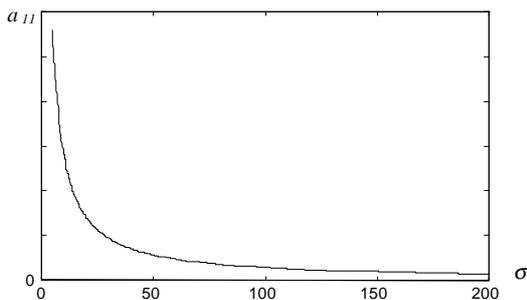


Figura 6: variação de  $a_{11}$  em função de  $\sigma$ .

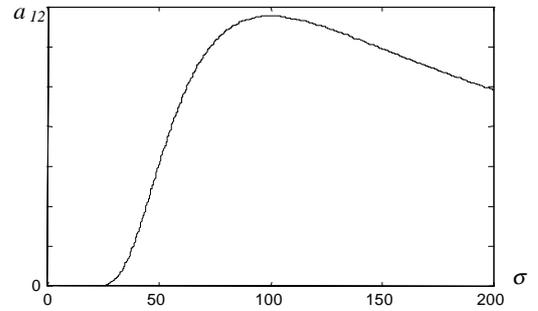


Figura 7: variação de  $a_{12}$  em função de  $\sigma$ .

A dependência dos parâmetros  $a_{11}$  e  $a_{12}$  em função do  $\sigma$  nos leva ao seguinte raciocínio. Quando  $\sigma$  é pequeno em relação à distância  $D$  entre as fontes, o modelo se comporta como se só houvesse uma fonte. Isso acontece porque a dispersão é pequena e, portanto, as formigas recrutadas para uma determinada fonte vão quase na sua totalidade para ela. Dessa maneira, as formigas demoram para encontrar a outra fonte, tornando “grande” o tempo  $T$  de exploração total do alimento.

Para valores de  $\sigma$  muito maiores que a distância entre as fontes, quase todas as formigas “se perdem” e não exploram fonte alguma, ou seja, o tempo  $T$  também é “grande”.

Quando  $\sigma$  está contido em uma certa faixa de valores da ordem de  $D/2$ , pode existir um valor de  $\sigma$  que forneça um tempo  $T$  menor do que aqueles das situações acima.

A seguir, comprovamos que esse  $\sigma$  ótimo existe.

### 5.2 Pontos de equilíbrio e estabilidade

Os pontos de equilíbrio do sistema com duas fontes são:

$$\bar{X}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{X}_B = \begin{pmatrix} P \\ \frac{1+R}{P.R} \end{pmatrix} \text{ e } \bar{X}_C = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{1+Z}{Q.Z} \end{pmatrix} \quad (21)$$

sendo:

$$P = N - \frac{b}{a_{11} + a_{21}R} \quad Q = N - \frac{b}{a_{11} + a_{21}Z}$$

$$R = \frac{-(a_{11} - a_{22}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{21}}$$

$$Z = \frac{-(a_{11} - a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{21}}$$

Por razão de simetria do arranjo experimental,  $a_{11}=a_{22}$  e  $a_{12}=a_{21}$ .

Uma vez que as taxas de recrutamento  $a_{11}$  e  $a_{12}$  são sempre positivas e  $N > \frac{b}{a_{11}}$  (de acordo com os dados experimentais

obtidos por Parro (Deneubourg *et alii*, 1983), o ponto  $\bar{X}_A$  é um ponto de equilíbrio instável. Isto significa que, a partir do momento em que há pelo menos uma formiga na fonte de alimento, o sistema afasta-se desse ponto.

O ponto de equilíbrio  $\bar{X}_B$  não convém ao nosso estudo, uma vez que, com as hipóteses acima, tem-se  $R = -1$ . Portanto, esse ponto resulta num número infinito de formigas ao redor das fontes de alimento.

$$\text{Para o ponto } \bar{X}_C = \begin{pmatrix} N \frac{b}{2(a_{11} + a_{12})} \\ N \frac{b}{2(a_{11} + a_{12})} \end{pmatrix} \quad (22)$$

percebe-se que, como o sistema com duas fontes é simétrico, nada mais natural que, no equilíbrio, o número de formigas ao redor das fontes 1 e 2 seja igual. Esse ponto é assintoticamente estável. Assim, qualquer que seja a condição inicial do número de formigas em cada fonte, o sistema converge para o ponto de equilíbrio  $\bar{X}_C$ .

### 5.3 Solução numérica para o modelo com 2 fontes

Integrando-se numericamente as equações (5)-(7) para duas fontes de alimento, com a suposição que as recrutas se dirigiram inicialmente à fonte 1, construímos os gráficos da quantidade de alimento presente e da evolução do número de formigas em cada fonte. Da análise desses, nota-se que a taxa inicial de crescimento do número de formigas na fonte 1 é maior que a da fonte 2. Além disso, percebemos que à medida que o alimento da fonte 1 vai acabando, as formigas são recrutadas para a fonte 2. O pico no número de formigas na fonte 2 reflete esse fato.

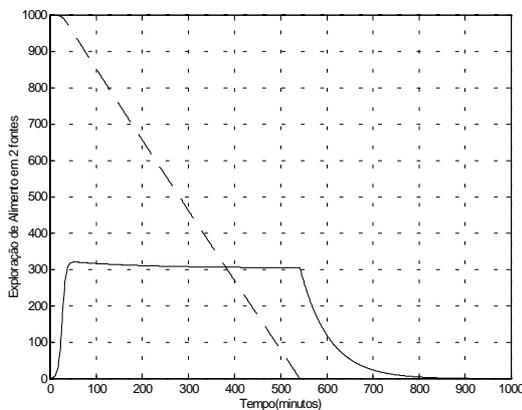


Figura 8: Exploração de alimento em duas fontes em função do tempo – fonte 1. As linhas contínua e tracejada representam respectivamente o número de formigas e a quantidade de alimento presentes na fonte.

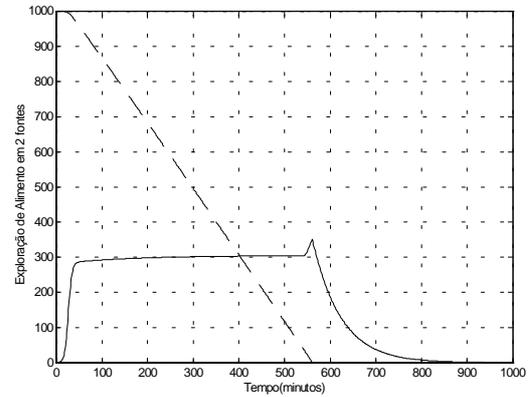


Figura 9: Exploração de alimento em duas fontes em função do tempo – fonte 2. As linhas contínua e tracejada representam respectivamente o número de formigas e a quantidade de alimento presentes na fonte.

Dependendo do grau de aleatoriedade do processo de recrutamento, expresso nos parâmetros  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$ , o tempo de esgotamento do alimento nas duas fontes aumenta ou diminui. Através da integração numérica das equações (5)-(7), foi possível determinar o tempo mínimo de consumo do alimento.

Em cada uma das fontes  $i$ , o alimento se esgota num tempo  $T_i$ . O tempo  $T$  de esgotamento do alimento será o maior valor de  $T_i$ .

Convém dizer que a elaboração de um algoritmo numérico para a solução desse modelo é bastante complicada, pois a dinâmica muda quando o alimento acaba, passando da equação (5) para a equação (6). O problema é que, de antemão, não se sabe em qual instante ocorrerá essa mudança. A figura 10 representa a variação de  $T$  com  $1/\sigma$ . O tempo mínimo de consumo é assinalado com “x”.

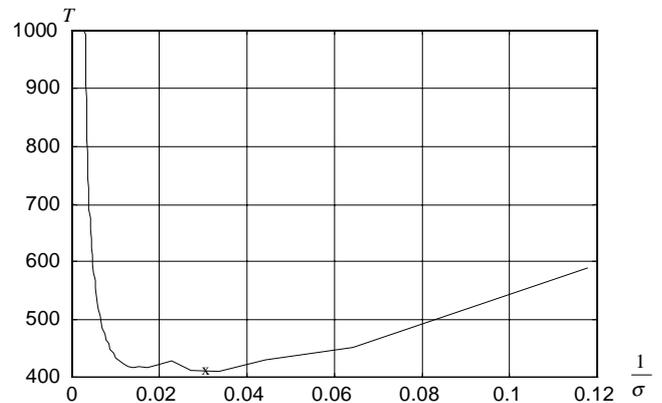


Figura 10: tempo de esgotamento ( $T$ ) do alimento em função do inverso de  $\sigma$ . Valores dos parâmetros:  $N=650$ ,  $Q_0=1\text{ml}$ ,  $a_{\text{potencial}}=1.10^{-4}$ ,  $d=0,7\text{cm}$ ,  $z=0,39\text{mm}^3$  e  $b=0,016\text{min}^{-1}$ .

## 6 O MODELO PARA 3 OU MAIS FONTES

Para um arranjo experimental com 3 fontes, obtém-se o seguinte ponto de equilíbrio global e assintoticamente estável, considerando-se que todos  $a_{ii}$  são iguais;  $a_{ij}=a_{ji}$ ; e  $a_{ij}=a_{mn}$  para  $|i-j|=|m-n|$ :

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} S/2 \\ S.Z \\ S/2 \end{pmatrix}$$

sendo:

$$S = \frac{N - \frac{b}{a_{11} + a_{13} + a_{12}Z}}{1 + Z} \quad (23)$$

$$Z = \frac{-a_{13} + \sqrt{a_{13}^2 + 8a_{12}^2}}{2a_{12}}$$

Para o caso  $k=4$ , a solução global e assintoticamente estável é:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} S \\ S.Z \\ S.Z \\ S \end{pmatrix}$$

sendo:

$$S = \left( \frac{N - \frac{b}{a_{11} + a_{14} + (a_{12} + a_{13})Z}}{1 + Z} \right) \frac{1}{2} \quad (24)$$

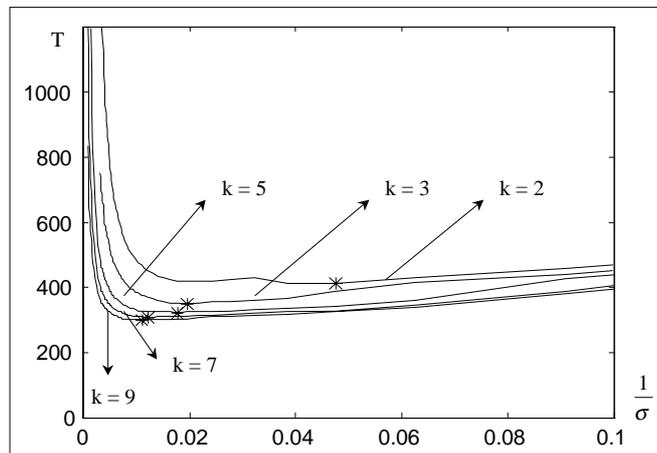
$$Z = \frac{-(a_{14} - a_{12}) + \sqrt{(a_{14} - a_{12})^2 + 4(a_{12} + a_{13})^2}}{2(a_{12} + a_{13})}$$

Para  $k \geq 5$ , não há solução analítica com as escolhas feitas para os valores de  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$ . Apenas soluções numéricas podem ser calculadas. Porém, se outras considerações forem feitas a respeito dos parâmetros  $a_{ij}$  e  $a_{ji}$ , podem se obter fórmulas genéricas para as concentrações de formigas na situação de equilíbrio. Por exemplo, numa situação em que a simetria do arranjo experimental leva a uma solução de equilíbrio em que todos os  $X_i$  são iguais (no caso em que o alimento está uniformemente distribuído entre  $k$  fontes discretas localizadas sobre um círculo de modo que se inscreva um polígono regular com  $k$  lados), a solução de equilíbrio estável é:

$$\bar{X}_i = \left( N - \frac{b}{\sum_{j=1}^k a_{ij}} \right) \frac{1}{k} \quad (25)$$

Note que essa solução não é válida para o arranjo experimental descrito na seção 3.1. Entretanto, tal distribuição de alimento pode ser mais “realista”, isto é, mais facilmente encontrada na natureza.

A figura 11 mostra o comportamento do tempo de consumo  $T$  em função da aleatoriedade do processo ( $1/\sigma$ ) para valores diversos de  $k$  e para o arranjo experimental descrito na seção 3.1. Os pontos de mínimo em cada curva estão assinalados.



**Figura 11:** tempo de esgotamento ( $T$ ) do alimento em função do inverso de  $\sigma$ . Valores dos parâmetros:  $N=650$ ,  $Q_0=1\text{ml}$ ,  $a_{\text{potencial}}=1.10^{-4}$ ,  $d=0,7\text{cm}$ ,  $z=0,39\text{mm}^3$  e  $b=0,016\text{min}^{-1}$ .

## 7 ANÁLISE DO MODELO E CONCLUSÕES

Quando existe apenas uma fonte de alimento, a melhor estratégia de recrutamento é aquela que não apresenta erros, pois as formigas perdidas não desempenham função alguma. Por isso, o tempo de coleta de alimento aumenta assintoticamente para valores crescentes de  $\sigma$  (figura 5).

Entretanto, para duas ou mais fontes, uma vez que as formigas perdidas são capazes de descobrir outras fontes de alimento, já se observa a presença de um ponto de mínimo ou, em outras palavras, de um nível de erro ótimo que minimiza o tempo da exploração do alimento.

Além disso nota-se que, com o aumento do número de fontes, o ponto de mínimo se desloca na direção de  $\sigma$  maior evidenciando que, quanto mais fontes estiverem disponíveis, maior deve ser a aleatoriedade do recrutamento para que se atinja um tempo de consumo mínimo.

Isso nos leva à resposta para a questão: existe uma combinação ótima entre a “precisão”, que permite o aproveitamento imediato do alimento, e o “erro”, que possibilita novas descobertas? Esse modelo indica que a resposta pode ser sim, ou seja, existe um valor ótimo de aleatoriedade no recrutamento capaz de minimizar o tempo global de coleta do alimento.

A existência de um tempo ótimo de consumo, num sistema em que várias unidades cooperam de modo organizado, sugere que, em problemas de controle e automação, nos quais uma unidade global tem o objetivo de realizar uma tarefa num tempo ótimo, talvez possa ser mais conveniente substituí-la por unidades mais simples e relativamente independentes (isto é, uma unidade toma decisões baseando-se apenas na informação colhida pelas unidades vizinhas). O desafio é encontrar como deve ser a interação entre essas unidades.

No modelo de Deneubourg *et alii* (1983), as taxas de recrutamento  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$  independem da quantidade de alimento presente na fonte. Entretanto, sabe-se que a quantidade de feromônio depositado na trilha é proporcional à quantidade de alimento na fonte e essas quantidades estão relacionadas com a taxa efetiva de recrutamento, isto é, com quantas formigas são recrutadas e, efetivamente, chegam à fonte de alimento.

Sugerimos, então, levar em conta esse fato. Para isso, os parâmetros  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$  poderiam ser expressos por:

$$a_{ii} = \frac{a_{potencial}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot 2d \cdot \frac{Q_i(t)}{Q_i(0)} \quad e$$

$$a_{ij} = \frac{a_{potencial}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot 2d \cdot e^{-\frac{D^2_{ij}}{2\sigma^2}} \cdot \frac{Q_i(t)}{Q_i(0)} \quad (26)$$

Assim, multiplicamos os parâmetros definidos anteriormente pela fração  $\frac{Q_i(t)}{Q_i(0)}$ . Dessa forma,  $a_{ii}$  e  $a_{ij}$  diminuem conforme o

alimento vai sendo transportado da fonte para o formigueiro. Os novos coeficientes acima sugeridos representam novas formas de interação entre as formigas.

Neste trabalho, analisamos alguns mecanismos que regem o comportamento de formigas durante a exploração de alimento. Mostramos, através de modelos simples, que esse comportamento pode levar a uma melhor adaptação/adequação da espécie com relação ao seu meio ambiente; o que, possivelmente, pode ter contribuído para o seu sucesso ecológico. A analogia de insetos sociais com robôs simples, baratos e que interagem, buscando um objetivo comum, é imediata.

Talvez, o processo de auto-organização empregado por sociedades de formigas (para solucionar o problema da exploração do alimento presente na vizinhança de um formigueiro) possa ser empregado no projeto de sociedades de robôs que visem, por exemplo, estabelecer rotas ótimas em ambientes variáveis. Claramente, o grau de variabilidade do meio é um fator decisivo no sucesso desse projeto. Especulamos que essa variabilidade pode ser controlada através da fidelidade da comunicação entre os robôs, que seria uma variável equivalente ao  $\sigma$  do modelo de Deneubourg. Assim, a exploração ótima de ambientes mais imprevisíveis (como uma partida de futebol de robôs) pode exigir um nível de ruído na comunicação maior do que na exploração de ambientes mais estáticos (como o solo marciano). Modelos e análises semelhantes às aqui apresentadas devem, em breve, envolver máquinas projetadas pela mente humana. Quiçá, as formigas tenham indicado uma trilha a ser seguida.

Agradecimentos

R.B., M.C.C. e L.H.A.M. agradecem à FAPESP pelo apoio financeiro.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRAFICA

Bayly P.V., Kenknight B.H., Rogers J.M., Johnson E. E., Ideker E.E. e Smith W.M. (1998). Spatial organization, predictability and determinism in ventricular fibrillation. *Chaos* 8, 103-115.

Bilchev G. e Parmee I. (1997). The Ant Colony metaphor for searching continuous design spaces. *Lecture Notes in Computer Science* 993, (Fogarty T. ed.), Springer, 24-39.

Bonabeau E., Theraulaz G. e Deneubourg J.L. (1996). Mathematical model of self-organizing hierarchies in animal societies. *Bull. Math. Biol.* 58, 661-717 (1996).

Bruyn G.J. (1977). A comparative study of recruitment in ants. *Proceedings of the 8th International Union for the Study of Social Insects*, Wageningen, 292-293.

Deneubourg J.L., Pasteels J.M. e Verhaeghe J.C. (1983). Probabilistic behaviour in ants: a strategy of errors ?. *J. Theor. Biol.* 105, 259-271.

Deneubourg J.L., Aron S., Goss S., Pasteels J.M. e Duerinck G. (1986). Random behaviour, amplification processes and number of participants: how they contribute to the foraging properties of ants. *Physica* 22D, 176-186.

Deneubourg J.L., Goss S., Beckers R. e Sandini G. (1991). Collective self-solving problems. *Self-Organization, Emerging Properties, and Learning*, (Babloyantz A., ed.) 267-278. New York: Plenum Press.

Dorigo M. e Gambarella L.M. (1996). The Ant System: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* B 26, 29-41.

Dorigo M. e Gambarella L.M. (1997). Ant Colony System: A cooperative learning approach to the traveling salesman problem. *IEEE Trans. Evol. Comp.* 1, 53-66.

Franks A.S. e Franks N.R. (1993). Task allocation in ant colonies within variable environments. *Bull. Math. Biol.* 55, 75-96.

Guckenheimer J. e Holmes P. (1986). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. New York: Springer.

Kucinski M.Y. (1998). Minimum entropy production and mean field configuration in toroidal pinches. *Plasma Phys. Control. Fusion* 40, 111-125.

Nicolis G. (1987). Physics of far-from -equilibrium systems and self-organisation. In: *The New Physics* (Davies P., ed.), 316-347. Cambridge: Cambridge University Press.

Niwa H.S. (1994). Self-organizing dynamic model of fish schooling. *J. Theor. Biol.* 171, 123-136.

Pasteels J.M., Deneubourg J.L. e Goss S. (1987). Self-organization mechanisms in ant societies (I): trail recruitment to newly discovered food sources. *Experientia Suppl.* 54, 155-175.

Verhaeghe J.C. e Deneubourg J.L. (1983). Experimental study and modelling of food recruitment in the ant tetramorium impurum (hym. form.). *Insectes Soc.* 30, 347-360.