

---

# REGULAÇÃO ROBUSTA DE TRÁFEGO EM LINHAS DE METRÔ

Silvino S. Corrêa<sup>1</sup>  
sscorrea@yahoo.com

Basílio E. A. Milani<sup>2</sup>  
basilio@dt.fee.unicamp.br

<sup>1</sup>UFMT - FTEN - DEE  
Av. Fernando Correa da Costa, S/N.  
78060 - 900 Cuiabá MT, Brazil.

<sup>2</sup>DT - FEEC - UNICAMP  
C.P. 6101, 13081-970, Campinas, SP, Brazil

---

**RESUMO:** Este artigo trata do problema de regulação robusta de tráfego em linhas de metrô, considerando de forma explícita as incertezas do modelo de tráfego e as limitações sobre suas variáveis de estado e controle. É assumido que os limites sobre as variáveis do modelo são definidos por poliedros convexos fechados simétricos e o domínio dos parâmetros incertos definido pelos pontos extremos de um poliedro convexo compacto. Para solução do problema de regulação, são propostas duas abordagens: Regulação Robusta com Restrições, que fornece uma lei de controle linear invariante no tempo e Regulação Ótima Minimax com Restrições, que fornece uma lei de controle não linear calculada em tempo real. Em ambos os casos, explorando propriedades estruturais do modelo de tráfego, é mostrado que a lei de controle tem a forma de realimentação de estados com estrutura bi-diagonal, sendo facilmente obtida da solução de pequenos problemas de programação linear. Os resultados obtidos são aplicáveis às linhas de metrô atuais.

**ABSTRACT:** This paper is concerned with the problem of robust traffic regulation of metro lines, considering explicitly the traffic model uncertainties and limits on its variables. It is assumed that limits on model variables are defined by symmetrical convex closed polyhedra and that uncertain parameters domain is defined by the extreme points of a convex compact polyhedron. Two approaches are proposed for solution of the regulation problem: Robust Constrained Regulation giving a linear time-invariant control law and Constrained Minimax Optimal Regulation giving a nonlinear control law computed in real-time. In both cases, exploring structural properties of traffic model, it is showed that the control law has a state feedback form with bi-diagonal structure, being easily obtained solving small linear programming problems. The results are applicable to nowadays metro lines.

## 1 INTRODUÇÃO

Um modelo de tráfego, capaz de representar a evolução do instante de chegada/partida dos trens ao longo das plataformas de embarque de passageiros de uma linha metroviária, deve incluir uma significativa parcela de incerteza porque ele depende da demanda de passageiros e perturbações de percurso, ambas aleatórias (Campion *et alii*, 1985).

Além disso, o comportamento do tráfego de trens em linhas de alta frequência é naturalmente instável. Considere por exemplo um trem atrasado em relação ao programa horário nominal da linha (Bergamaschi *et alii*, 1982), (Cury *et alii*, 1980). Devido ao seu atraso, seu intervalo relativo ao trem precedente é maior que o previsto e, conseqüentemente, o número de passageiros aguardando na próxima plataforma de embarque será também maior, o que resultará no aumento de seu atraso (Campion *et alii*, 1985).

Durante a operação comercial, a regulação em tempo real do tráfego de trens é necessária para manter os trens correndo de acordo com o programa horário da linha e conduzir condições de tráfego perturbado a uma situação operacional aceitável (Van Breuseguem *et alii*, 1991). As ações de controle são basicamente instruções, transmitidas automaticamente a cada trem nas plataformas de passageiros da linha, modificando seu tempo de parada na plataforma e o perfil de velocidade a ser utilizado no percurso para a plataforma seguinte. O controle é naturalmente restrito pelo intervalo de velocidades permitido aos trens, tempo mínimo de parada em plataforma e regras de segurança de tráfego. O intervalo entre sucessivos trens também é sujeito a restrições relacionadas com regras de segurança de tráfego e nível de ocupação dos trens.

O controle de linhas metroviárias tratado anteriormente em (Campion *et alii*, 1985), (Van Breuseguem *et alii*, 1991), descreve o tráfego de trens através de um modelo linear onde as variáveis de estado são desvios, relativos ao previsto pelo programa horário nominal, do instante de partida dos trens nas plataformas da linha e a variável independente é o número sequencial das plataformas. A regulação do tráfego de trens é então tratada como um problema de mínimos quadrados sem restrições, com critério de desempenho composto pela soma ponderada dos qua-

---

<sup>0</sup>Artigo submetido em 10/03/2000

1a. Revisão em 14/08/2000;

Aceito sob recomendação do Ed. Cons. Prof. Dr. Paulo Sérgio Pereira da Silva

dados das previsões um passo à frente, dos desvios, em relação ao programa nominal, dos instantes de saída das plataformas, dos intervalos entre sucessivos trens e esforços de controle correspondentes. O principal limitante desta abordagem é a não consideração explícita das incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis.

Neste trabalho, baseado no modelo de tráfego proposto em (Campion *et alii*, 1985) e (Van Breuseguem *et alii*, 1991), são propostas duas novas abordagens de programação matemática para o problema de regulação de tráfego de trens: Regulação Robusta com Restrições, que fornece uma lei de controle linear invariante no tempo e Regulação Ótima Minimax com Restrições, que fornece uma lei de controle não linear calculada em tempo real. Em ambos os casos, temos:

- o critério de desempenho a ser minimizado é o pior caso, considerando todas as incertezas, de uma soma ponderada de 1-normas (Golub e Van Loan, 1996) das previsões, um passo a frente, dos desvios dos instantes de saída das plataformas, dos intervalos entre sucessivos trens e esforços de controle correspondentes;
- as incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis são explicitamente consideradas;
- explorando propriedades estruturais do modelo de tráfego, é mostrado que a lei de controle tem a forma de realimentação de estados com estrutura bi-diagonal, sendo facilmente obtida da solução de pequenos problemas de programação linear, relacionados um para um com as plataformas de passageiros da linha;
- os resultados obtidos são aplicáveis às linhas de metrô atuais.

## 2 REGULAÇÃO DO TRÁFEGO DE TRENS

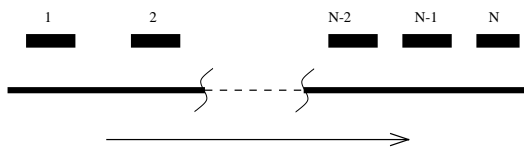


Figura 1: Linha metroviária aberta com  $N$  plataformas

Para descrever o tráfego de trens em uma linha metroviária aberta, figura 1, com  $N$  plataformas, (Campion *et alii*, 1985) e (Van Breuseguem *et alii*, 1991) propõem o seguinte modelo linear:

$$X_{j+1} = A(C)X_j + B(C)U_j + B(C)V_j \quad (1)$$

$$X_j = [x_1^{j-1} \ x_2^{j-2} \ \dots \ x_N^{j-N}]^T \quad (2)$$

$$U_j = [u_0^j \ u_1^{j-1} \ \dots \ u_{N-1}^{j-N+1}]^T \quad (3)$$

$$V_j = [v_0^j \ v_1^{j-1} \ \dots \ v_{N-1}^{j-N+1}]^T \quad (4)$$

$$C = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_N]^T \quad (5)$$

$$A(C) = \begin{bmatrix} a_1(c_1) & & & & \mathbf{0} \\ b_2(c_2) & a_2(c_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & b_N(c_N) & a_N(c_N) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$B(C) = \begin{bmatrix} b_1(c_1) & & & & \mathbf{0} \\ & b_2(c_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & b_N(c_N) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$a_k(c_k) = -\frac{c_k}{(1-c_k)} \quad ; \quad k = 1 : N \quad (8)$$

$$b_k(c_k) = \frac{1}{(1-c_k)} \quad ; \quad k = 1 : N \quad (9)$$

onde:  $X_j, U_j, V_j$  são vetores de dimensões  $(N, 1)$ , representando respectivamente o estado, o controle e as perturbações externas do sistema;  $x_k^i$  representa o desvio do instante de saída do trem  $i$  na plataforma  $k$  relativo ao programa horário nominal;  $u_k^i$  representa a variação, relativa ao programa horário nominal, do tempo de percurso entre as plataformas  $k$  e  $k+1$  mais o tempo de espera na plataforma  $k$ , comandados ao trem  $i$  na plataforma  $k$ ;  $v_k^i$  representa a perturbação do tempo de percurso entre as plataformas  $k$  e  $k+1$  mais a perturbação do tempo de espera na plataforma  $k$ , sofridas pelo trem  $i$  e  $c_k$  representa a razão de variação do tempo de parada dos trens na plataforma  $k$  relativa à variação do intervalo entre trens sucessivos nessa plataforma.

### 2.1 Regulação de Variância Mínima (RVM)

Uma larga variedade de critérios de desempenho podem ser considerados dependendo do propósito do controle. Nesse sentido, Van Breuseguem *et alii* (1991) propõem o seguinte critério quadrático:

$$J = pX_{j+1}^T X_{j+1} + q(X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + U_j^T U_j \quad (10)$$

Pode ser verificado que este critério corresponde a um critério de controle preditivo de um passo (Garcia *et alii*, 1989) onde: o primeiro termo penaliza o desvio do horário nominal; o segundo termo penaliza o desvio do intervalo de tempo entre trens, sendo, portanto, relacionado com o tempo médio de espera dos passageiros e da concentração dos mesmos nos trens; o terceiro termo é a medida da amplitude da ação de controle, sendo zero para o programa horário nominal. Os valores dos coeficientes  $p > 0$  e  $q > 0$  dependem do propósito do controle e refletem o compromisso a ser alcançado entre os objetivos da regulação.

**Definição 2.1** : *Problema de Regulação de Variância Mínima (RVM): Determinar  $U$  que minimiza o critério de desempenho (10) sujeito às equações do modelo (1)-(9).*

**Proposição 2.1** (Campion *et alii*, 1985), (Van Breuseguem *et alii*, 1991): *A solução de RVM é uma lei de controle na forma de realimentação de estado, dada por:*

$$U_j = -[I_N + (p+q)B^T B]^{-1}[(p+q)B^T A - qB^T]X_j \quad (11)$$

onde  $I_N$  representa a matriz identidade de dimensão  $N$ . Devido à estrutura diagonal da matriz  $B(C)$  (7), é fácil verificar que os componentes de  $U_j$  são dados por:

$$u_k^i = -g_{k+1}x_k^i + f_{k+1}x_{k+1}^{i-1} \quad (12)$$

onde:

$$g_{k+1} = \frac{p+q}{p+q+(1-c_{k+1})^2}$$

$$f_{k+1} = \frac{p+qc_{k+1}}{p+q+(1-c_{k+1})^2}$$

Isto significa que o controle aplicado ao trem  $i$  entre as plataformas  $k$  e  $k+1$  é uma combinação linear de dois desvios de instantes de partida:  $x_k^i$  e  $x_{k+1}^{i-1}$ , que são respectivamente, desvio do trem  $i$  na plataforma  $k$  e desvio do trem anterior ( $i-1$ ) na próxima plataforma ( $k+1$ ).

Este caráter local da lei de controle é de suma importância para sua implementação prática. Pode ser verificado que se o critério de desempenho envolvesse mais passos de predição, este caráter local seria perdido.

## 2.2 Regulação Robusta com Restrições (RRR)

A principal limitação da formulação RVM é não tratar de forma explícita aspectos importantes do problema de regulação de tráfego: incertezas paramétricas e perturbações externas do modelo de tráfego, restrições técnicas e operacionais nas variáveis de estado e controle e estabilidade do sistema controlado.

Para suprir essa falta, em (Carvalho e Milani, 1993) e (Carvalho e Milani, 1994) é proposta uma formulação de regulação robusta com restrições do tráfego de trens. A lei de controle tem a mesma forma que a da RVM e é obtida através da solução de um problema de programação linear, de solução trabalhosa, dado o porte das linhas de metrô atuais. Também devido à dificuldade de solução, a robustez é tratada de forma conservativa.

A seguir é proposta uma formulação aperfeiçoada de regulação robusta com restrições do tráfego de trens, menos conservativa que (Carvalho e Milani, 1993), (Carvalho e Milani, 1994) e cujo resultado é obtido através da solução de pequenos problemas de programação linear, independentes, relacionados um para um com as plataformas da linha.

### 2.2.1 Formulação do Problema RRR

A aleatoriedade da demanda de passageiros torna o vetor de parâmetros  $C$  incerto, o qual será aqui considerado restrito ao poliedro:

$$C^L \leq C \leq C^U \quad (13)$$

onde  $C^L, C^U \in \mathbb{R}^N, 0 < C^L \leq C^U < 1$ .

As perturbações  $V_j$  são também limitadas e serão consideradas restritas ao poliedro:

$$-\eta \leq V_j \leq \eta \quad (14)$$

onde  $\eta \in \mathbb{R}^N, \eta > 0$ .

Fatores técnicos e operacionais impõem limites ao controle  $U_j$ , o qual será considerado restrito ao poliedro:

$$-\rho \leq U_j \leq \rho \quad (15)$$

onde  $\rho \in \mathbb{R}^N, \rho \geq 0$ .

Requisitos de ocupação dos trens e regras de segurança impõem limites sobre a variação admissível do intervalo entre dois trens

sucessivos ( $X_{j+1} - X_j$ ), que será considerada restrita ao poliedro:

$$-\zeta \leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta \quad (16)$$

onde  $\zeta \in \mathbb{R}^N, \zeta > 0$ .

Para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov do tráfego de trens na linha de metrô, o estado  $X_j$ , ao longo de toda a trajetória do sistema (1), deverá ficar restrito ao poliedro:

$$-\delta \leq X_j \leq \delta \quad (17)$$

onde  $\delta \in \mathbb{R}^N, \delta > 0$ . Isto corresponde assumir que (17) é positivamente invariante com respeito ao sistema (1) (Bitsoris, 1988a), (Milani *et alii*, 1996), que é equivalente a requerer que

$$-\delta \leq X_{j+1} \leq \delta \quad (18)$$

deva ser satisfeito para todo  $X_j$  em (17). A invariância positiva de (17) também é equivalente à a função  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ser uma função de Lyapunov para o sistema (1) (Bitsoris, 1988a):

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{|x_i|}{\delta_i} \right\}$$

onde  $x_i$  e  $\delta_i$  representam, respectivamente, as  $i$ -ésimas componentes de  $x$  e  $\delta$ .

Considere as equações do sistema (1), as restrições (15)-(18) e uma lei de controle de realimentação de estado linear e invariante no tempo:

$$U_j = FX_j \quad (19)$$

**Definição 2.2 :** *Regulação robusta com restrições (RRR): Obter uma matriz  $F \in \mathbb{R}^{N \times N}$  tal que para todo  $C$  (13),  $V_j$  (14),  $X_j$  (17),  $j \geq 0$ , as seguintes restrições são satisfeitas conjuntamente:*

$$X_{j+1} = [A(C) + B(C)F]X_j + B(C)V_j$$

$$-\delta \leq X_{j+1} \leq \delta \quad (20)$$

$$-\rho \leq U_j \leq \rho$$

$$-\zeta \leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta$$

### 2.2.2 Solução do Problema RRR

Considere a transformação linear,

$$y = T_0 z \quad (21)$$

$$y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^t ; T_0 \in \mathcal{T}_0 \subset \mathbb{R}^{t \times s} ; z \in \mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^s$$

onde  $\mathcal{Y}, \mathcal{T}_0, \mathcal{Z}$  são conjuntos convexos fechados.

**Definição 2.3 :** *O conjunto  $\mathcal{Z}$  é chamado de admissível robusto para a transformação linear (21) com respeito a  $(\mathcal{Y}, \mathcal{T}_0)$ , se  $y \in \mathcal{Y}$  para todos  $z \in \mathcal{Z}$  e  $T_0 \in \mathcal{T}_0$ . No caso de  $\mathcal{T}_0$  perfeitamente conhecido,  $\mathcal{Z}$  é chamado de admissível para (21), com respeito a  $\mathcal{Y}$*

Considere  $\mathcal{T}_0$  dado pelo poliedro convexo e compacto:

$$T_0 = \left\{ T_0 : T_0 = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j T_0^j ; \lambda_j \geq 0 ; \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j = 1 \right\} \quad (22)$$

onde  $T_0^j \in \mathbb{R}^{t \times s}$  são os pontos extremos do conjunto. Considere também  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Y}$  definidos pelos poliedros convexos simétricos

$$\mathcal{Z} = \{z \in \mathbb{R}^s ; -\eta \leq Qz \leq \eta\} \quad (23)$$

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}^t ; -\zeta \leq Ry \leq \zeta\} \quad (24)$$

onde  $Q \in \mathbb{R}^{q \times s}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{r \times t}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^q$  e  $\zeta \in \mathbb{R}^r$ .

**Lema 2.1** : O poliedro  $\mathcal{Z}$  (23) é admissível robusto para a transformação linear (21) com respeito a  $\mathcal{Y}$  (24) e  $T_0$  (22), se e somente se para todo  $j$  tal que  $1 \leq j \leq N_T$  exista uma matriz  $M_j$  tal que:

$$M_j Q = R T_0^j \quad (25)$$

$$|M_j| \eta \leq \zeta \quad (26)$$

**Prova:**

*Necessidade:* Substituindo (21) em (24), temos:

$$R T_0 z \leq \zeta \quad (27)$$

Se  $\mathcal{Z}$  (23) é admissível robusto para (21) com respeito a (22), (24), o poliedro definido por (23) deve estar contido no poliedro definido por (27) para todo  $T_0 \in T_0$ . Isto é possível se e somente se existe uma matriz  $K$  tal que (Hennet, 1989):

$$K Q = R T_0 \quad (28)$$

$$|K| \eta \leq \zeta \quad (29)$$

Assumindo  $M_j = K$  para cada ponto extremo  $T_0^j$ , as equações (28), (29) podem ser expressas como (25), (26).

*Suficiência:* Considerando (25), (26) válidas, e escalares  $\lambda_j$  tais que:

$$\lambda_j \geq 0 ; \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j = 1 \quad (30)$$

Como  $\lambda_j \geq 0$ , as seguintes combinações são válidas:

$$\lambda_j M_j Q = \lambda_j R T_0^j$$

$$\lambda_j |M_j| \eta \leq \lambda_j \zeta$$

Conseqüentemente,

$$\left( \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j M_j \right) Q = R \left( \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j T_0^j \right) \quad (31)$$

$$\left| \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j M_j \right| \eta \leq \left( \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j \right) \zeta \quad (32)$$

Assumindo  $K = \sum_{j=1}^{N_T} \lambda_j M_j$ , as equações (22), (30), (31), (32) levam a (28), (29), válidas para  $T_0 \in T_0$  genérico, o que torna a conclusão da prova trivial.  $\square$

Sejam as matrizes diagonais:

$$\Gamma_x = \text{diag}[\gamma_{x1} \gamma_{x2} \cdots \gamma_{xN}]$$

$$\Gamma_h = \text{diag}[\gamma_{h1} \gamma_{h2} \cdots \gamma_{hN}] \quad (33)$$

$$\Gamma_u = \text{diag}[\gamma_{u1} \gamma_{u2} \cdots \gamma_{uN}]$$

Sem perda de generalidade, as equações (14), (17)-(20), podem ser colocadas na seguinte forma:

$$- \begin{bmatrix} \delta \\ \eta \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} I_N & \\ & I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \delta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$X_{j+1} = [A(C) + B(C)F \quad B(C)] \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$X_{j+1} - X_j = [A(C) + B(C)F - I_N \quad B(C)] \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$U_j = \begin{bmatrix} F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_j \\ V_j \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$-\Gamma_x \delta \leq X_{j+1} \leq \Gamma_x \delta \quad (38)$$

$$-\Gamma_h \zeta \leq X_{j+1} - X_j \leq \Gamma_h \zeta \quad (39)$$

$$-\Gamma_u \rho \leq U_j \leq \Gamma_u \rho \quad (40)$$

$$0 \leq \Gamma_x, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \quad (41)$$

onde  $I_N$  é a matriz identidade  $N \times N$ .

Considerando as relações (13), (33)-(41), a seguinte proposição dá condições necessárias e suficientes para a solução de RRR.

**Proposição 2.2** : RRR tem solução se e somente se os seguintes  $N$  conjuntos independentes de restrições tiverem uma solução factível.

Conjunto de restrições 1

$$|f_{1,1} - c_1^U| \delta_1 - (1 - c_1^U) \delta_1 \gamma_{x1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1} - c_1^L| \delta_1 - (1 - c_1^L) \delta_1 \gamma_{x1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1} - 1| \delta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1} - 1| \delta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq -\eta_1$$

$$|f_{1,1}| \delta_1 - \rho_1 \gamma_{u1} \leq 0$$

$$0 \leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1$$

Conjuntos de restrições  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$|f_{k,k} - c_k^U| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k} - c_k^L| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k} - 1| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k} - 1| \delta_k + |f_{k,k-1} + 1| \delta_{k-1} - (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k$$

$$|f_{k,k}| \delta_k + |f_{k,k-1}| \delta_{k-1} - \rho_k \gamma_{uk} \leq 0$$

$$0 \leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1$$

**Prova:**

Usando a Definição 2.3 (conjuntos admissíveis robustos) e a Definição 2.2, RRR pode ser equivalentemente reformulado como: Achar  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  tal que as seguintes condições sejam satisfeitas simultaneamente:

- o poliedro definido por (34) é admissível robusto para as transformações (35) e (36) com respeito ao poliedro definido por (38), (13) e (39), (13), respectivamente;
- o poliedro definido por (34) é admissível para a transformação (37) com respeito ao poliedro definido por (40).

Conseqüentemente, usando o Lema 2.1, pode ser verificado que RRR tem solução se e somente se, para todo  $C$  satisfazendo (13), o seguinte conjunto de restrições tem solução factível:

$$\begin{aligned} H(C) &= A(C) + B(C)F \\ |H(C)|\delta &\leq \Gamma_x \delta - |B(C)|\eta \\ Z(C) &= A(C) + B(C)F - I_N \\ |Z(C)|\delta &\leq \Gamma_h \zeta - |B(C)|\eta \\ |F|\delta &\leq \Gamma_u \rho \\ 0 &\leq \Gamma_x, \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \end{aligned} \quad (42)$$

Substituindo (6)-(9) em (42), devido à estrutura diagonal da matriz  $B(C)$ , (Bitsoris, 1988b) e a  $0 < C^L \leq C \leq C^U < 1$ , após algumas manipulações algébricas, pode ser verificado que as restrições (42) são decompostas nos seguintes  $N$  conjuntos de restrições independentes.

Conjunto de restrições 1

$$\begin{aligned} |f_{1,1} - c_1|\delta_1 - (1 - c_1)\delta_1\gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\ |f_{1,1} - 1|\delta_1 - (1 - c_1)\zeta_1\gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\ |f_{1,1}|\delta_1 - \rho_1\gamma_{u1} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \end{aligned} \quad (43)$$

Conjunto de restrições  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$\begin{aligned} |f_{k,k} - c_k|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - \\ - (1 - c_k)\delta_k\gamma_{xk} &\leq -\eta_k \\ |f_{k,k} - 1|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - \\ - (1 - c_k)\zeta_k\gamma_{hk} &\leq -\eta_k \\ |f_{k,k}|\delta_k + |f_{k,k-1}|\delta_{k-1} - \rho_k\gamma_{uk} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \end{aligned} \quad (44)$$

Os conjuntos de restrições  $k = 1 : N$  (43), (44) são factíveis para todo  $c_k$  satisfazendo (13) se e somente se, eles são simultaneamente factíveis para  $c_k = c_k^U$  e  $c_k = c_k^L$ , Lema 2.1, o que conclui a prova.  $\square$

Pode ser verificado em (43), (44) que a matriz  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução do RRR possui a maioria dos elementos nulos, exceto possivelmente os componentes  $f_{k,k}$ ,  $k = 1 : N$ ,  $f_{k,k-1}$ ,  $k = 2 : N$ , mostrando a mesma estrutura bi-diagonal da matriz  $A(C)$  (7).

Baseado na Proposição 2.2, a matriz  $F \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução do RRR pode ser facilmente obtida pela solução dos seguintes  $N$  problemas reduzidos de programação matemática independentes:

$$\min J_1 = \delta_1\gamma_{x1} + p\zeta_1\gamma_{h1} + q\rho_1\gamma_{u1} \quad (45)$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} |f_{1,1} - c_1^U|\delta_1 - (1 - c_1^U)\delta_1\gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\ |f_{1,1} - c_1^L|\delta_1 - (1 - c_1^L)\delta_1\gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\ |f_{1,1} - 1|\delta_1 - (1 - c_1^U)\zeta_1\gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\ |f_{1,1} - 1|\delta_1 - (1 - c_1^L)\zeta_1\gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\ |f_{1,1}|\delta_1 - \rho_1\gamma_{u1} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \end{aligned}$$

$$\min J_k = \delta_k\gamma_{xk} + p\zeta_k\gamma_{hk} + q\rho_k\gamma_{uk} \quad (46)$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} |f_{k,k} - c_k^U|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - (1 - c_k^U)\delta_k\gamma_{xk} &\leq -\eta_k \\ |f_{k,k} - c_k^L|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - (1 - c_k^L)\delta_k\gamma_{xk} &\leq -\eta_k \\ |f_{k,k} - 1|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - (1 - c_k^U)\zeta_k\gamma_{hk} &\leq -\eta_k \\ |f_{k,k} - 1|\delta_k + |f_{k,k-1} + 1|\delta_{k-1} - (1 - c_k^L)\zeta_k\gamma_{hk} &\leq -\eta_k \\ |f_{k,k}|\delta_k + |f_{k,k-1}|\delta_{k-1} - \rho_k\gamma_{uk} &\leq 0 \\ 0 &\leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \end{aligned}$$

onde  $p \geq 0$ ,  $q \geq 0$  são escalares usados para ponderação relativa de  $\gamma_{xk}$ ,  $\gamma_{hk}$ ,  $\gamma_{uk}$ .

Das equações (38)-(41), devido à independência dos problemas (45), (46), pode ser verificado que a solução desses corresponde à otimização do índice de desempenho global da linha, dada pela soma ponderada de 1-normas (Golub e Van Loan, 1996):

$$J_j = \mathbf{1}_N^T [|X_{j+1}| + p|X_{j+1} - X_j| + q|U_j|] \quad (47)$$

onde  $\mathbf{1}_N$  é um vetor de dimensão  $(N \times 1)$  com as componentes iguais a 1.

Nos problemas (45),(46) pode ser verificado, por inspeção, que na medida que o esforço de controle  $\gamma_{uk}$  varia de  $0 \rightarrow 1$ , os outros componentes do índice de desempenho se comportam da seguinte forma:  $\gamma_{hk}$  decresce monotonicamente com as variações de  $f_{k,k}$  de  $0 \rightarrow 1$  e de  $f_{k,k-1}$  de  $0 \rightarrow -1$ ;  $\gamma_{xk}$  decresce monotonicamente com as variações de  $f_{k,k}$  de  $0 \rightarrow c_k^U$  e de  $f_{k,k-1}$  de  $0 \rightarrow -1$ . Assim sendo, dado que  $0 < c_k^L \leq c_k^U < 1$ , o ponto de ótimo dos problemas (45),(46) deve ocorrer dentro da região:

$$0 \leq f_{k,k} \leq 1 \quad ; \quad k = 1 : N \quad (48)$$

$$-1 \leq f_{k,k-1} \leq 0 \quad ; \quad k = 2 : N \quad (49)$$

Considere a seguinte mudança de variáveis, normalmente usada em programação linear (Gill *et alii*, 1981):

$$\begin{aligned}
f_{k,k} - c_k^U &= y_k^{U+} - y_k^{U-} \\
|f_{k,k} - c_k^U| &\leq y_k^{U+} + y_k^{U-} \\
f_{k,k} - c_k^L &= y_k^{L+} - y_k^{L-} \\
|f_{k,k} - c_k^L| &\leq y_k^{L+} + y_k^{L-} \\
y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} &\geq 0
\end{aligned} \tag{50}$$

Usando (48)-(50) e manipulações algébricas rotineiras, os problemas de programação matemática (45), (46) podem ser facilmente transformados nos problemas equivalentes de programação linear:

PL1

$$\min J_1 = \delta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1}$$

Sujeito à

$$\begin{aligned}
f_{1,1} - y_1^{U+} + y_1^{U-} &= c_1^U \\
f_{1,1} - y_1^{L+} + y_1^{L-} &= c_1^L \\
(y_1^{U+} + y_1^{U-})\delta_1 - (1 - c_1^U)\delta_1 \gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\
(y_1^{L+} + y_1^{L-})\delta_1 - (1 - c_1^L)\delta_1 \gamma_{x1} &\leq -\eta_1 \\
(1 - f_{1,1})\delta_1 - (1 - c_1^U)\zeta_1 \gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\
(1 - f_{1,1})\delta_1 - (1 - c_1^L)\zeta_1 \gamma_{h1} &\leq -\eta_1 \\
f_{1,1}\delta_1 - \rho_1 \gamma_{u1} &\leq 0 \\
0 \leq \gamma_{x1}, \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 &; 0 \leq f_{1,1} \leq 1 \\
y_1^{L+}, y_1^{L-}, y_1^{U+}, y_1^{U-} &\geq 0
\end{aligned}$$

PL  $k$ ;  $k = 2 : N$

$$\min J_k = \delta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk}$$

Sujeito à

$$\begin{aligned}
f_{k,k} - y_k^{U+} + y_k^{U-} &= c_k^U \\
f_{k,k} - y_k^{L+} + y_k^{L-} &= c_k^L \\
(y_k^{U+} - y_k^{U-})\delta_k + (f_{k,k-1} + 1)\delta_{k-1} - \\
&\quad - (1 - c_k^U)\delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k \\
(y_k^{L+} - y_k^{L-})\delta_k + (f_{k,k-1} + 1)\delta_{k-1} - \\
&\quad - (1 - c_k^L)\delta_k \gamma_{xk} \leq -\eta_k \\
(1 - f_{k,k})\delta_k + (f_{k,k-1} + 1)\delta_{k-1} - \\
&\quad - (1 - c_k^U)\zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k \\
(1 - f_{k,k})\delta_k + (f_{k,k-1} + 1)\delta_{k-1} - \\
&\quad - (1 - c_k^L)\zeta_k \gamma_{hk} \leq -\eta_k \\
f_{k,k}\delta_k - (f_{k,k-1})\delta_{k-1} - \rho_k \gamma_{uk} &\leq 0 \\
0 \leq \gamma_{xk}, \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 &; 0 \leq f_{k,k} \leq 1 \\
-1 \leq f_{k,k-1} \leq 0 &; y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} \geq 0
\end{aligned}$$

## 2.3 Regulação Ótima Minimax com Restrições (ROMC)

A formulação RRR fornece uma lei de controle de realimentação linear, invariante no tempo. A invariância da lei de controle certamente facilita sua realização. No entanto, tendo que satisfazer todo o poliedro no espaço de estado (17), nas proximidades da origem, pode vir a oferecer um desempenho de regulação inferior ao de uma lei de controle não linear, calculada em função do estado atual.

Nesse sentido, a seguir propomos uma formulação de controle preditivo ótimo minimax (Garcia *et alii*, 1989), um passo à frente, com restrições, para o problema de regulação do tráfego de trens.

### 2.3.1 Formulação do Problema ROMC

Seja um sistema incerto discreto no tempo:

$$x(k+1) = A(w)x(k) + B(w)u(k) \tag{51}$$

$$u(k) = F(x(k))x(k) \tag{52}$$

$$w \in \mathcal{W} \subset \mathfrak{R}^s \tag{53}$$

onde:  $x(k) \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathfrak{R}^m$  são, respectivamente, o estado do sistema e entrada de controle;  $F(x(k))$  é uma matriz de realimentação de estados possivelmente não linear;  $w$  é desconhecido e  $\mathcal{W}$  é um conjunto compacto.

**Lema 2.2** : *O sistema em malha fechada (51)-(53) é robustamente assintoticamente estável (Barmish, 1994), Milani et alii, 1996) se a seguinte condição é válida para todo  $w \in \mathcal{W}$  e  $x(k) \in \mathfrak{R}^n$  :*

$$|A(w) + B(w)F(x(k))|\beta < \beta \tag{54}$$

onde  $\beta \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\beta > 0$  é um vetor dado.

Este Lema pode ser facilmente provado, mostrando que a função  $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de Lyapunov para o sistema (51)-(53) (Bitsoris, 1988a):

$$\Psi(x) = \max_i \left\{ \frac{|x_i|}{\beta_i} \right\} \quad (55)$$

onde  $x_i$  e  $\beta_i$  representam, respectivamente, as  $i$ -ésimas componentes de  $x$  e de um dado vetor real  $\beta > 0$ .

Considere as equações do sistema (1)-(9) e uma lei de controle por realimentação de estados, possivelmente não linear:

$$U_j = F_j X_j \quad (56)$$

Para garantir a estabilidade assintótica robusta do tráfego de trens na linha metroviária, de acordo com o Lema 2.2, para todo  $C$  (13), a lei de realimentação (56) deverá satisfazer:

$$|A(C) + B(C)F_j|\beta \leq \lambda\beta \quad (57)$$

onde:  $\beta \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, \beta > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  são dados. O parâmetro  $\lambda$  especifica um limitante superior do índice de convergência desejado para o sistema controlado.

Para avaliar o desempenho da regulação, considere o critério dado pela soma ponderada de 1-normas de  $X_{j+1}, X_{j+1} - X_j, U_j$ :

$$J_j = \mathbf{1}_N^T [|X_{j+1}| + p|X_{j+1} - X_j| + q|U_j|] \quad (58)$$

onde  $p, q$  são escalares positivos para ponderação relativa dos componentes do critério.

**Definição 2.4 :** *Regulação Ótima Minimax com Restrições (ROMC):* Dados o critério de desempenho  $J_j$  (58) e um vetor de estado  $X_j$ , determinar uma matriz  $F_j \in \mathbb{R}^{N \times N}$  solução do seguinte problema de programação matemática minimax:

$$\min_{F_j} \max_{V_j, C} J_j \quad (59)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} X_{j+1} &= [A(C) + B(C)F_j]X_j + B(C)V_j \\ -\zeta &\leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} |A(C) + B(C)F_j|\beta &\leq \lambda\beta \\ -\rho &\leq F_j X_j \leq \rho \\ -\eta &\leq V_j \leq \eta \\ C^L &\leq C \leq C^U \end{aligned} \quad (61)$$

### 2.3.2 Solução do Problema ROMC

Considere as restrições lineares:

$$-\zeta \leq Gz + Ev \leq \zeta \quad (62)$$

$$-\eta \leq v \leq \eta \quad (63)$$

onde:  $z \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p, \zeta \in \mathbb{R}^n, \zeta \geq 0, \eta \geq 0$ .

**Lema 2.3 :** *Um vetor  $z$  é uma solução factível das restrições (62) para todo  $v$  satisfazendo (63) se e somente se  $z$  é também uma solução factível das seguintes restrições:*

$$|E|\eta - \zeta \leq Gz \leq \zeta - |E|\eta \quad (64)$$

**Prova:**

As restrições (63), (62) podem ser escritas de forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ -I_p \end{bmatrix} v \leq \begin{bmatrix} \eta \\ \eta \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} E \\ -E \end{bmatrix} v \leq \begin{bmatrix} \zeta - Gz \\ \zeta + Gz \end{bmatrix} \quad (66)$$

Um vetor  $z$  é uma solução factível de (62) para todo  $v$  satisfazendo (63) se e somente se qualquer  $v$  que satisfaz (65) também satisfaz (66). Isto é possível se e somente se existem matrizes  $M^+ > 0$ , e  $M^- > 0$ , tais que (Hennet, 1989):

$$M^+ \geq 0 \quad ; \quad M^- \geq 0 \quad (67)$$

$$(M^+ - M^-) = E$$

$$(M^+ + M^-)\eta \leq \zeta - Gz \quad (68)$$

$$(M^+ + M^-)\eta \leq \zeta + Gz$$

De (67), empregando uma propriedade usual em programação linear (Gill *et alii*, 1981), tem-se:

$$|E| \leq M^+ + M^- \quad (69)$$

Substituindo (69) em (68), a prova pode ser facilmente concluída.  $\square$ .

Considere as matrizes diagonais (33), o critério de desempenho ROMC (58), (59) e as restrições (60), (61). A proposição a seguir fornece um método computacional descentralizado eficiente para solução de ROMC.

**Proposição 2.3 :** *Dado um vetor de estado  $X_j = (x_i)$ , a solução correspondente  $F_j = (f_{i,j})$  de ROMC é dada pela solução dos  $N$  problemas independentes de programação matemática de ordem reduzida (MP) a seguir :*

MP 1

$$\min \beta_1 \gamma_{x1} + p\zeta_1 \gamma_{h1} + q\rho_1 \gamma_{u1} \quad (70)$$

Sujeito à:

$$|f_{1,1} - c_1^U| \beta_1 \leq (1 - c_1^U) \lambda \beta_1$$

$$|f_{1,1} - c_1^L| \beta_1 \leq (1 - c_1^L) \lambda \beta_1$$

$$\eta_1 - (1 - c_1^U) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1^U) x_1 \leq (1 - c_1^U) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1$$

$$\eta_1 - (1 - c_1^L) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1^L) x_1 \leq (1 - c_1^L) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1$$

$$\eta_1 - (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1^U) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1$$

$$\eta_1 - (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1^L) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1$$

$$-\rho_1 \gamma_{u1} \leq f_{1,1} x_1 \leq \rho_1 \gamma_{u1}$$

$$\gamma_{x1} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1$$

MP  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$\min \beta_k \gamma_{xk} + p\zeta_k \gamma_{hk} + q\rho_k \gamma_{uk} \quad (71)$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned}
|f_{k,k} - c_k^U| \beta_k + |f_{k,k-1} + 1| \beta_{k-1} &\leq (1 - c_k^U) \lambda \beta_k \\
|f_{k,k} - c_k^L| \beta_k + |f_{k,k-1} + 1| \beta_{k-1} &\leq (1 - c_k^L) \lambda \beta_k \\
(f_{k,k} - c_k^U) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U) \beta_k - \eta_k \\
-(f_{k,k} - c_k^U) x_k - (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U) \beta_k - \eta_k \\
(f_{k,k} - c_k^L) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L) \beta_k - \eta_k \\
-(f_{k,k} - c_k^L) x_k - (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L) \beta_k - \eta_k \\
(f_{k,k} - 1) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
-(f_{k,k} - 1) x_k - (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
(f_{k,k} - 1) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
-(f_{k,k} - 1) x_k - (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k \\
-\rho_k \gamma_{uk} &\leq f_{k,k} x_k + f_{k,k-1} x_{k-1} \leq \rho_k \gamma_{uk} \\
\gamma_{xk} &\geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1
\end{aligned}$$

**Prova:**

ROMC pode ser equivalentemente definido como o seguinte problema de minimização:

$$\min_{F_j} J_j \quad (72)$$

sujeito às restrições (60) que devem ser satisfeitas para todos  $C$ ,  $V_j$  (61). Conseqüentemente, usando (33), sem perda de generalidade tem-se:

$$\min \mathbf{1}_N^T [\Gamma_x \beta + p \Gamma_h \zeta + q \Gamma_u \rho] \quad (73)$$

sujeito às seguintes restrições, que devem ser satisfeitas para todos  $C$ ,  $V_j$  (61):

$$-\Gamma_x \beta \leq [A(C) + B(C)F_j] X_j + B(C)V_j \leq \Gamma_x \beta \quad (74)$$

$$-\Gamma_h \zeta \leq [A(C) + B(C)F_j - I_N] X_j + B(C)V_j \leq \Gamma_h \zeta$$

$$|A(C) + B(C)F_j| \beta \leq \lambda \beta$$

$$-\rho \leq F_j X_j \leq \rho \quad (75)$$

$$0 \leq \Gamma_h, \Gamma_u \leq I_N \quad ; \quad \Gamma_x \geq 0$$

Baseado no Lema 2.3, as restrições (74) podem ser substituídas por:

$$|B(C)| \eta - \Gamma_x \beta \leq [A(C) + B(C)F_j] X_j \leq \Gamma_x \beta - |B(C)| \eta$$

$$[A(C) + B(C)F_j - I_N] X_j \leq \Gamma_h \zeta - |B(C)| \eta \quad (76)$$

$$-[A(C) + B(C)F_j - I_N] X_j \leq \Gamma_h \zeta + |B(C)| \eta$$

que devem ser satisfeitas para todos  $C$  (61).

Substituindo (6)-(9) em (73), (75), (76), devido à estrutura diagonal da matriz  $B(C)$  (Bitsoris, 1988b) e a  $0 < C^L \leq C \leq C^U < 1$ , após algumas manipulações algébricas, pode ser verificado que MP (73), (75), (76) pode ser decomposto nos seguintes  $N$  MPs independentes, de ordem reduzida, cujas restrições devem ser satisfeitas para todos  $C$  (61):

MP 1

$$\min \beta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1} \quad (77)$$

Sujeito à:

$$|f_{1,1} - c_1| \beta_1 \leq (1 - c_1) \lambda \beta_1$$

$$\eta_1 - (1 - c_1) \beta_1 \gamma_{x1} \leq (f_{1,1} - c_1) x_1 \leq (1 - c_1) \beta_1 \gamma_{x1} - \eta_1$$

$$\eta_1 - (1 - c_1) \zeta_1 \gamma_{h1} \leq (f_{1,1} - 1) x_1 \leq (1 - c_1) \zeta_1 \gamma_{h1} - \eta_1$$

$$-\rho_1 \gamma_{u1} \leq f_{1,1} x_1 \leq \rho_1 \gamma_{u1}$$

$$\gamma_{x1} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1$$

MP  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$\min \beta_k \gamma_{xk} + p \zeta_k \gamma_{hk} + q \rho_k \gamma_{uk} \quad (78)$$

Sujeito à:

$$|f_{k,k} - c_k| \beta_k + |f_{k,k-1} + 1| \beta_{k-1} \leq (1 - c_k) \lambda \beta_k$$

$$(f_{k,k} - c_k) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k) \beta_k \gamma_{xk} - \eta_k$$

$$-(f_{k,k} - c_k) x_k - (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k) \beta_k \gamma_{xk} - \eta_k$$

$$(f_{k,k} - 1) x_k + (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k$$

$$-(f_{k,k} - 1) x_k - (f_{k,k-1} + 1) x_{k-1} \leq (1 - c_k) \zeta_k \gamma_{hk} - \eta_k$$

$$-\rho_k \gamma_{uk} \leq f_{k,k} x_k + f_{k,k-1} x_{k-1} \leq \rho_k \gamma_{uk}$$

$$\gamma_{xk} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1$$

Os conjuntos de restrições dos MPs (77), (78) são afins em  $c_k$ . Conseqüentemente eles são factíveis para todos  $c_k$  satisfazendo (61) se e somente se eles são simultaneamente factíveis para  $c_k = c_k^U$  e  $c_k = c_k^L$ , o que conclui a prova.  $\square$

Considere a seguinte mudança de variáveis, usual em programação linear (Gill *et alii*, 1981):

$$f_{k,k} - c_k^U = y_k^{U+} - y_k^{U-}$$

$$|f_{k,k} - c_k^U| \leq y_k^{U+} + y_k^{U-}$$

$$f_{k,k} - c_k^L = y_k^{L+} - y_k^{L-} \quad (79)$$

$$|f_{k,k} - c_k^L| \leq y_k^{L+} + y_k^{L-}$$

$$y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} \geq 0$$

Usando (79), os MPs (70), (71) são facilmente transformáveis nos seguintes problemas equivalentes de programação linear:

PL 1

$$\min \beta_1 \gamma_{x1} + p \zeta_1 \gamma_{h1} + q \rho_1 \gamma_{u1}$$

Sujeito à:



$$\begin{aligned}
f_{1,1} - y_1^{U+} + y_1^{U-} &= c_1^U \\
f_{1,1} - y_1^{L+} + y_1^{L-} &= c_1^L \\
(y_1^{U+} + y_1^{U-})\beta_1 &\leq (1 - c_1^U)\lambda\beta_1 \\
(y_1^{L+} + y_1^{L-})\beta_1 &\leq (1 - c_1^L)\lambda\beta_1 \\
\eta_1 - (1 - c_1^U)\beta_1\gamma_{x1} &\leq (f_{1,1} - c_1^U)x_1 \leq (1 - c_1^U)\beta_1\gamma_{x1} - \eta_1 \\
\eta_1 - (1 - c_1^L)\beta_1\gamma_{x1} &\leq (f_{1,1} - c_1^L)x_1 \leq (1 - c_1^L)\beta_1\gamma_{x1} - \eta_1 \\
\eta_1 - (1 - c_1^U)\zeta_1\gamma_{h1} &\leq (f_{1,1} - 1)x_1 \leq (1 - c_1^U)\zeta_1\gamma_{h1} - \eta_1 \\
\eta_1 - (1 - c_1^L)\zeta_1\gamma_{h1} &\leq (f_{1,1} - 1)x_1 \leq (1 - c_1^L)\zeta_1\gamma_{h1} - \eta_1 \\
-\rho_1\gamma_{u1} &\leq f_{1,1}x_1 \leq \rho_1\gamma_{u1} \\
\gamma_{x1} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{h1}, \gamma_{u1} \leq 1 \quad ; \quad y_1^{L+}, y_1^{L-}, y_1^{U+}, y_1^{U-} &\geq 0
\end{aligned}$$

PL  $k$  ;  $k = 2 : N$

$$\min \beta_k \gamma_{xk} + p\zeta_k \gamma_{hk} + q\rho_k \gamma_{uk}$$

Sujeito à:

$$\begin{aligned}
f_{k,k} - y_k^{U+} + y_k^{U-} &= c_k^U \\
f_{k,k} - y_k^{L+} + y_k^{L-} &= c_k^L \\
(y_k^{U+} + y_k^{U-})\beta_k + (f_{k,k-1} + 1)\beta_{k-1} &\leq (1 - c_k^U)\lambda\beta_k \\
(y_k^{L+} + y_k^{L-})\beta_k + (f_{k,k-1} + 1)\beta_{k-1} &\leq (1 - c_k^L)\lambda\beta_k \\
(f_{k,k} - c_k^U)x_k + (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U)\beta_k - \eta_k \\
-(f_{k,k} - c_k^L)x_k - (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L)\beta_k - \eta_k \\
(f_{k,k} - c_k^L)x_k + (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L)\beta_k - \eta_k \\
-(f_{k,k} - c_k^U)x_k - (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U)\beta_k - \eta_k \\
(f_{k,k} - 1)x_k + (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U)\zeta_k\gamma_{hk} - \eta_k \\
-(f_{k,k} - 1)x_k - (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L)\zeta_k\gamma_{hk} - \eta_k \\
(f_{k,k} - 1)x_k + (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^L)\zeta_k\gamma_{hk} - \eta_k \\
-(f_{k,k} - 1)x_k - (f_{k,k-1} + 1)x_{k-1} &\leq (1 - c_k^U)\zeta_k\gamma_{hk} - \eta_k \\
-\rho_k\gamma_{uk} &\leq f_{k,k}x_k + f_{k,k-1}x_{k-1} \leq \rho_k\gamma_{uk} \\
\gamma_{xk} \geq 0 \quad ; \quad 0 \leq \gamma_{hk}, \gamma_{uk} \leq 1 \quad ; \quad y_k^{L+}, y_k^{L-}, y_k^{U+}, y_k^{U-} &\geq 0
\end{aligned}$$

Pode ser verificado nos MPs (70), (71), que a matriz  $F_j \in \mathfrak{R}^{N \times N}$  solução de ROMC, com exceção possivelmente de  $f_{k,k}$ ,  $k = 1 : N$ ,  $f_{k,k-1}$ ,  $k = 2 : N$ , tem todos seus outros componentes nulos, apresentando portanto a mesma estrutura bi-diagonal da matriz  $A(C)$  (6). De (2)-(3), (56), (71), pode ser verificado que o controle aplicado ao trem  $j$  na plataforma  $k$  é dado por:

$$u_k^j = f_{k+1,k}x_k^j + f_{k+1,k+1}x_{k+1}^{j-1}$$

Quando o controle  $u_k^j$  é aplicado,  $x_k^j$  é conhecido,  $x_{k+1}^{j-1}$  é também conhecido ou pode ser facilmente previsto. Fazendo  $x_{k+1} = x_{k+1}^{j-1}$ ,  $x_k = x_k^j$ ,  $f_{k+1,k}$  e  $f_{k+1,k+1}$  podem ser calculados resolvendo o problema de programação linear correspondente a MP  $k + 1$  (71).

ROMC pode, portanto, ser implementado em tempo real como um sistema de controle descentralizado por plataforma da linha: cada vez que um trem chegar a uma plataforma, uma vez medidos ou estimados o atraso do trem na plataforma e o do trem precedente na plataforma seguinte na linha, a ação de controle é calculada, resolvendo o pequeno problema de programação linear associado à plataforma em questão.

Pela facilidade de cálculo e estrutura de controle local, as leis de controle fornecidas pelas formulações RVM, RRR e ROMC são aplicáveis sem dificuldade às linhas de metrô atuais.

### 3 EXEMPLOS NUMÉRICOS E SIMULAÇÕES

Nesta Seção serão apresentados exemplos numéricos que ilustram o desempenho dos resultados apresentados na Seção anterior.

Podemos destacar duas políticas de controle para operação de um sistema metroviário: uma privilegia a economia operacional (econômica) e a outra privilegia o desempenho do sistema em detrimento do custo operacional (alto desempenho). A estratégia utilizada depende da política da companhia em relação aos passageiros, o horário de operação (horário de pico de demanda ou não) e a necessidade de conexão com outro sistema de transporte, que torna importante o cumprimento dos horários. Os exemplos apresentados a seguir levam em consideração essas duas políticas.

#### 3.1 Dados Utilizados

Considere uma linha metroviária com  $N = 10$  plataformas figura 1 e vetor de parâmetros incertos  $C$  delimitados por:

$$\begin{aligned}
C^U &= \begin{bmatrix} .200 & .210 & .250 & .200 & .120 \\ .150 & .250 & .170 & .180 & .125 \end{bmatrix} \\
C^L &= \begin{bmatrix} .180 & .189 & .225 & .180 & .108 \\ .135 & .225 & .153 & .162 & .112 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{80}$$

Considere também que os vetores de perturbações  $V_j$ , controle  $U_j$  e intervalo entre trens  $(X_{j+1} - X_j)$  são delimitados respectivamente por:

$$\eta = [ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 ] (s) \tag{81}$$

$$\rho = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 20 \end{bmatrix} (s) \tag{82}$$

$$\zeta = \begin{bmatrix} 62 & 62 & 62 & 62 & 62 \\ 62 & 62 & 62 & 62 & 62 \end{bmatrix} (s)$$

Para ilustrar o desempenho em malha fechada obtido com os diferentes tipos de regulação, serão apresentados um conjunto de 100 (cem) resultados de simulações dos intervalos  $(x_k^j - x_k^{j-1})$ , controles  $u_k^j$  e atrasos  $x_k^j$  de um trem  $j$  ao longo das plataformas da linha, a partir da condição inicial

$$X_0 = [ 31 \ -31 \ 0 \ -31 \ 31 \ 0 \ 0 \ 30 \ -30 \ 0 ]^T (s)$$

Nessas simulações é considerado que os componentes dos parâmetros  $C$  e perturbações externas  $V$  são variáveis aleatórias, uniformemente distribuídas dentro dos poliedros delimitados respectivamente por (80) e (81).

### 3.2 RVM

A formulação RVM não considera as perturbações externas e as limitações sobre as variáveis de estado e controle. O critério de desempenho adotado é:

$$J_v = X_{j+1}^T X_j + p(X_{j+1} - X_j)^T (X_{j+1} - X_j) + qU_j^T U_j \quad (83)$$

e é assumido que o vetor  $C$  é perfeitamente conhecido, dado por:

$$C = (C^U + C^L)/2$$

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (83):

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{25}$$

Para o controle  $U_j = F X_j$ , a matriz de realimentação de estados obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} .5874 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.9874 & .5922 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.9885 & 0.6117 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.9871 & .5874 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.9845 & .5484 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.9855 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .5630 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.9885 & .6117 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.9861 & .5727 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.9864 & .5776 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.9847 & .5508 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Conforme previsto na Proposição 2.1, a matriz  $F$  (84) tem uma estrutura bi-diagonal, permitindo que o controle seja implementado de forma descentralizado nas estações da linha.

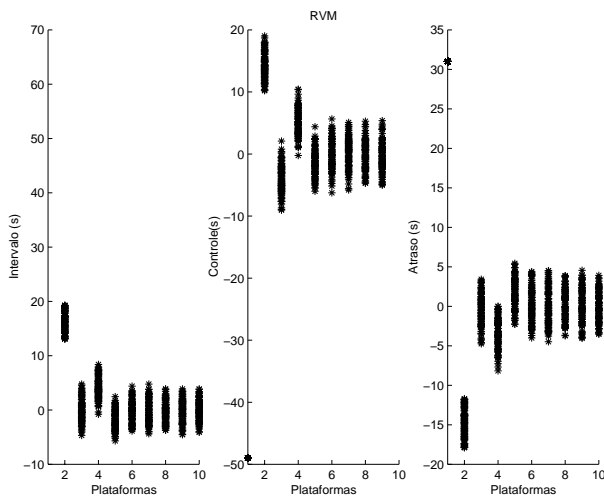


Figura 2: RVM de alto desempenho ( $p = 1$  ;  $q = \frac{1}{25}$ )

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 2. Podemos verificar que o controle na primeira plataforma tem valor  $u_1 \cong -50$ , que está bem fora do intervalo

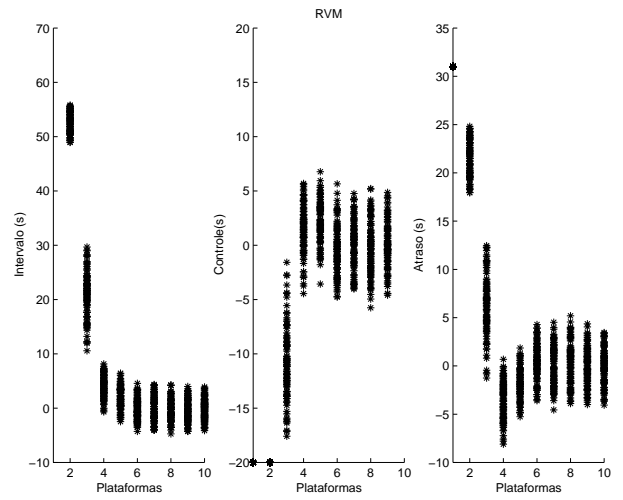


Figura 3: RVM de alto desempenho com saturação de controle ( $p = 1$ ;  $q = \frac{1}{25}$ )

admissível de controle  $[-20, 20]$ . Os valores do intervalo entre trens satisfazem às restrições estabelecidas.

Dado que o controle a ser aplicado não pode ultrapassar seus limites, na figura 3 são apresentados os resultados de simulação obtidos considerando o controle saturado dentro do intervalo admissível  $[-20, 20]$ .

Podemos ver que a saturação do controle é aceita sem prejudicar o desempenho do sistema controlado ou sua estabilidade, sendo este um resultado importante a favor da utilização desta abordagem de controle.

Para uma política econômica foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (83):

$$p = 1 \quad ; \quad q = 25$$

A matriz de controle por realimentação de estado obtida foi:

$$F = \begin{bmatrix} .0647 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.1110 & .0666 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.1210 & .0749 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.1087 & .0647 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.0925 & .0515 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.0981 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .0561 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.1210 & .0749 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.1022 & .0593 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.1043 & .0611 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.0934 & .0522 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 4. Podemos notar que o controle está dentro de seus limites mas, nos gráficos referentes ao intervalo entre trens e atraso, pode ser verificado que o sistema controlado é instável, com os valores do atraso e intervalo aumentando progressivamente ao longo da sequência de plataformas

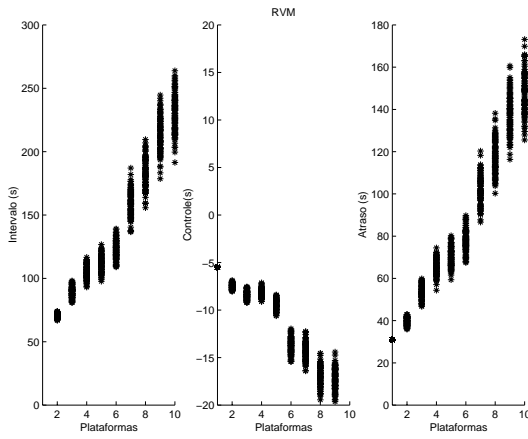


Figura 4: RVM econômica ( $p = 1$  ;  $q = 25$ )

Este resultado é bem previsível, dado o caráter econômico da regulação e a não consideração, na formulação do problema, das incertezas do modelo e da condição de estabilidade do sistema controlado.

### 3.3 RRR

Nesta abordagem, conforme descrita no Seção 2, a sua formulação leva em consideração, de forma explícita, as incertezas nos parâmetros, restrições de controle e perturbações externas seguintes:

$$\begin{aligned} -\zeta &\leq X_{j+1} - X_j \leq \zeta \\ -\rho &\leq U_j \leq \rho \\ -\eta &\leq V_j \leq \eta \end{aligned}$$

com  $\zeta$ ,  $\rho$  e  $\eta$  dados em (82),(81).

O critério de desempenho da regulação (47) é dado pela soma ponderada de 1-normas:

$$J_j = \mathbf{1}_N^T [|X_{j+1}| + p|X_{j+1} - X_j| + q|U_j|] \quad (86)$$

Adicionalmente, para garantir a estabilidade no sentido de Lyapunov, ao longo da trajetória do sistema, o vetor de estado é considerado restrito ao poliedro

$$-\delta \leq X_j \leq \delta \quad (87)$$

definido por

$$\delta = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix} (s) \quad (88)$$

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (86):

$$p = 1 \quad ; \quad q = \frac{1}{5}$$

Note que as ponderações acima, para o critério de desempenho linear da RRR, são equivalentes às ponderações (1 e  $\frac{1}{25}$ ) utilizadas para o critério de desempenho quadrático da RVM.

Utilizando um vetor de estados inicial

$$X_0 = [ 30 \quad -30 \quad 0 \quad -30 \quad 30 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \quad -30 \quad 0 ]^T (s)$$

compatível com as restrições sobre o estado  $X$  (87), (88), foi obtida a matriz de realimentação de estados (89) que, conforme

previsto na Proposição 2.2, é invariante no tempo e tem estrutura bi-diagonal.

$$F = \begin{bmatrix} .1922 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.6666 & .0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.6667 & .0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.6666 & .0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.6666 & .0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.6666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ .0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.6667 & .0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.6666 & .0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.6666 & .0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.6666 & .0000 \end{bmatrix} \quad (89)$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 5. Conforme esperado, podemos notar que o controle, o intervalo entre trens e o atraso satisfazem as restrições do problema. Comparando os gráficos nas figuras 3 e 5, podemos verificar que RRR apresenta desempenho de regulação do intervalo entre trens e atraso equivalente à RVM mas com um esforço de controle bem inferior. Estes resultados mostram a maior eficiência de RRR na utilização dos recursos de controle disponíveis.

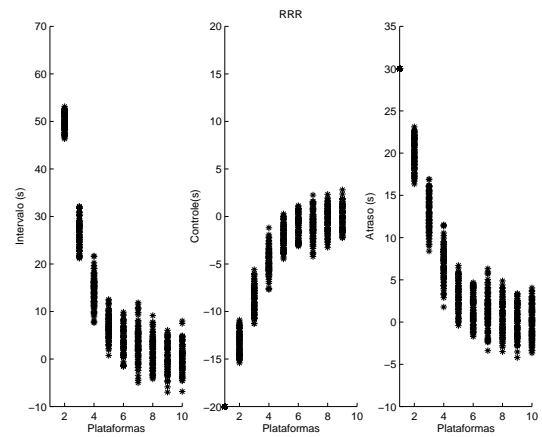


Figura 5: RRR de alto desempenho ( $p = 1$  ;  $q = \frac{1}{5}$ )

Para uma política de regulação econômica foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (86):

$$p = 1 \quad ; \quad q = 5$$

A matriz de controle por realimentação de estados obtida é dada em (90) e os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 6. Podemos observar que o controle é menor que o aplicado na política de regulação de alto desempenho, com uma conseqüente diminuição do desempenho de regulação

e dispersão maior do intervalo entre trens e atraso.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5867 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6667 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5667 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4067 & 0.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4667 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6667 & 0.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5067 & 0.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5267 & 0.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4167 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (90)$$

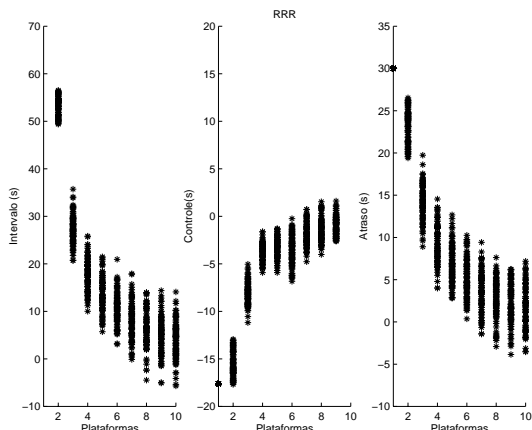


Figura 6: RRR econômica ( $p = 1 ; q = 5$ )

Um inconveniente da abordagem RRR é a necessidade de especificar um poliedro de restrições (87),(88) sobre o estado do sistema, que é uma restrição artificial, não existente na formulação original do problema de regulação. Por exemplo, com os dados utilizados nesta seção, para um poliedro de estados (87), delimitado por:

$$\delta = [ 31 \ 31 \ 31 \ 31 \ 31 \ 31 \ 31 \ 31 \ 31 \ 31 ] (s)$$

levemente superior ao (88), o problema RRR não admite solução factível. Ou seja, a escolha dos limites (88) afeta a solução do problema e o desempenho de regulação obtido.

### 3.4 ROMC

Nesta abordagem, conforme descrito na Seção 2, para evitar o conservadorismo da política RRR e utilizar da melhor maneira os recursos disponíveis de controle, o cálculo do controle aplicado ao trem em cada plataforma é feito em tempo real, utilizando as informações de estado vigentes no momento. Com isso, não existe uma matriz de realimentação de estado invariante no tempo calculada a priori, como nas outras regulações. A formulação deste problema leva em consideração, de forma explícita, as incertezas nos parâmetros, restrições no controle e perturbações externas iguais às RRR.

Para a função de Lyapunov que garante a estabilidade do sistema serão assumidos os seguintes parâmetros

$$\beta = [ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 ]$$

e índice de convergência

$$\lambda = 0.80$$

Para uma política de alto desempenho, foi adotada a seguinte ponderação do critério de desempenho (86):

$$p = 1 ; q = \frac{1}{5}$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 7. Comparando os gráficos nas figuras 3, 5 e 7, podemos verificar que ROMC apresenta desempenho de regulação do intervalo entre trens e atraso superior à RVM e RRR.

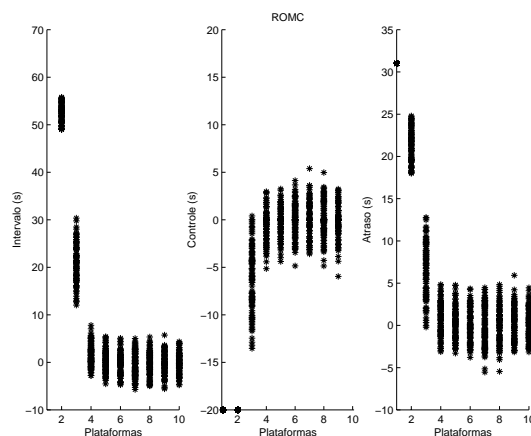


Figura 7: ROMC de alto desempenho ( $p = 1 ; q = \frac{1}{5}$ )

Para uma política econômica, foi adotada a ponderação de critério de desempenho (86):

$$p = 1 ; q = 5$$

Os resultados de simulação do sistema controlado são apresentados na figura 8. Podemos ver, comparando os gráficos de atraso e intervalo entre trens nas figuras 7, 8 que, conforme previsto, o desempenho de regulação da política econômica é inferior ao da política de alto desempenho.

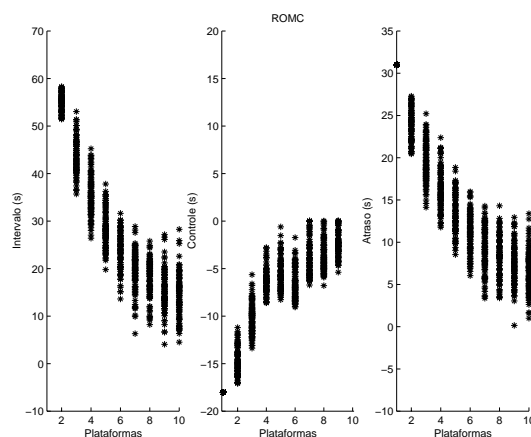


Figura 8: ROMC econômica ( $p = 1 ; q = 5$ )

Analisando os gráficos do esforço de controle, notamos um detalhe interessante: a política econômica começa gastando menos controle para eliminar os desvios no atraso e intervalo entre trens (ver plataformas 1 e 2). No entanto, esta economia inicial prejudica o desempenho de regulação do sistema, fazendo que nas plataformas seguintes (3 a 9) seja consumido um esforço de

controle maior para a obtenção de um desempenho de regulação claramente inferior. Ou seja, a política econômica tem um gasto global de controle superior ao da política de alto desempenho, ao mesmo tempo que apresenta desempenho de regulação, em todos os aspectos, inferior ao da política de alto desempenho. Este paradoxo se deve ao fato do índice de desempenho adotado ser de um passo, não considerando portanto todo o horizonte de operação.

## 4 CONCLUSÃO

Este artigo tratou do problema de regulação do tráfego de trens em linhas de metrô operando em regime aberto, utilizando o modelo de tráfego de tempo real desenvolvido por Campion *et alii* (1985), Van Breusegem *et alii* (1991). Foram consideradas, de formas explícitas, as incertezas do modelo de tráfego e as limitações sobre suas variáveis de estado e controle. Os limites sobre as variáveis de estado, controle e perturbações externas foram caracterizados por poliedros simétricos, convexos, fechados e limitados. O domínio dos parâmetros incertos foi caracterizado por um poliedro convexo, fechado e limitado, definido por seus pontos extremos.

Foram propostas duas formulações alternativas para o problema de regulação de tráfego: RRR e ROMC.

Estudos de simulação mostraram que as formulações RRR e ROMC podem oferecer resultados com desempenho geral estritamente superiores à formulação de variância mínima, RVM, proposta anteriormente em (Van Breusegem *et alii*, 1991), que não considera de forma explícita as incertezas do modelo de tráfego e as restrições sobre suas variáveis. Para políticas operacionais de alto desempenho, devido à variação de sua lei de controle, em função do estado atual do sistema, a formulação ROMC apresentou desempenho geral superior ao da formulação RRR, cuja lei de controle é invariante, devendo portanto satisfazer a todos os estados dentro da região admissível do problema de regulação. No entanto, para políticas operacionais econômicas, o desempenho geral de RRR foi superior ao de ROMC. Este aparente paradoxo é devido ao critério de desempenho formado por previsões de apenas um passo à frente, conferindo à lei de controle de ROMC um caráter imediatista, economizando controle no presente, sem levar em consideração o futuro. Finalmente, em condições equivalentes de requisitos de desempenho, por sua lei de controle pertencer a uma classe mais geral, a região admissível de ROMC contém a região de RRR. Em outros termos, ROMC pode fornecer solução em situações que RRR é infactível.

Pela facilidade de cálculo e estrutura de controle local, as leis de controle fornecidas pela formulações RVM, RRR e ROMC são igualmente aplicáveis às linhas de metrô da atualidade.

## 5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barmish, B.R. (1994) *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan Publishing Co., New York NY.
- Bergamaschi, F.A., B.E.A. Milani, T.C. Hsin (1982) Geração de Horários de Despacho de Trens em Linhas de Transporte Metroferroviário. *Anais do IV Congresso Brasileiro de Automática*, Campinas S.P., pp. 219-224 .
- Bitsoris, G. (1988a) Positively Invariant Polyhedral Sets of Discrete-Time Linear Systems. *International Journal of Control*, Vol. 47, No. 6, pp. 1713-1726.

- Bitsoris, G. (1988b) On the Linear Decentralized Constrained Regulation Problem of Discrete-Time Dynamical Systems. *Information and Decision Technologies*, Vol. 14, pp. 299-239.
- Campion, G., V. Van Breusegem, P. Pinson, G. Bastin (1985) Traffic Regulation of an Underground Railway Transportation System By State Feedback. *Optimal Control Application & Methods*, vol. 6, pp. 385-402.
- Carvalho, A.N., B.E.A. Milani (1993) Regulação Ótima de Tráfego em Linhas de Metrô com Restrições no Estado e Controle. *Anais do XXV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, SOBRAPO, Campinas SP, pp. 91-95.
- Carvalho, A.N., B.E.A. Milani (1994) Regulação Robusta de Linhas Metroviárias Sujeitas a Restrições no Estado e Controle. *Anais do 6<sup>o</sup> Congresso Latino Americano de Controle Automático ( e 10<sup>o</sup> CBA )*, SBA, Rio de Janeiro RJ, pp. 367-372.
- Chen, C.T. (1984) *Linear System Theory and Design*. Saunders HBJ, Orlando FL.
- Cury, J. E., F.A. Gomide, M.J. Mendes (1980) A methodology for generation of optimal schedules for an underground railway system. *IEEE Transactions on Automatic Control* vol. AC-25, no. 2, pp. 217-222.
- Garcia, C.E, D.M. Prett, M. Morari (1989) Model Predictive Control: Theory and Practice - a Survey. *Automatica*, vol. 25, no. 3, pp. 335-348.
- Gill, P.E., W. Murray, M.W. Wright (1981) *Practical Optimization*. Academic Press, GB.
- Golub, G.H., C.F. Van Loan (1996) *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore MD.
- Hennet, J.C. (1989) Une Extension du Lemme de Farkas et son Application au Problème de Regulation Linéaire sous Contraintes. *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.308, Série I, pp. 415-419.
- Milani, B.E.A., Castelan, E.B., Tarbouriech, S. (1996) Linear Regulator Design for Bounded Uncertain Discrete-Time Systems with Additive Disturbances. *Proceedings of the 1996 IFAC World Congress*, San Francisco CA, USA, Vol. G, pp. 321-326.
- Van Breusegem, V., G. Campion, G. Bastin (1991) Traffic Modeling and State Feedback Control for Metro Lines. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 36, no. 7, pp. 770-784.