

## PILOTAGEM DE FOGUETES EMPREGANDO A FORMULAÇÃO LINEAR-QUADRÁTICA

João G. Cunha

Instituto de Atividades Espaciais  
Centro Técnico Aeroespacial  
12.225 - São José dos Campos - SP

Takashi Yoneyama

Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
Centro Técnico Aeroespacial  
12.225 - São José dos Campos - SP

### Resumo

Este trabalho concerne à aplicação da teoria LQ para pilotagem de foguetes de médio porte controlados por desvio de jato. A estratégia de realimentação de estado com ganho obtido pela solução da equação algébrica de Riccati é comparada com o desempenho obtido por um controlador PID clássico. Resultados baseados em simulações extensivas com um modelo completo de validação, incluindo termos não-lineares e perturbações devidas ao vento, indicam que o controlador LQ apresenta vantagens em missões com especificações rígidas, quantizadas em termos dos erros de rastreamento da trajetória, carregamento aerodinâmico e requisitos de desvios de jato. Uma vez que a complexidade introduzida pelo algoritmo LQ pode ser superada pelo computador digital de bordo, a utilização deste tipo de lei de controle possui uma perspectiva promissora.

### ATTITUDE CONTROL OF ROCKETS USING LQ THEORY

#### Abstract

This work concerns the control of medium size rockets using the LQ Theory. The state feedback control law is obtained by solving an algebraic Riccati equation and produces the required deviation on the thrust vector from the data consisting of the pitch angle, pitch rate and the attack angle. The performance obtained with the LQ Theory is compared to results generated by tuning PID controllers. Extensive simulations were carried out in a digital computer, employing the complete validation model with non-linear terms and wind disturbances. In missions with tight specifications the LQ controller yielded better performances with respect to tracking error, aerodynamic loading and thrust deviation requirements. Despite its complexity, the LQ controller can be an attractive alternative in certain types of missions as shown by a case study included in this work.

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma aplicação da teoria moderna de controle em sistemas aeroespaciais, e o seu desempenho em comparação com uma estrutura clássica PID. A formulação linear quadrática é aplicada para pilotagem de foguetes, ou seja, para o controle da sua orientação angular em relação a um referencial inercial. Esta orientação é expressa em termos de ângulos de Euler e denominada atitude. A classe de foguetes referida neste trabalho é a de veículos de médio porte como os lançadores de satélite. Estes foguetes geralmente têm suas forças de controle geradas através do desvio angular do jato principal.

Uma característica dinâmica relevante deste sistema é a de ser variante no tempo. Isto se deve ao fato do foguete perder grande quantidade de sua massa, em função da queima do propelente ao longo do tempo, e dos parâmetros aerodinâmicos que variam com

o número de Mach, cuja dependência é predominantemente sobre a trajetória, considerada neste trabalho como sendo pré-definida.

A definição da missão de um foguete desta classe é feita em termos de trajetória. A partir desta trajetória é definida uma função de atitude de referência, que é a entrada do sistema de pilotagem. Esta lei pode ser gerada tanto em tempo real, por uma malha de controle externa, quanto por pré-programação antes do lançamento. A escolha de um dos métodos depende da dispersão de posição aceitável no fim da fase controlada do voo, visto que a pilotagem não corrige deslocamentos lineares, estando portanto em malha aberta em termos de trajetória. Neste trabalho será considerado o segundo caso, e a lei de atitude de referência fornecida a priori.

A seguir será apresentado o modelamento

da dinâmica do foguete sob as seguintes hipóteses:

- o foguete é um corpo rígido;
- a Terra é plana;
- a aerodinâmica é simplificada por uma força atuando em um ponto, o centro de pressão;
- os parâmetros aerodinâmicos são função somente do nº de Mach, independente do ângulo de ataque;
- o modelo só leva em consideração como perturbação a velocidade do vento.

## 2. MODELAMENTO DA DINÂMICA DO FOGUETE

### 2.1 - Sistema de Coordenadas e Notação das Grandezas Básicas.

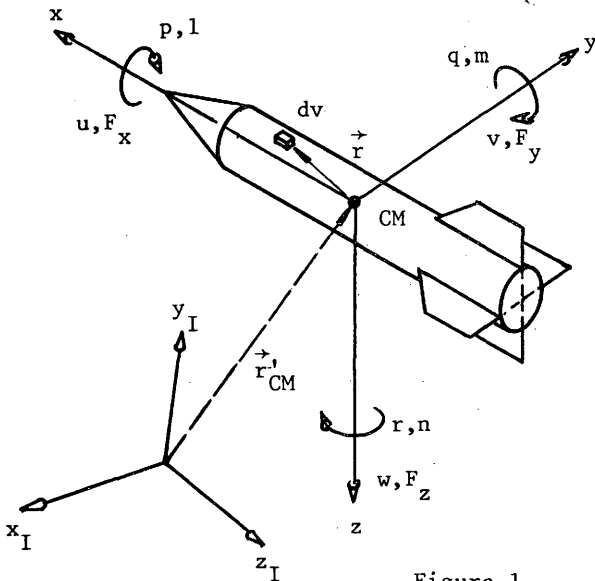


Figura 1

- $(x_1, y_1, z_1)$  = Sistema Inercial de Coordenadas.  
 $(x, y, z)$  = Sistema de Coordenadas solidário ao Foguete.  
 $(u, v, w)$  = Componentes do vetor velocidade sobre  $(x, y, z)$ .  
 $(F_x, F_y, F_z)$  = Componentes da Força Resultante sobre o foguete.  
 $(p, q, r)$  = Velocidades Angulares de rolamento, arfagem e guinada.  
 $(l, m, n)$  = Momentos de rolamento, arfagem e guinada.

### 2.2 - Equações Dinâmicas de Corpo Rígido

Sabe-se das leis de Newton que:

$$m \left[ \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}'_{CM}) \right] = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T = \vec{F} \quad (2.1)$$

$(x_1, y_1, z_1)$

onde

- $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade  
 $\vec{r}'_{CM}$  é o vetor posição do Centro de Massa sobre  $(x_1, y_1, z_1)$   
 $\vec{F}_A$  é a resultante de forças aerodinâmicas  
 $\vec{F}_T$  é a força de empuxo  
 $m$  é a massa do foguete

$$e \quad \int_V \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \times \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right] \right) \right] \rho \, dv = \vec{M}_A + \vec{M}_T = \vec{M} \quad (2.2)$$

$(x_1, y_1, z_1)$

onde

- $\rho$  é a densidade do elemento de volume  
 $\vec{r}$  é o vetor posição em relação a  $(x, y, z)$  do elemento de volume  
 $V$  é o volume geométrico do foguete  
 $\vec{M}_A$  é o momento aerodinâmico  
 $\vec{M}_T$  é o momento devido ao empuxo

Escrevendo-se para um dado vetor  $\vec{A}$

$$\left[ \frac{d\vec{A}}{dt} \right] = \dot{\vec{A}} \quad (2.3)$$

$(x, y, z)$

tem-se que

$$\left[ \frac{d\vec{A}}{dt} \right] = \dot{\vec{A}} + \vec{\omega} \times \vec{A} \quad (2.4)$$

$(x_1, y_1, z_1)$

onde  $\vec{\omega}$  é a velocidade angular de  $(x, y, z)$  com relação a  $(x_1, y_1, z_1)$ .

Nestas condições, a equação (2.1) é reescrita como

$$m(\dot{\vec{v}}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{CM}) = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_T = \vec{F} \quad (2.5)$$

e a equação (2.2) como:

$$\int_V \left[ \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) \right] \rho \, dv = \vec{M}_A + \vec{M}_T = \vec{M} \quad (2.6)$$

Considerando-se os versores  $(i, j, k)$  do sistema  $(x, y, z)$ , pode-se escrever

$$\begin{aligned} \vec{F} &= iF_x + jF_y + kF_z \\ \vec{M} &= iL + jM + kN \\ \vec{\omega} &= ip + jq + kr \\ \vec{v}_{CM} &= iu + jv + kw \\ \vec{r} &= ix + jy + kz \end{aligned} \quad (2.7)$$

Nestas condições (2.1) pode ser expresso componente a componente como sendo:

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + vr + wq) &= F_x \\ m(\dot{v} + ur - wp) &= F_y \\ m(\dot{w} - uq + vp) &= F_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando-se as expressões (2.7) a equação (2.6) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} I_{xx} \dot{p} + (I_{zz} - I_{yy}) r q &= L \\ I_{yy} \dot{q} + (I_{xx} - I_{zz}) p r &= M \\ I_{zz} \dot{r} + (I_{yy} - I_{xx}) p q &= N \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde os momentos de inércia  $I_{xx}, I_{yy}$  e  $I_{zz}$  são dados por

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_V (y^2 + z^2) \rho \, dv \\ I_{yy} &= \int_V (x^2 + z^2) \rho \, dv \\ I_{zz} &= \int_V (x^2 + y^2) \rho \, dv \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agora as equações (2.8) e (2.9) estão em uma forma apropriada para processamento no computador de bordo do foguete, uma vez que todas as grandezas estão expressas em um sistema de coordenadas solidário ao foguete, desde que se conheça a atitude do sistema  $(x, y, z)$

em relação a  $(x_1, y_1, z_1)$ .

### 2.3 - Equações Cinemáticas

As relações angulares entre  $(x, y, z)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$  podem ser expressas por ângulos de Euler. Se  $\vec{a}$  é um vetor que possui representação  $(a_x, a_y, a_z)$  em  $(x, y, z)$  a  $(a_x^I, a_y^I, a_z^I)$  em  $(x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\begin{bmatrix} a_x^I \\ a_y^I \\ a_z^I \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

onde a matriz  $T = [t_{ij}]$  é dada por:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \cos\psi \cos\theta \\ t_{12} &= \sin\phi \sin\theta \cos\psi - \cos\phi \sin\psi \\ t_{13} &= \cos\phi \sin\theta \cos\psi + \sin\phi \sin\psi \\ t_{21} &= \cos\theta \sin\psi \\ t_{22} &= \sin\phi \sin\theta \sin\psi + \cos\phi \cos\psi \\ t_{23} &= \cos\phi \sin\theta \sin\psi - \sin\phi \cos\psi \\ t_{31} &= -\sin\theta \\ t_{32} &= \sin\phi \cos\theta \\ t_{33} &= \cos\phi \cos\theta \end{aligned} \quad (2.12)$$

e os ângulos  $\phi, \theta$  e  $\psi$  são vistos na figura 2.

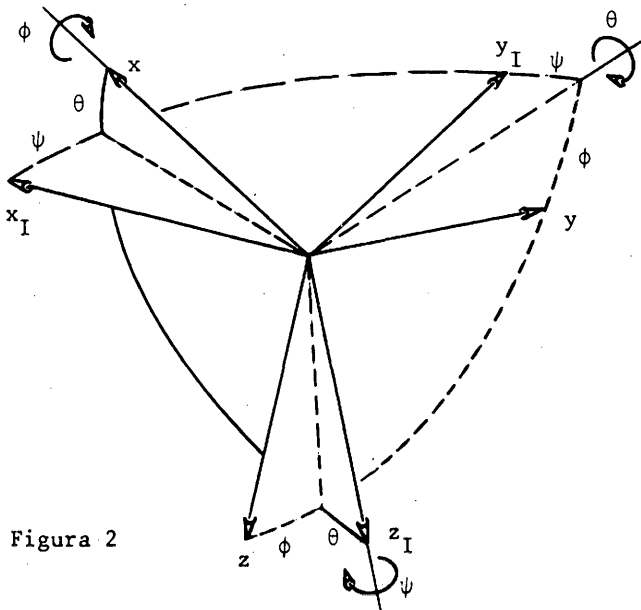


Figura 2

Nestas condições,

$$\vec{\omega} = i\dot{\psi} + j\dot{\theta} + k\dot{\phi} = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\phi}$$

implica na seguinte relação cinemática a ser satisfeita:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta \\ q &= \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \cos\theta \sin\phi \\ r &= \dot{\psi} \cos\phi \cos\theta - \dot{\theta} \sin\phi \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente, o modelo completo para um foguete pode ser expresso utilizando-se as equações (2.8), (2.9) e (2.13).

$$\begin{aligned} \dot{u} &= vr - wq - g \cos\theta + \frac{F_{AX} + F_{TX}}{m} \\ \dot{v} &= pw - ru + g \sin\phi \sin\theta + \frac{F_{AY} + F_{TY}}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= qu - vp + g \cos\theta \sin\phi + \frac{F_{AZ} + F_{TZ}}{m} \\ \dot{p} &= I_{xx}^{-1} M_x \\ \dot{q} &= I_{yy}^{-1} ((I_{xx} - I_{zz})pr + M_y) \\ \dot{r} &= I_{zz}^{-1} ((I_{yy} - I_{xx})pq + M_z) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p + (q \sin\phi + r \cos\phi) \tan\theta \\ \dot{\theta} &= q \cos\phi - r \sin\phi \\ \dot{\psi} &= (r \cos\phi + q \sin\phi) \sec\theta \end{aligned}$$

Para o veículo lançador a ser considerado neste trabalho, tem-se que  $p \approx 0$  devido à presença de um sistema de controle de rolamento, permitindo que se reduza as expressões dinâmicas para:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -wq + \frac{F_x}{m} \\ \dot{v} &= -ru + \frac{F_y}{m} \\ \dot{w} &= qu + \frac{F_z}{m} \\ \dot{p} &= I_{xx}^{-1} M_x \\ \dot{q} &= I_{yy}^{-1} M_y \\ \dot{r} &= I_{zz}^{-1} M_z \end{aligned} \quad (2.15)$$

Considerando-se a magnitude do vetor empuxo, pode-se fazer

$$\frac{F_x}{m} \gg qw \quad (2.16)$$

o que simplifica a expressão de  $\dot{u}$  para

$$\dot{u} = -m^{-1} F_x \quad (2.17)$$

Em termos dos ângulos de desvio do jato  $\delta_p$  e  $\delta_y$  e dos ângulos de ataque  $\alpha$  e de derrapagem  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} F_{TZ} &= K'_c \cdot \delta_p & M_{TZ} &= \mu_c \cdot \delta_p \\ F_{TY} &= K'_c \cdot \delta_y & M_{TY} &= \mu_c \cdot \delta_y \\ F_{AZ} &= -K'_\alpha \cdot \alpha & M_{AZ} &= \mu_\alpha \cdot \alpha \\ F_{AY} &= -K'_\beta \cdot \beta & M_{AY} &= \mu_\beta \cdot \beta \end{aligned} \quad (2.18)$$

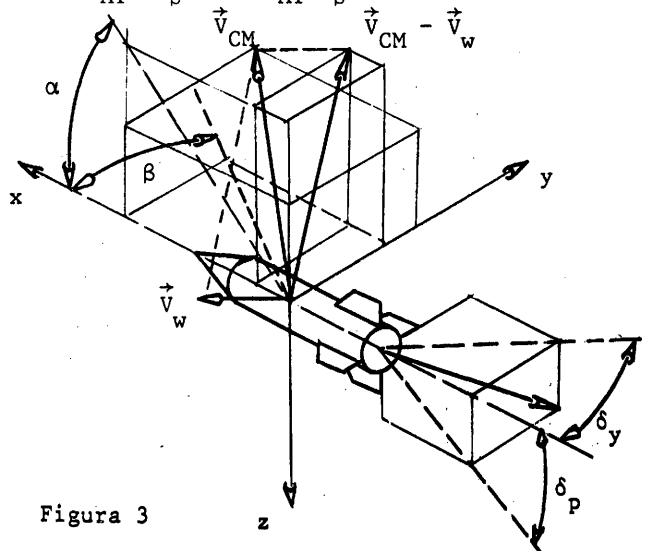


Figura 3

$V_w$  = Velocidade do Vento

onde

$$\alpha \sim \frac{w-v}{u} \quad \beta \sim \frac{v-v_y}{u} \quad (2.19)$$

Diferenciando-se ambos os lados obtém-se que

$$\dot{\alpha} = q + K_c \delta_p + (K_\alpha - \frac{\dot{u}}{u})\alpha + \frac{g \cos \theta}{u} - \frac{\dot{wz}}{u} \quad (2.20)$$

onde

$$K_c = \frac{K'_c}{u}$$

$$K_\alpha = \frac{K'_\alpha}{u}$$

e, analogamente,

$$\dot{\beta} = -r + K_c \delta_y + (-K_\beta - \frac{\dot{u}}{u})\beta - \frac{wy}{u} \quad (2.21)$$

O modelo simplificado para controle em arfagem do veículo lançador pode, então, ser expresso na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_\alpha - \frac{\dot{u}}{u} & 1 & 0 \\ -\mu_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c \\ \mu_c \\ 0 \end{bmatrix} \delta_p + \begin{bmatrix} \frac{g \cos \theta}{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{wz} \quad (2.22)$$

a qual pode ser reescrita na forma

$$\dot{x} = Ax + B\delta_p + h(t) + v(x) \quad (2.23)$$

$$A = \begin{bmatrix} -K_\alpha - \frac{\dot{u}}{u} & 1 & 0 \\ -\mu_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} K_c \\ \mu_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad h(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{u} \dot{wz} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v(\alpha, q, \theta) = \begin{bmatrix} \frac{g \cos \theta}{u} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3. PILOTABILIDADE E CARREGAMENTO AERODINÂMICO

A pilotabilidade de um foguete é a capacidade de rastreamento e regulação do foguete a uma atitude comandada, submetido a um conjunto de perturbações.

Esta pilotabilidade pode ser quantizada pela relação torque disponível para o sistema de controle e torque perturbador, que é encontrada a partir da equação:

$$\dot{q} = \mu_c \delta - \mu_\alpha \alpha \quad (3.1)$$

O veículo está sob controle se é capaz de fazer  $\dot{q}=0$  após atingir  $q=q_R$  e  $\theta=\theta_R$ , supondo que a referência de atitude será segmento de retas, para que isto possa ser satisfeito:

$$\mu_c \delta > |\mu_\alpha \alpha| \quad \text{para } \forall \alpha < \alpha_M$$

como  $\mu_c$  é sempre positivo

$$\mu_c |\delta| > |\mu_\alpha \alpha|$$

$$|\delta| > \left| \frac{\mu_\alpha}{\mu_c} \alpha \right| = \left| \frac{\mu_\alpha}{\mu_c} \right| |\alpha|$$

$$|\delta| > \gamma |\alpha| \quad (3.2)$$

onde

$$\gamma = \left| \frac{\mu_\alpha}{\mu_c} \right| \quad (3.3)$$

Como  $\mu_\alpha$  e  $\mu_c$  são variáveis no tempo,  $\gamma$  é função do tempo e o máximo valor que pode ser assumido pelo  $\delta$  depende apenas da construção do atuador, para cada instante de tempo, existe um valor de  $\alpha_M$  tal que com um ângulo de ataque maior que  $\alpha_M$  o foguete perde o controle por incapacidade de torque do sistema de atuação.

$$|\alpha_M| = \frac{1}{\gamma} |\delta_M| \quad (3.4)$$

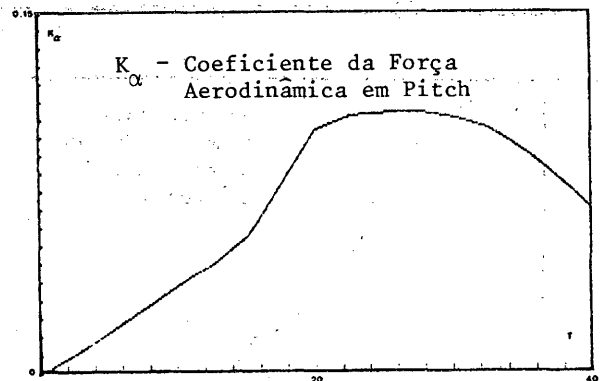
O carregamento aerodinâmico sobre a estrutura do foguete pode ser entendida como o efeito que a força aerodinâmica produz sobre sua estrutura. Uma estrutura real define um carregamento aerodinâmico máximo que esta estrutura é capaz de suportar sem apresentar nenhum dano. A força aerodinâmica pode ser expressa pela seguinte equação:

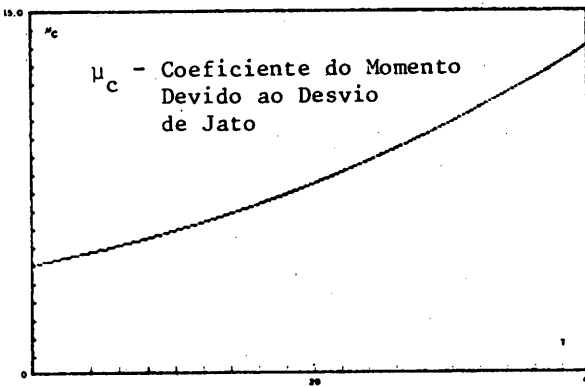
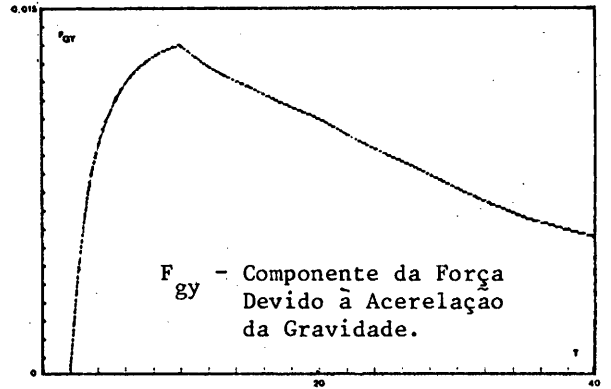
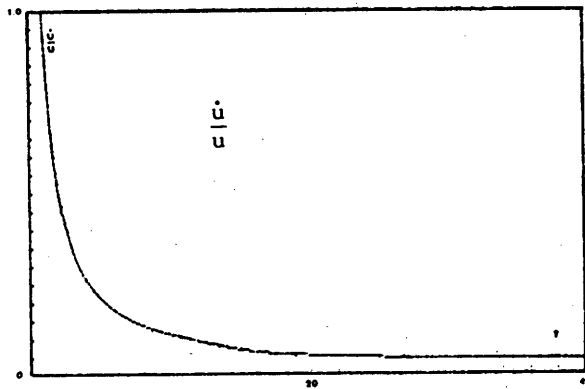
$$F_A = m K'_\alpha \cdot \alpha = \eta \cdot \alpha \quad (3.5)$$

$\eta$  é uma variável que pode ser admitida como dependente unicamente da missão, ou seja, do ponto de vista de controle é um parâmetro em função do tempo, para uma dada missão. Então o carregamento aerodinâmico do ponto de vista do Sistema de Controle é proporcional ao ângulo de ataque, como uma constante de proporcionalidade variável com o tempo.

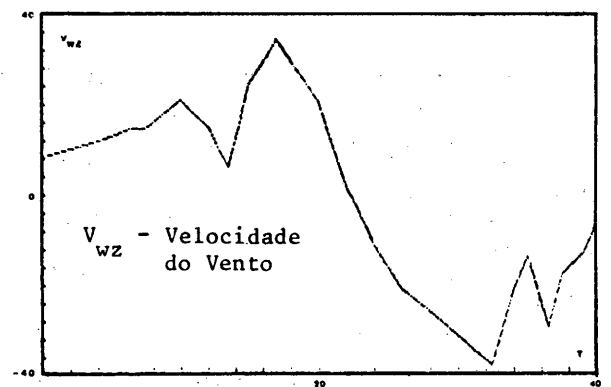
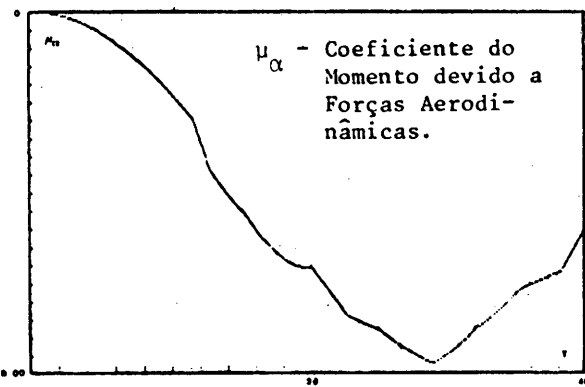
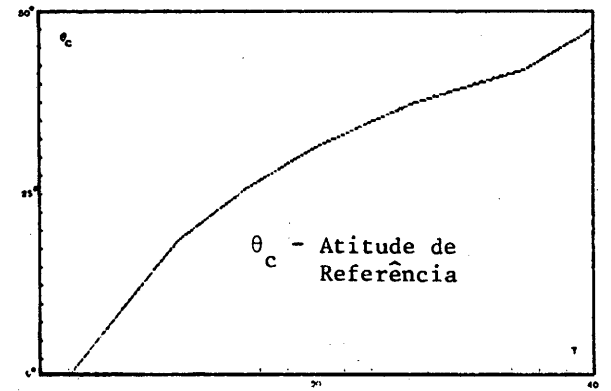
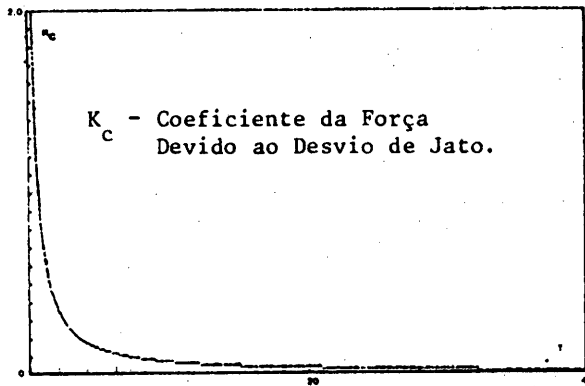
#### VEÍCULO EXEMPLO

Para a comparação das estruturas de controle a serem propostas a seguir, será utilizado um veículo exemplo que apresenta a dinâmica em função do tempo conforme apresentado a seguir



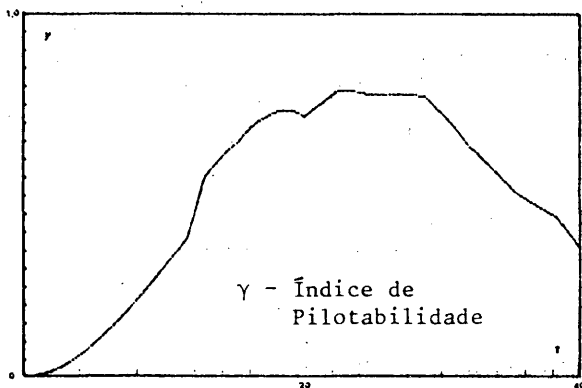
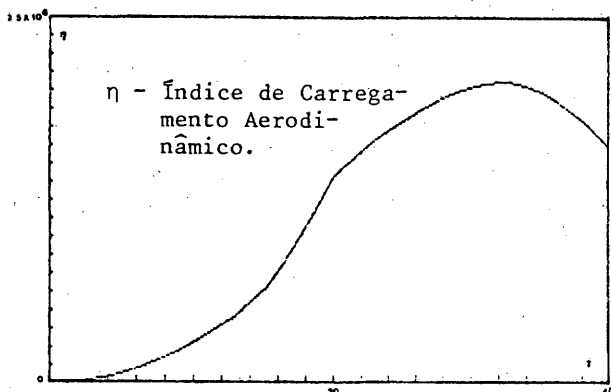


A Missão proposta é que o veículo rastreie a atitude de referência dada no gráfico abaixo de  $\theta_c \times t$ . Esta missão ocorre em data e local onde o conhecimento dos perfis estáticos de vento fornecem o gráfico de vento máximo em função da altura, já transformada para função do tempo, com uma probabilidade de 30, conforme fornecido abaixo:



O atuador responsável pelo deslocamento angular do jato principal será suposto de dinâmica contínua e muito rápida, sendo portanto desconsiderada. Também os sensores terão suas dinâmicas desconsideradas.

São apresentadas a seguir as curvas de índice de pilotabilidade e índice de carregamento aerodinâmico em função do tempo para a missão dada.



serem implantados.

Serão definidas duas especificações para o foguete exemplo executar a missão dada no item anterior e propostas duas estruturas de controle para cumprí-las:

#### APLICAÇÃO 1

Especificações:

a) O erro de atitude durante a fase propulsada não é crítico: pode assumir  $1^0$  ou  $1,5^0$  durante toda a fase pilotada.

b) O valor do ângulo de ataque não é crítico, pois do ponto de vista de pilotabilidade de o veículo tem uma disponibilidade de ângulo de desvio de jato grande em torno de  $4$  a  $5^0$ . Do ponto de vista de carregamento aerodinâmico o veículo suporta um carregamento muito grande e a estrutura não precisa ser otimizada podendo ser reforçada em caso de necessidade.

Uma estrutura de controle para atender estas especificações não precisa ser muito precisa, pois as especificações não são muito rígidas; então o controlador a ser usado pode ser simples. Um controlador simples que pode atender a maioria dos casos é o P+I usando ainda, para aumentar o amortecimento do sistema, uma realimentação de velocidade angular; então a estrutura de controle proposta é a do diagrama abaixo:

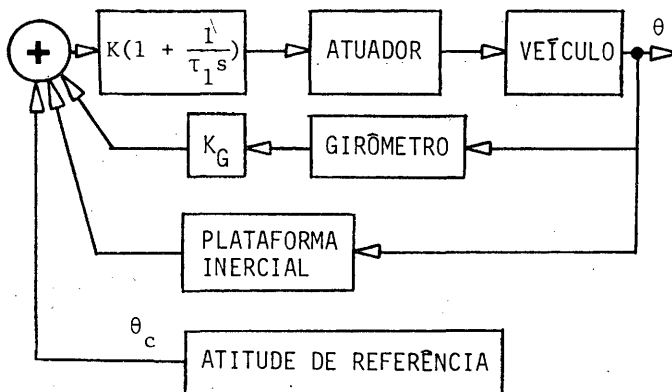


Figura 4

#### 4. ESTRUTURA DOS SISTEMAS DE PILOTAGEM

A escolha do sistema de pilotagem para que um foguete execute uma dada missão é uma solução de compromisso entre a precisão obtida com este sistema e a simplicidade de implementação deste mesmo sistema. A simplicidade está ligada à confiabilidade, e a confiabilidade é um fator muito importante na área aeroespacial, onde não se pode parar o processo para que um componente possa ser substituído.

Se a missão tiver características tais que a especificação do sistema de pilotagem não seja muito estridente então a estrutura tende a ser sempre simples; se ao contrário as especificações do sistema de pilotagem forem estridentes para que seja cumprida a missão, os controladores usados devem ter alta performance e nem sempre muito simples de

A plataforma inercial é o sensor que fornece a informação de atitude do veículo e o Girômetro a velocidade angular.

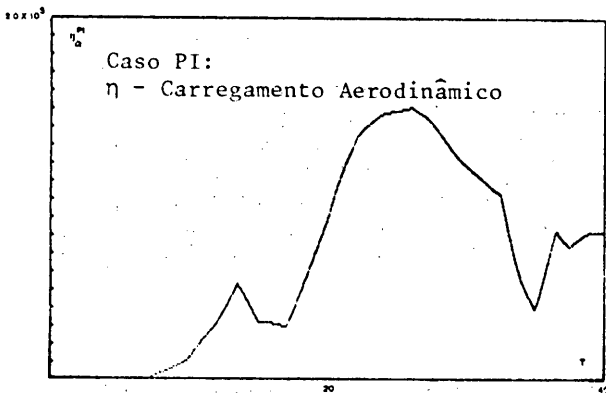
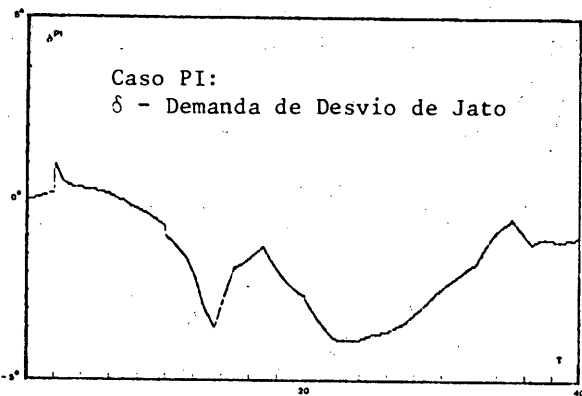
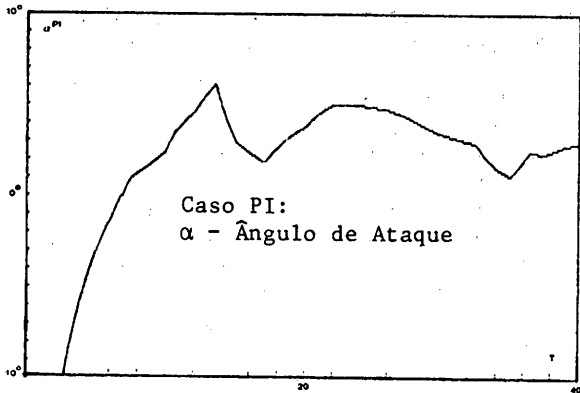
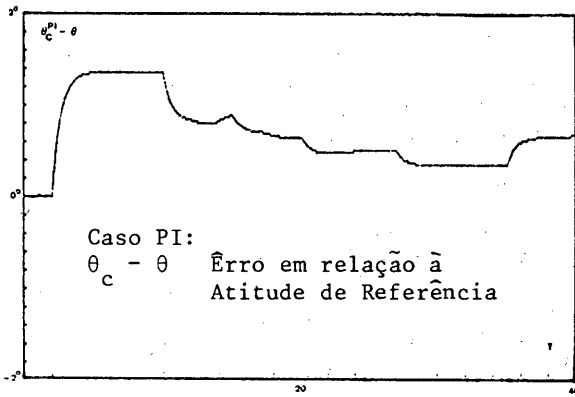
Os parâmetros do sistema de pilotagem foram ajustados de tal forma a um único conjunto de parâmetros ser suficiente para que o sistema cumpra a missão com as especificações dadas; foram encontrados os seguintes valores:

$$K=8$$

$$\tau_1=0,5$$

$$K_G=0,6$$

Feitas simulações com o sistema são apresentados os gráficos referentes às saídas abaixo:



## APLICAÇÃO 2

Especificações:

- O erro deve ser menor que  $1^0$
- Carregamento aerodinâmico  $\leq 1,2 \times 10^5 N$
- $\delta < 3^0$

A estrutura proposta para a pilotagem com estas especificações é uma realimentação de estado, sendo o vetor de estado  $x = [\alpha, q, \theta]^T$  e o ganho da realimentação ajustado por um algoritmo de otimização usando a formulação linear quadrática. As matrizes peso são ajustadas de acordo com o instante do voo dando maior peso inicialmente ao erro já que a força aerodinâmica é baixa no início do voo e na região onde o índice  $\eta$  é maior o peso da dispersão do ângulo de ataque será maior.

Seja a equação de estado abaixo a representação do sistema foguete, dada no capítulo anterior (2.23):

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u, t) \\ y = cx \end{cases} \quad (4.1)$$

onde

$$F(\xi, v, \tau) = A\xi + Bv + h(\tau) + v(\xi)$$

Como a equação de estado acima é não linear, ela será linearizada sobre a trajetória de referência dada. Se  $x_R$  e  $u_R$  que definem a trajetória de referência são tais que satisfazem a equação acima então expandindo o sistema acima em série de Taylor e desprezando-se termos de ordem maior que 1 tem-se:

$$\dot{x} = F(x_R, u_R) + \frac{\partial F(x_R, u_R)}{\partial x_R} \cdot x_e + \frac{\partial F(x_R, u_R)}{\partial u_R} \cdot u_e \quad (4.2)$$

$$y = cx$$

$$\dot{x}_e - \dot{x}_R = \frac{\partial F(x_R, u_R)}{\partial x_R} \cdot x_e + \frac{\partial F(x_R, u_R)}{\partial u_R} \cdot u_e \quad (4.3)$$

$$y = cx$$

então pode ser escrito o seguinte sistema linearizado:

$$\dot{x}_e = Ax_e + Bu_e \quad (4.4)$$

$$y = Cx_e$$

onde:

$$A = \frac{\partial F(x_R, u_R)}{\partial x_R} \quad (4.5)$$

$$B = \frac{\partial F(x_R, u_R)}{\partial u_R}$$

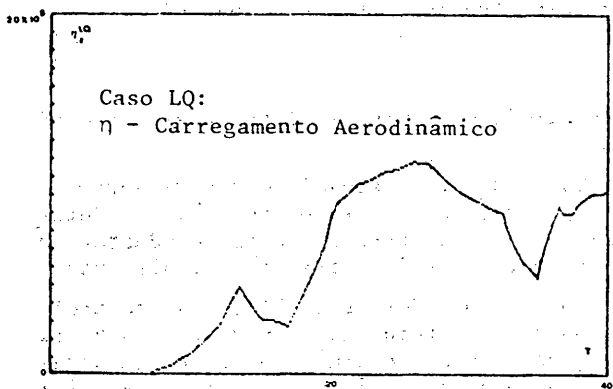
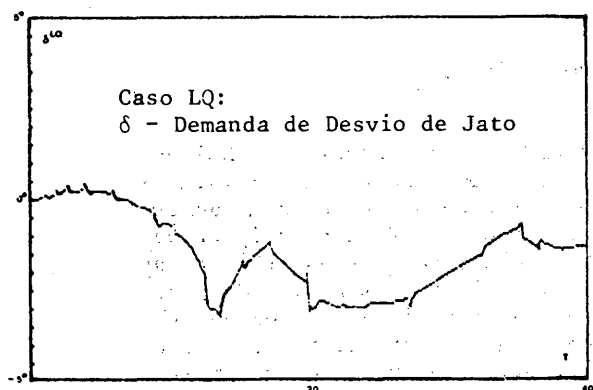
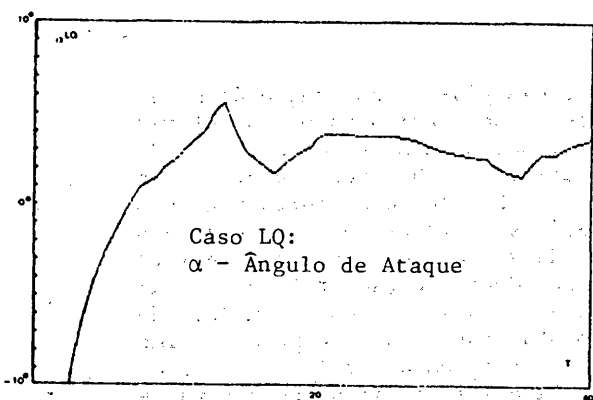
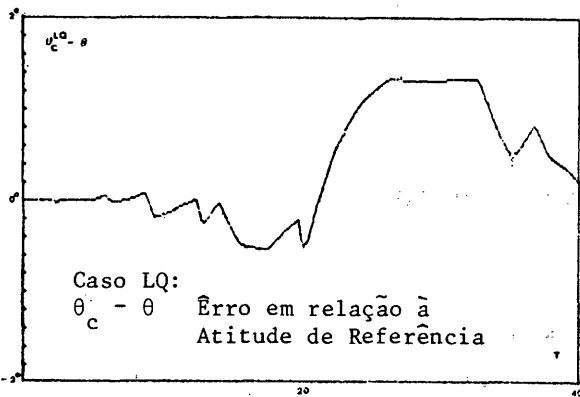
O problema agora é encontrar uma realimentação de estado do tipo:

$$u_e = -Kx_e \quad (4.6)$$

tal que minimize o seguinte índice de desempenho:

$$J = \int_0^{\infty} ((x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))) dt \quad (4.7)$$

isto é um problema de controle ótimo linear quadrático que deve ser resolvido e determinado o vetor K para os vários tempos e implementado geralmente em forma discreta utilizando um computador de bordo. A simulação deste sistema mostra os seguintes resultados:



## 5. CONCLUSÃO

Após intensivas simulações em computador digital empregando modelo completo não linear verificou-se que o controlador PI apresenta um desempenho adequado para várias missões. Entretanto, como a dinâmica em arfagem do foguete é do tipo 0, um regulador P+I faz

com que o sistema tenha erros em regime permanente nulos somente para entrada em degrau. Como a lei de atitude tem entradas do tipo rampa o sistema tem erro de regime que depende da entrada, podendo se esperar então erros maiores para entradas polinomiais de grau maiores que 1. Ainda que o controlador LQ tenha tido erros maiores que o PI na região de 24 a 35 segundos, isto se deve ao fato de que a manobra gerada pela atitude de referência foi suavizada nesta região, enquanto que o LQ teve erros menores nas outras regiões do voo onde as manobras eram mais acentuadas. Este fenômeno é devido ao peso que se atribui a cada elemento da matriz de ponderação, para cada fase do voo. Isto pode ser visto pelo carregamento aerodinâmico que foi sensivelmente menor para o LQ do que para o PI. Com outros valores da matriz de ponderação foi possível obter erros consistentemente menores que o PI com apenas um pequeno acréscimo no carregamento aerodinâmico.

O ângulo de desvio de jato demandado para o LQ também foi menor que para o PI, para executar a mesma missão. O ângulo de ataque do veículo durante toda a fase foi menor com o controlador LQ. Embora a estratégia envolva maior complexidade na implementação do algoritmo de controle, as melhorias como carregamento aerodinâmico e demanda de desvio de jato menores permitem ganhos no que tange à otimização da estrutura e do dispositivo de atuação. Face a estas perspectivas, justifica-se a continuação de trabalhos nesta área de pesquisas e desenvolvimento.

## 6. AGRADECIMENTOS

Os autores desejam manifestar os seus agradecimentos aos colegas do Instituto de Atividades Espaciais e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica, pelos inestimáveis estímulos e pela cooperação na execução deste trabalho.

O esmerado serviço de datilografia foi executado pela Srta Rosemary Rodrigues de Souza.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cornelisse, J. W.; Schöyer, H. F. R.; Wakker, H. F. - Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics. Pitman Publishing, 1979.
- Greensite, A. L. - Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems. Spartan Books, 1970.
- Hewer, G. A. - An iterative technique for computation of the steady state gains for Discrete Optimal Regulator. IEEE Trans. Automatic Control, Aug., 1971, pp. 382-383.
- Kleinman, D. L. - On an iterative technique for Riccati equation computations. IEEE Trans. Automatic Control, Feb., 1968, pp. 114-115