

## SÍNTESE DE REDES LADDER DIGITAIS VIA REALIZAÇÃO DE ESTADO

José Ivonildo do Rêgo  
Jorge Dantas de Melo

Departamento de Engenharia Elétrica  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte  
Campus Universitário - 59.072 - Natal - RN

### Resumo

Neste artigo utilizam-se as realizações de estado tridiagonal e de Schwarz de uma função de transferência na síntese de redes ladder digitais. Isto possibilita ter-se um procedimento sistemático de síntese que é aplicado na obtenção de três tipos de redes já apresentados na literatura. Nesta aplicação são ressaltadas as facilidades de determinação dos parâmetros das redes.

Além da sistematização dos cálculos dos parâmetros, o uso da realização de estado torna disponíveis todos os recursos que a técnica de espaço de estado oferece para a análise e síntese no domínio do tempo de sistemas lineares.

### Synthesis of Digital Ladder Networks Via State-Space Realization

#### Abstract

This paper uses the Schwarz and tridiagonal state realizations of a transfer function for the synthesis of digital ladder networks. This makes possible a systematic procedure of synthesis, which is applied to obtain three types of networks already presented in the literature. This application makes dear the easy way in which the network parameters are obtained.

Besides this systematic way of calculations the network parameters the state realizations, make possible the use of all the state space tools for the analysis and synthesis of time domain linear systems.

### 1. INTRODUÇÃO

Muitas têm sido as técnicas de síntese de filtros digitais apresentadas na literatura. Dentre estas, pode-se citar as realizações direta, cascata e paralela (Antonίου, 1979), as realizações ladder (Mitra e outros, 1972, 1973a e b) as realizações obtidas através de redes clássicas (Fettweis, 1971) e várias outras. Todas têm por objetivo a realização de uma função de transferência digital arbitrária.

É bem estabelecido que diferentes realizações têm diferentes características de desempenho (Crochiere e Oppenheim, 1975), no que se refere à velocidade, custo, comprimento de palavra, etc. que dependem fortemente da estrutura usada. É recomendável portanto desenvolver-se diferentes estruturas e então selecionar aquela de melhor desempenho. O caminho utilizado para a determinação dos parâmetros da rede, faz uso de critérios algébricos sistemáticos ou não, o que pode muitas vezes tornar o procedimento de síntese bastante tedioso.

Neste artigo são propostos dois procedi-

mentos para a realização de uma função de transferência digital através de redes do tipo ladder. Tais procedimentos são baseados em realizações de estado de uso já bem conhecido nas teorias de controle e circuitos como é o caso da realização de estado tridiagonal (Kaszkurewicz e Hsu, 1979; Rêgo, Hsu e Kaszkurewicz, 1982; Rêgo e Kaszkurewicz, 1984) e em uma nova realização de estado, chamada realização de estado na forma de Schwarz, onde a matriz de estado está na forma de Schwarz (Schwarz, 1956).

Além da sistematização dos cálculos, o que possibilita a implementação dos procedimentos através de um programa computacional, são analisadas ainda as condições de realizabilidade de uma dada função de transferência através de tais procedimentos. Também são analisadas as facilidades introduzidas na análise das redes obtidas, uma vez que seus parâmetros são realizados diretamente das matrizes da representação por variáveis de estado, tornando possível o uso de todos os recursos que a técnica de espaço de estado oferece para a análise no domínio do tempo de sistemas lineares.

Este artigo está apresentado da seguinte forma: na Seção 2 é apresentada de forma resumida, a realização de estado tridiagonal; na Seção 3 uma nova realização de estado, baseada na forma de Schwarz associada a um dado polinômio  $D(z)$  é introduzida. Na seção 4, um procedimento para síntese de redes ladder digitais baseado na realização de estado na forma de Schwarz é apresentado. Facilidades introduzidas na análise da estrutura proposta devido à sua representação por variáveis de estado são explicitadas na Seção 5. Na Seção 6 é apresentado um outro procedimento, baseado na realização de estado tridiagonal, para síntese de outras redes ladder digitais. As conclusões são apresentadas na Seção 7.

## 2. REALIZAÇÃO DE ESTADO TRIDIAGONAL

A realização de estado tridiagonal, apresentada inicialmente por Takahashi e outros (1978), é assim denominada por sua matriz de estado pertencer à classe de matrizes tridiagonais. Uma matriz real  $n \times n$ ,  $A = (a_{ij})$  é dita ser tridiagonal se  $a_{ij} = 0$ , sempre que o módulo de  $(i-j)$  é maior que um. A seguir será feita uma breve descrição da realização e do seu processo de obtenção.

Seja

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K \frac{z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \dots + \beta_0}{z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_0} \quad (2.1)$$

onde  $N(z)$  e  $D(z)$  são polinômios reais quaisquer, não há cancelamento em  $G(z)$  e  $\rho(D) = -\rho(N) = 1$ , onde  $\rho(A)$  é a ordem do polinômio  $A(z)$ . A realização

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k); \quad x(k) \in R^n; \quad u(k) \in R \quad (2.2.1)$$

$$y(k) = cx(k); \quad y(k) \in R \quad (2.2.2)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & -a_{22} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & -a_{n,n} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.3.1)$$

$$b = \begin{bmatrix} K \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.3.2)$$

é a realização de estado tridiagonal associada a  $G(z)$ . A matriz  $A$ , tal que  $\det(zI - A) = D(z)$ , é obtida da seguinte fórmula de recorrência (Kaszkurewicz e Hsu, 1979).

$$\alpha_i^k = a_{pp} \alpha_i^{k-1} + \alpha_{i-1}^{k-1} - a_{p+1,p} \alpha_i^{k-2} \quad (2.4.1)$$

$$k = n, n-1, \dots, 1; \quad i = k-1, k-2, \dots, 0; \quad p = n-k+1 \quad (2.4.2)$$

onde

$$\alpha_i^n = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.5)$$

$$\alpha_i^{n-1} = \beta_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-2 \quad (2.6)$$

$$a_{n+1,n} = 0, \alpha_s^r = 1 (r = s \geq 0) \quad (2.7)$$

$$\alpha_s^r = 0 (r < s \text{ ou } r < 0 \text{ ou } s < 0) \quad (2.8)$$

Conforme já citado anteriormente, a realização de estado tridiagonal possui largo uso, seja na síntese de redes passivas (Rego, Hsu e Kaszkurewicz, 1982) ou no estudo da estabilidade de sistemas não lineares (Kaszkurewicz e Hsu, 1979). A classe de matrizes tridiagonais também foi usada em vários outros trabalhos na teoria de circuitos, dentre os quais pode-se citar Marshall (1979), Takahashi e outros (1978).

## 3. REALIZAÇÃO DE ESTADO NA FORMA DE SCHWARZ

Nesta seção uma nova realização de estado, chamada realização de estado na forma de Schwarz, de uma função de transferência arbitrária é apresentada. Isto possibilitará um novo uso da forma de Schwarz que não o estudo de estabilidade dinâmica (Schwarz, 1956; Parks, 1962), a análise da estabilidade de sistemas discretos no tempo (Datta, 1982), construção de funções de Lyapunov (Kalman e Bertram, 1960) e muitos outros.

Seja

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\beta_n z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0} \quad (3.1)$$

onde  $N(z)$  e  $D(z)$  são polinômios reais e  $D(z)$  é realizável na forma de Schwarz. A realização  $(A, b, c, d)$  da forma

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \quad (3.2.1)$$

$$y(k) = cx(k) + du(k) \quad (3.2.2)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -a_{11} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.1)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & c_n \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

é a realização de estado na forma de Schwarz associada a  $G(z)$ . Sem perda de generalidade, pode-se escrever a função de transferência  $G(z)$  como:

$$G(z) = d + \frac{\beta_{n-1} z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{z^n + \tilde{\alpha}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \tilde{\alpha}_1 z + \tilde{\alpha}_0} = d + \frac{\tilde{N}(z)}{\tilde{D}(z)} \quad (3.4)$$

onde

$$d = \beta_n / \alpha_n; \quad \tilde{\alpha}_i = \alpha_i / \alpha_n; \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i - d \alpha_i; \quad i = n-1, \dots, 0 \quad (3.5)$$

Observe que o escalar  $d$  dado em (3.5) é o mesmo da realização  $(A, b, c, d)$  dada em (3.2). Rego e Kaszkurewicz (1984) estabeleceram que

a matriz A na forma de Schwarz associada ao polinômio  $\bar{D}(z)$  de (3.4) onde  $\bar{D}(z) = \det(zI - A)$  é dada pela realização de estado tridiagonal (2.2) da função de transferência

$$\bar{G}(z) = \frac{\bar{N}(z)}{\bar{D}(z)} \quad (3.6)$$

onde

$$\bar{\alpha}_{n-1} \bar{N}(z) = \begin{cases} \text{parte par de } \bar{D}(z) & \text{para } n \text{ ímpar} \\ \text{parte ímpar de } \bar{D}(z) & \text{para } n \text{ par} \end{cases} \quad (3.7)$$

ou seja, a matriz A é obtida inicialmente montando-se a função de transferência  $\bar{G}(z)$  dada em (3.6) e posteriormente aplicando-se o algoritmo da realização de estado tridiagonal definido pelas equações (2.4) a (2.8). Vale salientar que esta não é a única maneira de se obter a matriz A. Uma outra, dentre as várias existentes, pode-se citar o trabalho de Parks (1962) onde A é obtida a partir dos determinantes de Hurwitz.

Para obtenção da realização de estado (A,b,c,d) resta portanto a determinação da matriz linha c dada em (3.3). Sabe-se que:

$$\bar{G}(z) = \frac{\bar{N}(z)}{\bar{D}(z)} = c[zI - A]^{-1} b = c \frac{\text{Adj}[zI - A]}{|zI - A|} b \quad (3.8)$$

logo

$$\bar{N}(z) = c \text{Adj}[zI - A] b \quad (3.9)$$

Utilizando o algoritmo de Leverrier (Morgan, 1966), sabe-se que

$$\begin{aligned} \text{Adj}[zI - A] &= [R_0 z^{n-1} + R_1 z^{n-2} + \dots + R_{n-2} z + R_{n-1}] \\ R_0 &= I \\ R_1 &= AR_0 + \alpha_{n-1} I \\ R_2 &= AR_1 + \alpha_{n-2} I \\ &\vdots \\ R_{n-1} &= AR_{n-2} + \alpha_1 I \\ 0 &= AR_{n-1} + \alpha_0 I \end{aligned} \quad (3.10)$$

Consequentemente, pode-se afirmar usando (3.10), que:

$$\begin{aligned} \text{Adj}[zI - A] b &= R_0 b z^{n-1} + R_1 b z^{n-2} + \dots + R_{n-2} b z + \\ &+ R_{n-1} b \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde,

$$\begin{aligned} R_0 b &= b \\ R_1 b &= Ab + \alpha_{n-1} b \\ &\vdots \\ R_{n-1} b &= A^{n-1} b + \alpha_{n-1} A^{n-2} b + \dots + \alpha_2 Ab + \alpha_1 b \\ 0 &= A[A^{n-1} b + \alpha_{n-1} A^{n-2} b + \dots + \alpha_2 Ab + \alpha_1 b] + \alpha_0 b \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.13) em (3.9) e utilizando (3.4), tem-se:

$$\begin{aligned} (\bar{\beta}_{n-1} z^{n-1} + \dots + \bar{\beta}_0) &= [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] [R_0 b z^{n-1} + \dots + \\ &+ R_{n-1} b] \end{aligned} \quad (3.14)$$

ou equivalente,

$$\begin{bmatrix} (R_0 b)^t \\ (R_1 b)^t \\ \vdots \\ (R_{n-1} b)^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_{n-1} \\ \bar{\beta}_{n-2} \\ \vdots \\ \bar{\beta}_0 \end{bmatrix} \triangleq Tc = \bar{\beta} \quad (3.15)$$

onde t indica a transposta de uma matriz.

A equação (3.15) tem solução única se  $\rho(T) = n$ , ou seja, T é não singular. Neste caso,  $\rho(T)$  significa o posto da matriz T.

Observe-se que as linhas de T são obtidas a partir de combinações lineares das colunas da matriz de controlabilidade  $U = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1} b]$  do sistema dado em (3.2). Tal afirmativa é comprovada observando-se a equação (3.13). Logo, utilizando-se as propriedades dos determinantes, pode-se afirmar que se  $\rho(U) = n$ , então  $\rho(T) = n$ . Consequentemente, a equação (3.15) tem solução única se e somente se, o par (A,B) é controlável.

A partir de cálculos elementares, nota-se que U é triangular superior e os elementos de sua diagonal principal são da forma

$$u_{11} = 1 \quad (3.16.1)$$

$$u_{kk} = \prod_{i=1}^{k-1} a_{i+1,i}; k=2, \dots, n \quad (3.16.2)$$

Logo, pode-se afirmar que o par (A,b) é controlável se e somente se,  $a_{i+1,i} \neq 0$ , para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Aparentemente, na solução de (3.15) é necessário efetuar-se a inversão da matriz T. Contudo, observa-se que, devido a forma das matrizes A e b de (3.2) a matriz T é triangular inferior e para obtenção do coeficiente  $c_i (i=2, \dots, n)$ , necessitam-se somente dos valores dos coeficientes anteriores da matriz c que são calculados diretamente. Ou seja, para o cálculo de  $c_2$  necessita-se do valor de  $c_1$ , para o cálculo de  $c_3$  dos valores de  $c_1$  e  $c_2$  e assim por diante.

#### 4. APLICAÇÃO À SÍNTESE DE REDES LADDER DIGITAIS

A utilização de redes do tipo ladder para a implementação de filtros digitais tem sido proposta em vários trabalhos (Mitra e outros, 1972, 1973.a e 1973.b). Nesta seção será apresentada uma forma sistemática para a realização de redes ladder com uma determinada topologia, baseada na realização de estado na forma de Schwarz.

O tipo de estrutura aqui apresentado é semelhante ao apresentado em Mitra e outros, 1973.a. Naquele trabalho utiliza-se o conceito de "two pair network" que, sujeito a determinadas restrições de projeto, leva à síntese de uma rede do tipo ladder para filtros digitais monovariáveis.

Embora o procedimento para obtenção da realização do denominador da função de transferência (polinômio  $\bar{D}(z)$  em (3.4)) seja o mesmo, com a diferença de que a matriz A de (3.2) na forma de Schwarz é obtida utilizando-se os determinantes de Hurwitz, (Parks, 1962), o

procedimento para a realização do numerador de (3.4) não é apresentado de uma forma sistemática. Neste trabalho isto é obtido, resolvendo-se o conjunto de equações algébricas dadas em (3.15).

A estrutura do filtro digital é da forma mostrada na Figura 1.

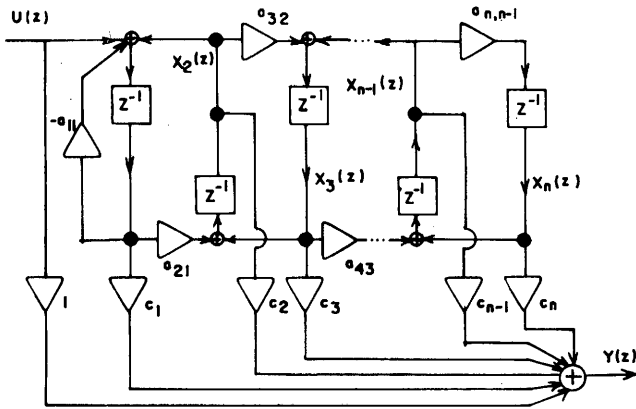


Figura 1 - Estrutura Ladder Completa

Pode-se observar que todos os coeficientes dos multiplicadores são obtidos diretamente das matrizes de realização da função de transferência. É fácil verificar que o número de multiplicadores é igual a  $2n+1$  e o número de somadores é igual a  $n$ , onde  $n$  é a maior potência de  $z$  na expressão (3.1). Além do mais, a partir das equações (2.4) a (2.8) e (3.15) um programa computacional bastante simples pode ser desenvolvido para obtenção das matrizes  $A, b, c, d$  das realizações de esta do tridiagonal e na forma de Schwarz.

Para ilustrar o método de síntese apresentado, considere a realização de um filtro passa-baixa de Chebyshev de terceira ordem tendo 0.5dB de "ripple" de 0 a 100 Hz, uma atenuação de pelo menos 19 dB em 183 Hz e um período de amostragem de 1 KHz - cuja função de transferência (Gold and Rader, 1969) é da da por:

$$G(z) = \frac{0,0154z^3 + 0,0462z^2 + 0,0462z + 0,0154}{z^3 - 1,99z^2 + 1,572z - 0,4583}$$

A matriz  $A$  da realização de estado na forma de Schwarz é obtida utilizando-se as equações (3.4), (3.6) e (3.7) e a realização de estado tridiagonal definida em (2.4) a (2.8). Para este exemplo, tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1,99 & 1 & 0 \\ -1,3417 & 0 & 1 \\ 0 & -0,2303 & 0 \end{bmatrix}$$

O escalar  $d$  é obtido de (3.5), a matriz coluna  $b$  é dada em (3.3) e a matriz linha  $c$  é obtida resolvendo-se (3.15). Os valores em contrados foram

$$c = [0,0768 \quad -0,0164 \quad 0,0849]$$

$$d = 0,0154$$

A estrutura ladder correspondente é apresentada na figura 2.

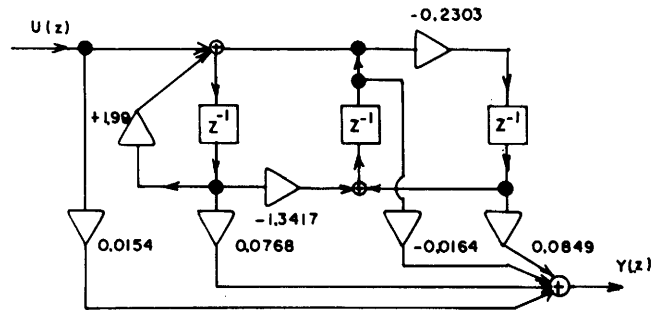


Figura 2 - Filtro Passa-baixa de Chebyshev de Terceira Ordem.

## 5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A REDE PROPOSTA

Ao se propor uma determinada estrutura para a realização de uma função de transferência, deve-se ter claro o seu comportamento frente aos erros inerentes de sua implementação, principalmente quando usa-se "hardware" dedicado para este fim. Estes erros são devidos à quantização dos coeficientes e aos erros de arredondamento.

Dentre os vários procedimentos para análise das estruturas, escolheu-se neste trabalho, aquele sugerido em Crochiere e Oppenheim (1975). Sob este procedimento, nesta seção serão discutidos a representação da estrutura proposta, bem como as operações necessárias para obtenção da matriz de representação desta estrutura, obtida a partir do diagrama de fluxo de sinal associado a topologia da rede. Por uma questão de uniformidade, será seguida aqui a mesma nomenclatura adotada em Crochiere e Oppenheim (1975).

Não serão apresentados resultados sobre os efeitos da quantização dos coeficientes (sensibilidade da resposta) ou sobre os erros de arredondamento (injeção de ruído branco em determinados pontos da estrutura), mas simplesmente as facilidades introduzidas na obtenção da matriz de representação decorrentes do uso da representação por variáveis de estado da estrutura proposta. Resultados estão sendo investigados e serão apresentados futuramente.

Seguindo o procedimento apresentado em Crochiere e Oppenheim (1975) pode-se estabelecer o seguinte diagrama de fluxo de sinal para a estrutura da Figura 1. Sem perda de generalidade, considerar-se-á a ordem da estrutura igual a 3.0. O nó 1 representa a fonte  $u(k)$ , os nós 2, 3 e 4 as variáveis de estado  $x_1(k)$ ,  $x_2(k)$  e  $x_3(k)$ , os nós 5, 6 e 7  $x_1(k+1)$ ,  $x_2(k+1)$  e  $x_3(k+1)$  e o nó 8 a saída  $y(k)$ . As linhas pontilhadas indicam os ramos-atraso, conforme a Figura 3.

A matriz dos coeficientes dos ramos do primeiro tipo (ramos coeficientes),  $f_c^t$  e  $r_c^t$   $(2n+2) \times (2n+2)$  é da forma abaixo, onde  $t$  denota a transposta de uma matriz.

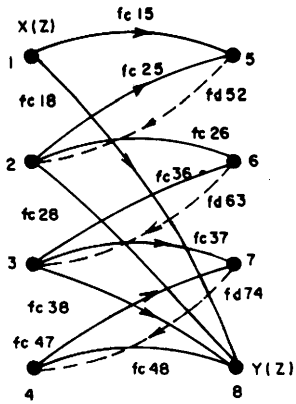


Figura 3 - Diagrama de Fluxo de Sinal da Estrutura Proposta.

$$f_c^t = \begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & 0 \\ b & A & 0 \\ d & c & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n+1 \\ n \\ 1 \end{matrix} \quad (5.1)$$

1    n    n+1

A matriz dos coeficientes dos ramos do segundo tipo (ramos-atrasos)  $f_d^t$ , pertence ao  $R^{(2n+2) \times (2n+2)}$  e da forma:

$$f_d^t = \begin{bmatrix} \bar{0} & E \\ \bar{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \quad (5.2)$$

n+1    n+1

onde

$$E = \begin{bmatrix} \bar{0} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

A matriz de representação da estrutura, denotada  $T(z)$ , é obtida de acordo com a expressão:

$$Y(z) = T^t(z) X(z) \quad (5.4)$$

$$T^t(z) = (I - f_c^t - f_d^t z^{-1})^{-1} \quad (5.5)$$

Um elemento  $T_{jk}^t(z)$  de  $T(z)$  representa a função de transferência do nó  $j$  ao nó  $k$  e caracteriza a resposta da estrutura no nó  $k$  devido a uma fonte única aplicada no nó  $j$ . Este aspecto é importante de ser ressaltado, por exemplo, na análise do efeito dos erros de arredondamento, que podem ocorrer em vários pontos da estrutura e podem ser modelados como injeções de ruído branco nestes pontos. Se mais de um sinal é injetado na estrutura, a resposta em um nó  $k$  particular pode ser expressa, usando superposição, por

$$Y_k(z) = \sum_{j=1}^N T_{jk}^t(z) x_j(z) \quad (5.6)$$

onde  $N$  é o número de sinais injetados na estrutura.

Um problema inerente a este procedimento de análise é a inversão da matriz dada em (5.5). Em Crochiere e Oppenheim (1975) são sugeridas algumas formas de se evitar este problema, embora exijam cálculos por demais extensos. De acordo com as matrizes  $f_c^t$  e  $f_d^t$  dadas em (5.1) e (5.2) e, utilizando técnicas bem conhecidas da teoria de controle, a inversão da matriz  $T^t(z)$  dada em (5.5) pode ser obtida de uma forma facilmente implementável do ponto de vista computacional.

Pode-se observar facilmente que

$$I - f_c^t - f_d^t z^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n+1} & \bar{B} \\ \bar{A} & I_{n+1} \end{bmatrix} \in R^{(2n+2) \times (2n+2)} \quad (5.7)$$

onde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} b & A \\ d & c \end{bmatrix}, \bar{A} \in R^{(n+1) \times (n+1)} \quad (5.8)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z^{-1} I_n & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} \in R^{(n+1) \times (n+1)} \quad (5.9)$$

Partindo-se de (5.7) e utilizando-se operações matriciais simples, observa-se que

$$T^t(z) = [I - f_c^t - f_d^t z^{-1}]^{-1} = z \begin{bmatrix} [zI - \bar{A}]^{-1} & -\bar{B}[zI - \bar{B}]^{-1} \\ -\bar{A}[zI - \bar{A}]^{-1} & [zI - \bar{B}]^{-1} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

onde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & A \end{bmatrix}, \bar{A} \in R^{(n+1) \times (n+1)} \quad (5.11)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} \in R^{(n+1) \times (n+1)} \quad (5.12)$$

As operações de inversão  $(zI - \bar{A})^{-1}$  e  $[zI - \bar{B}]^{-1}$  podem ser efetuadas utilizando-se o algoritmo de Leverrier (Morgan, 1966) que é implementável computacionalmente. Investigações a serem feitas sobre a esparsidade das matrizes  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  podem levar a simplificações ainda maiores no esforço computacional.

## 6. SÍNTESE DE OUTRAS ESTRUTURAS DE REDES LADDER VIA REALIZAÇÃO DE ESTADO TRIDIAGONAL

Nesta seção apresenta-se um procedimento sistemático, baseado na realização de estado tridiagonal (vide Seção 2), para se obter os parâmetros da realização de um filtro digital nas formas tipo IA e IIA apresentadas por Mitra e outros (1972). Estas formas foram sugeridas a partir das expansões em frações contínuas na primeira forma de Cauer e na forma de Stieltjes mostradas a seguir, cujas estruturas das redes digitais associadas às mesmas são apresentados nas Figuras 4 e 5 respectivamente.

Seja  $G(z)$  dada por (2.1) que gera as fra-

ções continuadas abaixo

FORMA IA (PRIMEIRA FORMA DE CAUER)

$$G(z) = \frac{1}{A_1 z + \frac{1}{B_1 + \frac{1}{A_2 z + \frac{1}{B_2 + \dots + \frac{1}{A_n z + \frac{1}{B_n}}}}} \quad (6.1)$$

FORMA IIA (FORMA DE STIELTJES)

$$G(z) = \frac{1}{A_1 z + B_1 + \frac{1}{A_2 z + B_2 + \dots + \frac{1}{A_n z + B_n}}} \quad (6.2)$$

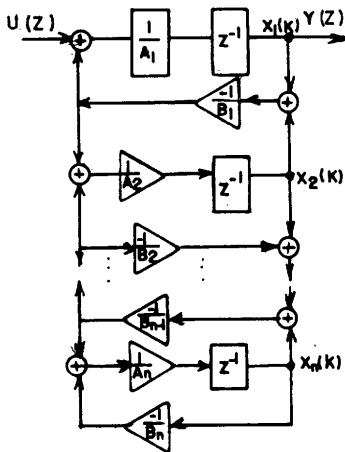


Figura 4 - Realização Ladder Tipo IA

Para o caso em que  $G(z)$  possui o polinômio do numerador da mesma ordem do polinômio denominador, faz-se  $G(z) = d + \tilde{G}(z)$ , onde  $\tilde{G}(z)$  possui numerador de ordem  $(n-1)$  e denominador de ordem  $n$ . Então, realiza-se  $\tilde{G}(z)$  numa das formas apresentadas acrescida de um ramo ligando a entrada à saída com ganho  $d$ .

Tomando-se  $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))^T$  para o vetor de estado,  $u(k)$  para a entrada e  $y(k) = x_1(k)$  para a saída, tal como nas Figuras 4 e 5, então tem-se a seguinte descrição de estado

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) \\ y(k) &= \tilde{C}x(k) \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde

$\tilde{B} = (1/A_1, 0, \dots, 0)^T$ ;  $\tilde{C} = (1, 0, \dots, 0)$  e  $\tilde{A}$  é uma matriz tridiagonal  $n \times n$ , sendo que para a forma IA tem-se:

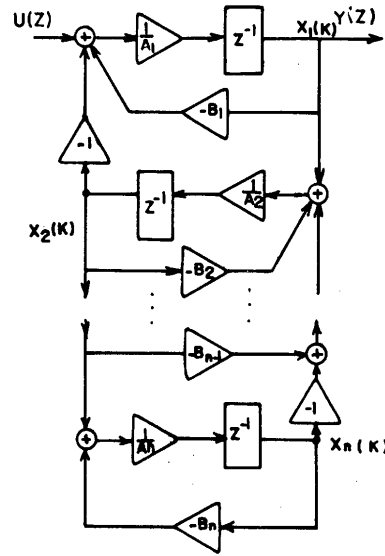


Figura 5 - Realização Ladder Tipo IIA.

$$\tilde{a}_{11} = \frac{-1}{A_1 B_1}; \quad \tilde{a}_{ii} = \frac{-1}{A_i} \left( \frac{1}{B_{i-1}} + \frac{1}{B_i} \right); \quad i=2, \dots, n;$$

$$\tilde{a}_{i+1,i} = \frac{-1}{A_{i+1} B_i} \quad \text{e} \quad \tilde{a}_{i,i+1} = \frac{-1}{A_i B_i}; \quad i=1, \dots, n-1.$$

e para forma IIA tem-se

$$a_{ii} = \frac{-B_i}{A_i}; \quad i=1, \dots, n; \quad \tilde{a}_{i+1,i} = \frac{1}{A_{i+1}} \quad \text{e}$$

$$\tilde{a}_{i,i+1} = \frac{-1}{A_i}; \quad i=1, \dots, n-1.$$

Conforme é mostrado em Rego (1986) as realizações de estado (2.3) e (6.3) são equivalentes. Esta equivalência conduz aos seguintes valores para os parâmetros da realização (2.3), à luz das equações acima:

FORMA IA

$$K = \frac{1}{A_1}, \quad a_{11} = \frac{1}{A_1 B_1}, \quad a_{ii} = \frac{1}{A_i} \left( \frac{1}{B_{i-1}} + \frac{1}{B_i} \right); \quad i=1, \dots, n$$

$$a_{i+1,i} = \frac{1}{B_i A_i A_{i+1}}; \quad i=1, \dots, n-1 \quad (6.4)$$

FORMA IIA

$$K = \frac{1}{A_1}; \quad a_{ii} = \frac{B_i}{A_i}; \quad i=1, \dots, n$$

$$a_{i+1,i} = \frac{-1}{A_i A_{i+1}}; \quad i=1, \dots, n-1 \quad (6.5)$$

Os resultados acima conduzem a um algoritmo para o cálculo dos parâmetros das redes das Figuras 4 e 5, através dos seguintes

passos: (1) obtém-se a realização de estado tridiagonal (2.3) de  $G(z)$ ; (2) A partir das fórmulas (6.4) e (6.5) obtém-se os parâmetros das redes tipo IA e IIA respectivamente.

Exemplo Ilustrativo: Seja

$$G(z) = \frac{200z^2 + 800z + 150}{100z^3 + 600z^2 + 1075z + 650}$$

que desejamos realizar na forma IIA.

Colocando-se  $G(z)$  na forma (2.1), tem-se

$$G(z) = \frac{2(z^2 + 4z + 0.75)}{z^3 + 6z^2 + 10.75z + 6.5}$$

(1) Aplicando-se o algoritmo da realização de estado tridiagonal da seção 2, tem-se:

$$K = 3 \begin{cases} i=2 : \alpha_2 = a_{11} + \beta_1 \rightarrow a_{11} = 2 \\ i=1 : \alpha_1 = a_{11}\beta_1 + \beta_0 - a_{21} \rightarrow a_{21} = -2 \\ i=0 : \alpha_0 = a_{11}\beta_0 - a_{21}\alpha_0^1 \rightarrow \alpha_0^1 = 5/2 \end{cases}$$

$$K = 2 \begin{cases} i=1 : \beta_1 = a_{22} + \alpha_0^1 \rightarrow a_{22} = 3/2 \\ i=0 : \beta_0 = a_{22}\alpha_0^1 - a_{32} \rightarrow a_{32} = 3 \end{cases}$$

$$K = 1 \begin{cases} i=0 : \alpha_0^1 = a_{33} \rightarrow a_{33} = 5/2 \end{cases}$$

Logo a realização (2.3) associada a  $G(z)$  é dada por

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -3/2 & 1 \\ 0 & 3 & -5/2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) Aplicando-se a fórmula (6.5) obtém-se os parâmetros da rede

$$A_1 = \frac{1}{K} = \frac{1}{2}; \quad B_1 = A_1 a_{11} = 1;$$

$$A_2 = \frac{-1}{A_1 a_{21}} = 1; \quad B_2 = A_2 a_{22} = 3/2;$$

$$A_3 = \frac{-1}{A_2 a_{32}} = -1/3; \quad B_3 = A_3 a_{33} = -5/2$$

A estrutura ladder correspondente é apresentada na Figura 6.

A sistematização do cálculo dos parâmetros das redes IA e IIA foi obtida após o estabelecimento de uma relação íntima entre estas redes e a realização de estado tridiagonal. Esta relação pode ser usada para ampliar as possibilidades de abordagem das redes tipo IA e IIA, através do uso dos vários recursos que a técnica de espaço de estado tem a oferecer no estudo de sistemas lineares.

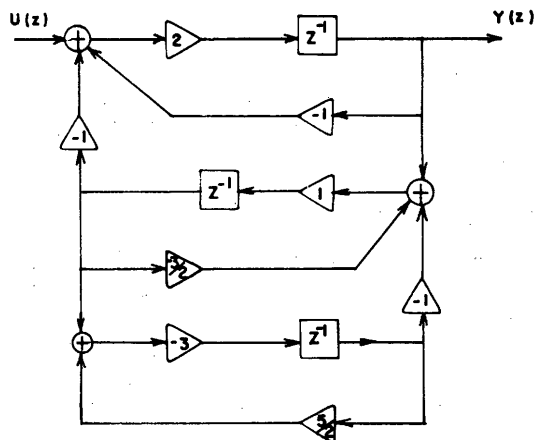


Figura 6 - Rede Ladder do Exemplo Ilustrativo.

## 7. CONCLUSÕES

Foram apresentados dois procedimentos sistemáticos para realização de funções de transferência digitais, usando as realizações de estado tridiagonal e na forma de Schwarz. Os filtros resultantes, já existentes na literatura, são canônicos no que diz respeito ao número de atrasadores, multiplicadores.

A realizabilidade de uma função de transferência  $G(z)$  por um dos três tipos de redes ladder estudados, é determinada a partir do próprio processo de cálculo dos parâmetros de cada uma delas. Para o caso da rede da Figura 1, a realizabilidade é garantida se o denominador de  $G(z)$  é realizável na forma de Schwarz com  $a_{i+1,1} \neq 0$  (isto equivale a existência da realização de estado tridiagonal (2.3) com  $a_{i+1,1} \neq 0$ ). Enquanto que, para as redes na forma IA e IIA, a realizabilidade fica assegurada pela existência da realização de estado tridiagonal (2.3) associada a  $G(z)$  e, obviamente, a inexistência de divisão por zero no cálculo dos parâmetros da rede.

O uso das realizações de estado introduz maiores facilidades na análise das estruturas, uma vez que existe uma relação direta entre os elementos das matrizes e os parâmetros do filtro. Isto facilita a análise, já que as relações entre as representações entrada-saída (função de transferência) e por meio de variáveis de estado de um dado sistema se encontram bem estabelecidas.

Dentre os pontos que pretendemos dar continuidade a este trabalho, enumeramos os seguintes: (1) investigar as implicações sobre as estruturas abordadas decorrentes das limitações existentes na implementação ou seja, do comprimento de palavra a ser utilizado; (2) aplicar a técnica de espaço de estado em outros tipos de redes conhecidas na literatura, com o objetivo não só de se ter um caminho alternativo para a sistematização e implementação destas redes, mas principalmente para aprofundar o conhecimento das características de desempenho das mesmas, através dos vários

recursos disponíveis na teoria de espaço de estado.

## 8. AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

## 9. BIBLIOGRAFIA

- Antoniou, A., (1979). Digital Filters: Analysis and Synthesis, Mc Graw-Hill, New York.
- Crochiere, R.E. & Oppenheim, A.V. (1975). "Analysis of Linear Digital Networks", Proc. IEEE, Vol. 63:581-595.
- Datta, B.N., (1982). "A Solution of the Unite Circle Problem Via Schwarz Canonical Form", IEEE Trans. Aut. Control, Vol. AC-27:698-700.
- Fettweis, A., (1971). "Digital Filter Structures Related to Classical Filter Networks". Arch. Elek. Übertragung, Vol. 25:79-89.
- Gold, B. & Rader, C.M., (1969). Digital Processing of Signal, Mc Graw-Hill, New York.
- Kalman, R.E. & Bertram, J.E., (1960). "Control Systems Analysis and Design Via the Second Method of Lyapunov", J. Basic Eng., Trans. ASME, Series D, Vol. 82:371-393.
- Kaszkurewicz, F. & Hsu, L., (1979). "Stability of Nonlinear Systems: A Structural Approach", Automatica, Vol. 15: 609-614.
- Marshall, T.C., (1969). "Synthesis of RLC Ladder Networks by Tridiagonalization", IEEE Trans. Circuit Theory Vol. CT-16:39-46.
- Mitra, S.K. & Sherwood, R.J., (1972). "Canonical Realizations of Digital Filters Using the Continued Fraction Expansion", IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-20:185-194.
- Mitra, S.K. & Sherwood, R.J., (1973.a). "Digital Ladder Networks", IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. AU-21:30-36.
- Mitra, S.K. & Huey, D.C. Sherwood, R. J., (1973.b). "New Methods of Digital Ladder Realization", IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21:485-500.
- Morgan Jr., B.S., (1966). "Sensitivity Analysis and Synthesis of Multivariable Systems", IEEE Trans. Aut. Control.
- Parks, P.C., (1962). "A New Proof. of the Routh-Hurwitz Stability Criterion Using the Second Method of Lyapunov", Proc. Cambridge Phil. Sol., Vol. 58:694-702.
- Rêgo, J.I. & Hsu, L. & Kaszkurewicz, E., (1982). "Realizability of Passive Ladder Networks and Stability of Linear Systems Via Tridiagonal Matrices", IEEE Int. Symp. Circuit and Systems:

186-189.

- Rêgo, J.I. & Kaszkurewicz, E., (1984). "Uma Nova Formulação para o Critério de Estabilidade de Schwarz", Anais do 5º Cong. Bras. Automática, Vol. 3:866-871.
- Rêgo, J.I., (1986). "Um Algoritmo para Expansão e Inversão de Frações Contínuas". Anais do 6º Congresso Brasileiro de Automática: 163-167.
- Schwarz, H.R., (1956). "A Method for Determining Stability of Matriz Differential Equations", Z. Angew. Math. Phys., Vol. 7:473-500.
- Takahanski, T. & Hamada, N. & Takahaski, S., (1978). "A State-space Realization for Transfer Functions", IEEE Trans. Circet Syst., Vol. CAS-25:79-88.