SBA: Controle e Automação, Vol. 1, Nº 1, pp 72-81.

UM MODELO DE CONTROLE OTIMO DE ABASTECIMENTO EM PLANO DE ESTABILIZAÇAO ECONOMICA

Henrique Pacca L. Luna

Universidade Federal de Minas Gerais
DCC - ICEx - Cx. Postal 702 - Tel. (031)4434088
CEP 30161 - BELO HORIZONTE - MG - Brasil

Resumo

O artigo propõe uma forma integrada de análise e controle de fluxos de produtos em um dado setor econômico. O modelo contempla, de modo consistente, as atividades de produção, transporte, armazenagem, abastecimento e comércio exterior dos produtos em questão. A formulação como um problema de controle ótimo sugere sua aplicação ao nível do planejamento governamental, tipicamente no contexto de políticas de estabilização econômica, com ação estatal na infraestrutura de transporte e armazenagem, e com a fixação, durante todo o horizonte de planejamento, de preços mínimos para os produtores e de preços máximos para os consumidores. O modelo tem demanda dependente dos preços e reflete o comportamento descentralizado dos agentes de produção e de comercialização, com suas condições de otimalidade coincidindo com as condições de equilíbrio econômico competitivo, segundo o espírito neoclássico. A metodologia permite ainda o tratamento de indivisibilidade de recursos, mas explora a fundo as propriedades da convexidade, da linearidade, e da estrutura em redes. A grande dimensão do problema e sua estrutura altamente decomponível (por região, produto e período) sugerem o uso de métodos de cálculo hierárquico, cujas interpretações econômicas traduzem, em diversas instâncias, o papel central do estado na execução do plano e o seu reflexo no comportamento descentralizado dos demais agentes do setor econômico focalizado.

An Optimal Control Distribution Model for Economic Stabilization Plan

Abstract

The paper proposes an integrated scheme for governmental analysis and policy evaluation concerning the flow of products of an economic sector. The model considers, in a consistent form, the production, tranportation, storage, distribution and external commerce activities. The presentation as an optimal control problem suggests its application whithin the context of economic stabilization policies, with state action in the infrastructure of transportation and storage and in the establishment of price bounds (minimal for producers and maximal for consumers). The model has price dependent demands and reflects the decentralized behavior of the production and distribution agents, with the optimality conditions coincident with the competitive economic equilibrium conditions. The methodology permits yet the treatment of indivisibility of resources, but fully explores the properties of convexity, linearity and network structure. The large scale of the problem and its separability (by region, product and period) induces the use of decomposition methods, whose economic interpretation reflects the central role of the state and its result in the decentralized behavior of the sectorial economic agents.

1. INTRODUÇÃO

O uso de modelos matemáticos em análise e planejamento econômico se distingue em duas correntes cuja convergência é explorada neste artigo, sob a forma de um problema de controle ótimo discreto.

Por um lado, o estudo da alocação de recursos em sistemas descentralizados e desagregados tem sido o principal objeto da escola neoclássica da teoria econômica. Pode-se hoje dizer que nesse tema o modelo Walrasiano de equilíbrio competitivo é a formulação matemática mais completamente articulada, na forma como tem sido estudada com o uso intensivo da convexidade (p. ex., ver Nikaido, 1968). A existência de solução num modelo convexo geral está provada, sendo também conhecido um método numérico para encontrar um ponto de equilíbrio competitivo para a economia em geral, com base num procedimento para a aproximação a um ponto fixo num mapa contínuo (Scarf, 1973).

Por outro lado, o desenvolvimento da programação linear (Dantzig, 1963) tem suscitado o uso comum de pesquisa operacional em economia. Embora não se possa, com a programação linear, resolver o modelo geral de equilíbrio econômico, esta ferramenta se adapta muito bem a uma análise setorial. Nesse contexto, sua importância cresce na medida em que o setor em análise tem formação de preços muito dependente dos custos de tranportes. Pode-se então tirar proveito dos eficientes modelos lineares de redes, cuja capacidade computacional dá margem ao tratamento dos aspectos espaciais e temporais (p. ex., ver Wright, 1980). Além disso, as devidas extensões do problema linear de transporte dão margem também ao tratamento da indivisibilidade de recursos. Nesse sentido, dispõe-se de algorítmos ótimos e de heurísticas muito eficientes para os problemas de localização de facilidades (Geoffrion & Graves, 1974; Mateus, 1986; Monterosso e outros, 1985; Sá, 1969), contando-se também com a análise econômica complementar (Gale, 1960; Koopmans & Beckmann, 1957; Luna, 1979b, 1984b).

Os modelos de economias capitalistas envolvem de fato a interação entre muitos problemas de maximização, separadamente perseguidos por diferentes agentes econômicos, em vez de serem simplesmente um problema de maximização de um indicador da preferência social. Além disso, tem-se que respeitar o equilíbrio entre a oferta e a demanda aos níveis dos preços estabelecidos endogenamente pelo modelo. A possibilidade de se usar formulações de programação matemática que incorporem essas características em cálculo de equilíbrio competitivo parcial foi introduzida por Samuelson (1952), que propôs um critério artificial conhecido por "custo - benefício social líquido". A idéia chave está em encontrar um programa matemático cujas condições de otimalidade coincidam exatamente com as condições de equilíbrio competitivo que se quer determinar. Esta idéia foi explorada originalmente no tratamento do problema de pesquisa de preços locais e de fluxos envolvidos entre mercados separados espacialmente, com custos de transporte do produto entre os locais e com funções de oferta e demanda para cada mercado. Sabe-se desde então que este problema de mercados interconectados contém dentro de si o problema clássico de transporte a mínimo custo, para o qual se tem eficientes algoritmos.

Uma revisão extensiva do desenvolvimento dessa idéia está no livro de Takayama & Judge (1971), que sugere o cálculo da solução competitiva (ou mesmo monopolista) por programação quadrática, através do uso de funções lineares para representar a dependência da oferta e da demanda em relação aos preços. Juntamente com modelos lineares de análise de atividades de produção, que servem para gerar implicitamente funções de oferta, a abordagem de otimização tem sido usada em modelos de equilíbrio econômico setorial com diversos produtos. Alguns desses modelos fazem análise de setor agrícola, constituindo versões não-espaciais tais como os casos do México e da França (Duloy & Norton, 1973; Vercueil & Farhi, 1969), ou versões espaciais como os dos E. U. A. (Hall e outros, 1968, 1975); outras aplicações se destinam à análise de políticas no setor de energia (Glassey, 1978; Hogan, 1975; Shapiro, 1975).

Afora o uso do método simplex para programação quadrática, o cálculo desses problemas de equilíbrio de preços também tem sido feito com software convencional de programação linear, seja por meio de técnicas explícitas de linearização por grelha, ou usando procedimentos iterativos de adaptação da demanda. O uso de métodos de decomposição (ver Geoffrion, 1970), em particular seguindo o espírito de interpretações econômicas cabíveis (Malinvaud, 1967; Luna, 1984a), foi a tônica de trabalhos de Luna (1978, 1979a) e de Geromel & Luna (1981).

O objetivo deste artigo é discutir uma metodologia que englobe a análise de equilíbrio de preços espaciais com a consideração da indivisibilidade de recursos necessários ao setor econômico em estudo. Isto é feito através da formulação de um problema de controle ótimo discreto, introduzido na proxima seção, que incorpora, de modo consistente com as leis do mercado, as atividades de produção, transporte, armazenagem, abastecimento e comércio exterior dos produtos do setor. Em diversas instâncias o modelo é uma generalização de trabalhos citados acima, numa linha que tenta acoplar as questões de localização e de demandas sensíveis aos preços (Erlenkotter, 1977; Wagner & Falkson, 1975). Depois de uma seção sobre as condições de otimalidade discutimos técnicas de resolução baseadas na generalização do método de decomposição de Benders (Geoffrion, 1972), de forma paralela à proposta por França & Luna (1982), para o modelo de localização com demandas estocásticas. Veremos então como que o próprio método de solução ajuda a analisar o papel central do estado na execução do plano de estabilização e o seu reflexo no comportamento descentralizado dos demais agentes do setor econômico em estudo.

2. PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

2.1 Índices e Constantes

- t índice para o tempo;
- r índice para região, também usado sob ^ para diferenciar a região;
- n índice para produto final (bem desejado pelos consumidores);
- m índice para matéria prima;
- j índice de atividade de produção;
- b_t^r vetor de níveis de disponibilidade de recursos imóveis na região r no período t (terra é uma componente típica);
- p_t^o vetor de preços no mercado internacional (a componente n se refere à classe de bens n);

d_t vetor de custos de transporte para os diversos arcos no período t, eventualmente incluindo taxas e subsídios, e com cada componenente associada ao comércio exterior tendo sido somada ou subtraída do preço internacional, conforme o fluxo do produto correspondente seja de importação ou exportação;

T correspondente matriz de incidência dos fluxos interregionais e do comércio exterior dos produtos, supostamente invariante no tempo;

k_t^r vetor em que a n-ésima componente representa a capacidade padrão de cada unidade de armazenamento do bem n a ser instalada em r, t (também escrito sob a forma de matriz diagonal, com K maiúsculo);

l_t^r correspondente vetor onde cada componente representa o custo padrão da unidade de armazenamento em questão, no período t;

2.2 Variáveis

2.2.1 Variáveis de Estado

e_t^r vetor de estoques de bens na região r no início do período t;

z_t^r vetor de capacidades de armazenamento dos diversos produtos na região r no início de t;

2.2.2 Variáveis de Controle

q_t^r vetor de quantidades de bens consumidos na região r, em t;

x_t^r vetor em que cada elemento x_t^{rj} indica o nível de operação da atividade de produção j na região r no período t;

f_t vetor de níveis de atividade de transporte;

p_t^r vetor de preços dos bens finais dos consumidores de r em t;

u_t^r vetor dos preços imputados para as matérias primas (recursos) na região r no período t;

y_t^r vetor em que cada componente representa o número de unidades armazenadoras do bem n a serem instaladas em r no período t.

2.3 Funções

2.3.1 Funções de Demanda

Para cada região é supostamente conhecida, para cada período do horizonte de planejamento, uma função que expressa a interdependência entre as demandas e os preços dos bens finais. Esta função deve ter inversa, que seja por sua vez integrável, de forma que seja côncava a função resultante da integral da inversa. Assim sendo, por razões de ordem prática nos interessa tratar diretamente a inversa da função de demanda, expressa por

$$p_t^r = \$_t^r (q_t^r) \qquad (1)$$

para toda região r e todo período t.

2.3.2 Funções de Produção

$c_t^r(x_t^r)$ função convexa que representa o custo total das atividades de produção na região r no período t;

$g_t^r(x_t^r)$ função vetorial convexa onde a n-ésima componente representa a quantidade produzida do bem final n, na região r no período t;

$h_t^r(x_t^r)$ função vetorial convexa onde a m-ésima componente representa a quantidade consumida do recurso m na região r, no período t.

2.4 Modelo

As variàveis e funções definidas para todas as regiões podem ser compostas em vetores globais relativos a toda a economia do país, de forma a se poder escrever, de maneira condensada, o seguinte problema de controle ôtimo discreto no tempo:

$$\text{Min} \sum_t [- \int_0^{q_t} \$_t(q_t) \, . \, dq_t + \qquad (2)$$

$$+ c_t(x_t) + d_t f_t + l_t y_t]$$

sujeito às equações de estado

$$e_{t+1} = e_t + g_t(x_t) - T f_t - q_t \qquad (3)$$

$$z_{t+1} = z_t + K_t y_t \qquad (4)$$

e sujeito às restrições no estado

$$0 \leq e_t \leq z_t \qquad (5)$$

e no controle

$$x_t \geq 0 \, , \quad h_t(x_t) \leq b_t \qquad (6)$$

$$f_t \geq 0 \qquad (7)$$

$$y_t \geq 0 \text{ , inteiro} \qquad (8)$$

para todo período $t = 1, 2, \ldots, \tau$, supondo-se dadas as condições iniciais relativas a $t = 0$.

O critèrio (2) pode ser interpretado pela maximização do benefício líquido do setor, entendido como sendo a diferença entre o benefício proporcionado aos consumidores e o custo total das atividades de produção e distribuição dos bens. Para cada período t, $c_t(x_t)$ representa o custo total de produção (soma para todas as regiões); este é por sua vez somado com o custo total de distribuição $d'_t f_t$ (que inclui o custo de transporte e o dèficit comercial com o exterior), e com o custo total dos investimentos em infraestrutura para armazenagem. A minimização desses custos para todo o horizonte de planejamento, com o devido desconto da integral da inversa da curva de demanda (medida de benefício), tal como proposto em (2), envolve uma sèrie de argumentos metodològicos que, juntamente com uma formulação estàtica do modelo, jà foram discutidos e referenciados em Luna (1978).

As variàveis de estado envolvem essencialmente atividades de armazenamento, sendo naturalmente responsàveis pelo acoplamento no tempo. E' interessante observar que essas variàveis, tal como foram definidas, não aparecem explicitamente no critèrio, podendo inclusive ser eliminadas do modelo, por substituição. De fato, com (4) pode-se obter recursivamente z_t a partir dos y_t, e de (3) tem-se e_t em função dos x_t, f_t e q_t; a substituição dessas expressões em (5) nos conduz a um programa matemàtico sem restrições de igualdade, onde não aparecem as variàveis de estado aqui definidas.

Veremos a seguir que os preços dos insumos e dos produtos u_t e p_t são, a rigor, variàveis duais desse programa matemàtico. Tomamos a liberdade de chamà-las também de variàveis de controle do sistema (notar que os p_t estão mais diretamente relacionados a vetores adjuntos) face à enorme importância dos preços nos mecanismos de controle automàtico descentralizado, tema da prôxima seção, onde assumimos trabalhar com o programa matemàtico sem restrições de igualdade, com as variàveis de estado não aparecendo explicitamente.

3. CONDIÇÕES DE EQUILIBRIO ECONÔMICO

A fim de simplificar a análise, suponhamos que todos os investimentos em armazenagem, onde existe a difícil questão da indivisibilidade das unidades a instalar, sejam feitos pelo governo. Nesse contexto fica mais fácil explorar a convexidade embutida no modelo, já que a hipótese de convexidade é fundamental no devido uso da teoria econômica.

Com esse espírito decorre naturalmente a idéia de se fixar as variáveis y_t, em particular a níveis de solução ótima do problema projetado no espaço destas variáveis. Esta seção discute então os mecanismos de mercado que permitem ao sistema manter-se em torno da solução ótima do sub-problema associado às variáveis x_t, f_t e q_t. A próxima seção mostra como que a solução ótima global pode ser calculada de forma hierárquica, não cabendo neste artigo a análise de possíveis situações em que se poderia relaxar a hipótese de completa ação do estado nos investimentos em armazenagem.

Assumindo-se a diferenciabilidade das funções $c_t(x_t)$, $g_t(x_t)$ e $h_t(x_t)$ tem-se que as condições de Kuhn-Tucker são necessárias e suficientes para a otimalidade do sub-problema convexo. As relações entre os gradientes da função objetivo e das restrições se escrevem:

$$p^r_t = \$^r_t(q^r_t) \quad \text{para todo } r,\ t \tag{1}$$

$$\nabla c^r_t(x^r_t) + u^{r'}_t \nabla h^r_t(x^r_t) \geq p^{r'}_t \nabla g^r_t(x^r_t) \quad \text{para todo } r,\ t \tag{9}$$

$$p^{\hat{r}}_t - p^r_t \leq d_t \quad \text{para } (r,\hat{r})_t \tag{10}$$

$$p^r_t \geq p^o_t - \partial^{ro}_t \quad \text{para } (r,o)_t \tag{11}$$

$$p^r_t \leq p^o_t + \partial^{or}_t \quad \text{para } (o,r)_t \tag{12}$$

onde, em (9), o sinal ∇ precedido das funções de produção indicam seus gradientes, tomados como vetores linha; e em (10), (11) e (12) $(r,\hat{r})_t$, $(r,o)_t$ e $(o,r)_t$ representam, respectivamente, conjuntos de arcos interregionais, de exportação e de importação, relativos aos diversos bens; enquanto que ∂^{ro}_t e ∂^{or}_t indicam os correspondentes custos dos fretes de exportação e de importação, no período t. As correpondentes condições de complementaridade de folga são:

$$[\nabla c^r_t(x^r_t) + u^{r'}_t \nabla h^r_t(x^r_t) - p^{r'}_t \nabla g^r_t(x^r_t)]\, x^r_t = 0 \quad r,\ t \tag{13}$$

$$[d^{r\hat{r}}_t + p^r_t - p^{\hat{r}}_t]' f^{r\hat{r}}_t = 0 \tag{14}$$

$$[\partial^{ro}_t - p^o_t + p^r_t]' f^{ro}_t = 0 \tag{15}$$

$$[\partial^{or}_t + p^o_t - p^r_t]' f^{or}_t = 0 \tag{16}$$

Condições de complementaridade de folga associadas aos requisitos de demanda e às limitações dos armazens regionais (17)

$$u^{r'}_t [b^r_t - h^r_t(x^r_t)] = 0 \tag{18}$$

onde (14), (15) e (16) ocorrem, respectivamente, para os conjuntos de arcos $(r,\hat{r})_t$, $(r,o)_t$ e $(o,r)_t$, associados aos fluxos interregionais, de exportação e de importação a cada período; e onde (17) e (18) ocorrem para cada região r e período t.

As condições de otimalidade delineadas acima, que incluem naturalmente as condições de viabilidade do primal para y inteiro dado [(6) e (7) e as inequações de balanço de produtos, resultantes da substituição de (3) e (4) em (5)], correspondem a um equilíbrio competitivo. As inequações de balanço de produtos não permitem excesso de demanda (ou de armazenagem) em qualquer região, e (17) só permite preço (ou aluguel) positivo se não houver excesso de oferta (ou folga na armazenagem). As restrições (6) mantêm as atividades regionais dentro dos próprios conjuntos de possibilidade de produção, enquanto que (18) só permite preço positivo para recurso escasso.

As condições (9) atestam que, em equilíbrio, nenhuma atividade de produção pode dar lucro marginal, senão há movimento de capital para a atividade; de fato, notamos que cada elemento dessa desigualdade vetorial afirma que o custo marginal para operar uma atividade [o lado esquerdo de (9), representando a soma do custo marginal de entradas irrestritas com o valor marginal dos recursos restritos] não é menor do que o benefício marginal resultante da operação da atividade [o lado direito de (9), que é o valor marginal dos produtos]. As equações de complementaridade (13) asseguram, por sua vez, que somente serão operadas as atividades para as quais o custo marginal é igual ao benefício marginal.

As restrições (10), (11) e (12), juntamente com as correspondentes equações de complementaridade de folga (14), (15) e (16), estipulam as condições para equilíbrio no comportamento competitivo dos agentes de distribuição. Não existe nenhum arco onde uma atividade de transporte pode dar lucro, e só é possível fluxo positivo através de arco cuja diferença de preços entre os nós de destino e de origem é exatamente igual ao custo de transporte.

4. ESQUEMAS DE CALCULO HIERARQUICO

O modelo aqui proposto é de muito grande dimensão, mas sua estrutura é bastante apropriada para o uso adequado de métodos de otimização com decomposição. Pode-se ver que, fixados os investimentos em armazenagem y_t e impostas quotas regionais de excesso de demanda, o problema fica dividido em duas partes altamente separáveis. Por um lado, cada subsistema econômico regional é isolado das demais regiões, tendo, por sua vez, separabilidade no tempo e entre os setores de produção e de consumo. Por outro lado, uma série de problemas clássicos de transporte, um para cada classe de bens, por sua vez esparso face à malha viária e ao aspecto temporal, corresponde a eficientes acoplamentos dos sub-sistemas econômicos regionais.

A separabilidade acima cogitada nos leva a métodos de coordenação por quotas. A fixação pura e simples dos y_t pode, por sua vez, engendrar o uso de métodos de coordenação pelos preços, na resolução do problema convexo de grande dimensão embutido no modelo. No caso estático, ambas as abordagens para a resolução do problema convexo de equilíbrio econômico já foram detalhadas por Luna (1978, 1979a), sendo direta sua generalização para o caso dinâmico.

A introdução das variáveis inteiras y_t neste artigo teve um propósito duplo. Primeiro, de lembrar que a generalização do método de decomposição de Benders (Geoffrion, 1972) se aplica ao difícil problema de localização de recursos indivisíveis em setores econômicos espacialmente distribuídos. Segundo, de enfatizar a importância da ação do estado no cálculo e implementação da solução ótima, inclusive como forma de encaminhar o bom andamento do comportamento descentralizado dos diversos agentes econômicos.

A possibilidade de sucesso no uso do método de decomposição de Benders foi consagrada por Geoffrion & Graves (1974), ao resolver grandes problemas de localização de centros de distribuição de diversos bens. A interpretação econômica correspondente também já foi discutida com certo detalhe (Luna, 1979b), cabendo aqui apenas delinear os aspectos inerentes à generalização que ora tratamos.

O método, de projeção e linearização externa, simula uma sequência racional de estudos de casos. A cada ciclo de comunicação a central de planejamento propõe uma solução para os investimentos em infraestrutura, e recebe de volta, de um organismo de estudos do mercado, os correspondentes preços espaciais que manteriam o setor em equilíbrio econômico. A informação de preços acumulada pela central permite-lhe refinar subestimativas de custos no setor, que avaliadas ao lado dos conhecidos custos estruturais orientam novas propostas, até que se identifique uma solução ótima.

5. CONCLUSÃO

O ideal de inflação zero em planos de estabilização econômica (Arida e outros, 1986; Lopes, 1986) casa muito bem com a possibilidade de uso de metodologias de análise de equilíbrio econômico setorial. A perspectiva de se ter, com o choque heterodoxo, maior estabilidade nos salários, preços dos insumos e taxas de câmbio dão muito maior poder de previsão aos modelos matemáticos, libertando-os de difíceis medidas de custos financeiros impostos pela inflação. A própria política de preços mínimos para os produtores e de tabelamento de preços máximos para os consumidores ajuda a enquadrar as variáveis dentro de limites bem ajustados, podendo-se melhor avaliar a rentabilidade e o risco dos produtos e o poder de compra dos consumidores.

Por seu turno, acreditamos que o próprio sucesso de um plano de estabilização econômica depende, além do fundamental suporte político, de um ferramental matemático-computacional do tipo discutido aqui. A necessidade de se estabelecer, a priori, preços, taxas e subsídios condizentes com um possível equilíbrio entre a oferta e a demanda, a importância em se tabelar valores espaciais consistentes com os custos de transportes, e a necessidade de presteza na ação reguladora do estado (p. ex., na importação) são algumas razões que justificam o uso desses modelos de controle ótimo de abastecimento.

A metodologia possui naturalmente suas limitações, e também interessantes temas de pesquisa. Entre as questões não referenciadas anteriormente, lembramos o difícil problema de agregação de dados (GEIPOT, 1982; Luna & Mateus, 1985).

REFERÊNCIAS

Arida, P. & Lara-Resende, A. & Rozenwurcel, G. & Bruno, M. (1986). **Inflação Zero - Brasil, Argentina e Israel**, Paz e Terra, Rio de Janeiro.

Dantzig, G. B. (1963). **Linear Programming and Extensions**, Princeton University Press, Princeton.

Duloy, J. H. & Norton, R. D. (1973). "CHAC, A Programming Model of Mexican Agriculture". In: **Multi-level Planning: Case Studies in Mexico**, ed. L. Goreux & A. Manne, North-Holland, Amsterdam. p. 291-337.

Erlenkotter, D. (1977). "Facility Location with Price-Sensitive Demands: Private, Public and Quasi-Public". **Man. Science**, Vol. 24, n. 4: 378-386.

França, P. M. & Luna, H. P. L. (1982). "Solving Stochastic Transportation-Location Problems by Generalized Benders Decomposition". **Transportation Science**, Vol. 16, n. 2: 113-126.

Gale, D. (1960). **The Theory of Linear Economic Models**, McGraw-Hill, New York.

GEIPOT (1982). **Transporte e Armazenagem**, Vols. 1 a 4, Empresa Brasileira de Planejamento de Transportes, Brasília.

Geoffrion, A. M. (1970). "Elements of Large Scale Mathematical Programming". **Man. Science**, Vol. 16, n. 11: 652-691.

Geoffrion, A. M. (1972). "Generalized Benders Decomposition". **Journal Opt. Th. Appl.**, Vol. 10: 237-259.

Geoffrion, A. M. & Graves, G. W. (1974) "Multicommodity Distribution System Design by Benders Decomposition", **Man. Science**, Vol. 20, n. 5: 822-844.

Geromel, J. C. & Luna, H. P. L. (1981). "Projection and Duality Techniques in Economic Equilibrium Models". **IEEE Trans. Syst., Man and Cybern.**, Vol. SMC-11, n. 5: 329-338.

Glassey, C. R. (1978). "Price Sensitive Consumer Demands in Energy Modeling - A Quadratic Programming Approach to the Analysis of Some Federal Energy Agency Policies". **Man. Science**, Vol. 24, n. 9: 877-886.

Hall, H. H. & Heady, E. O. & Plessner Y. (1968) "Quadratic Programming Solution of Competitive Equilibrium for U. S. Agriculture". **Am. J. Agr. Econ.**, Vol. 15: 536-555.

Hall, H. H. & Heady, E. O., & Stoecker, A. & Sposito, V. S. (1975). "Spatial Equilibrium in U. S. Agriculture: a Quadratic Programming Analysis". **SIAM Review**, Vol. 17: 323-338.

Hogan, W. W. (1975). "Energy Policy Models for Project Independence". **Comp. Ops. Res.**, Vol. 2: 251-271.

Koopmans, T. C. & Beckmann, M. J. (1957). "Assignment Problems and the Location of Economic Activities". **Econométrica**, Vol 25: 53-76.

Lopes, F. (1986). **O Choque Heterodoxo**, Campus, Rio de Janeiro.

Luna, H. P. L. (1978). "Two-level National-regional Planning and Mathematical Programming Decomposition Applied to Spatial Price Equilibrium Models". **Socio-Econ. Plan. Sciences**, vol. 12, n. 5: 251-266.

Luna, H. P. L. (1979a). "Note on Price Unicity in Economic Equilibrium Models", **Socio-Econ. Plan. Sciences**, Vol. 13, n. 4: 223-225.

Luna, H. P. L. (1979b). "Economical Interpretation of Benders Decomposition Technique Applied to Location Problems". In: **Models and Decision Making in National Economies**, eds. J. M. L. Janssen, L. F. Pau, A. Strazak, North-Holland, Amsterdam, p.367-372.

Luna, H. P. L. (1984a). "A Survey on Informational Decentralization and Mathematical Programming Decomposition", In: **Mathematical Programming**, eds. R. W. Cottle, M. L. Kelmanson & B. Korte, Elsevier/ North-Holland, Amsterdam, p. 249-270.

Luna, H. P. L. (1984b). "Um Sistema de Preços para o Modelo de Localização de Fábricas". In: **Anais do II Congresso Latino-Americano de Pesquisa Operacional**, Vol. H: 7-14, Buenos Aires.

Luna, H. P. L. & Mateus, G. R. (1985). "Base para Estudos de Otimização de Fluxos em Corredores de Exportação e Abastecimento". Relatório Técnico 009/85, Dep. Ciécia da Computação, Univ. Fed. Minas Gerais, Belo Horizonte.

Malinvaud, E. (1967). "Decentralized Procedures for Planning", In: **Activity Analysis in The Theory of Economic Growth**, eds. E. Malinvaud & M. O. L. Bacharach, Macmillan, London, p. 170-208.

Mateus, G. R. (1986). **Algoritmo Exato e Heurísticas para o Problema de Localização**, Tese de Doutoramento em Eng. de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

Monterosso, C. D. B. & Wright, C. L. & Lacerda, M. C. S. & Ofugi, N. (1985). "Grain Storage in Developing Areas: Location and Size of Facilities", **Am. J. Agr. Econ.**, Vol. 67, n. 1: 101-111.

Nikaido, H. (1968). **Convex Sructures and Economic Analysis**, Academic Press, London.

Samuelson, P. A. (1952). "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming". **Am. Econ. Rev.**, Vol 42: 283-303.

Sà, G. (1969). "Branch and Bound and Approximate Solutions to the Capacited Plant Location Problem". **Oper. Res.**, Vol. 17: 1005-1016.

Scarf, H. (1973). **The Computation of Economic Equilibria**, Yale University Press, New Haven.

Shapiro, J. F. (1975). "OR Models for Energy Planning". **Comp. Ops. Res.**, Vol. 2: 145-152.

Takayama. T. & Judge, G. G. (1971). **Spatial and Temporal Price and Allocation Models**, North-Holland, Amsterdam.

Vercueil, J. & Farhi, L. (1969). **Recherche pour une Planification Coherente: Le Modèle de Prévision du Ministère de l'Agriculture**, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

Wagner, J. L. & Falkson, L. M. (1975). "The Optimal Nodal Location of Public Facilities with Price- Sensitive Demands". **Geographical Analysis**, Vol. 7, n. 1: 69-83.

Wright, C. L. (1980). "Análise Econômica de Transporte e Armazenagem de Grãos: Estudo do Corredor de Exportação de Paranaguá", GEIPOT, Empresa Brasileira de Planejamento em Transportes, Ministério dos Transportes, Brasília.