SBA: Controle & Automação, Vol. 1, Nº 4, pp. 298-306

REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO ATRAVÉS DE REALIMENTAÇÃO PROPORCIONAL-DERIVATIVA

Vinícius A. Armentano

Faculdade de Engenharia Elétrica
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Caixa Postal 6101 - Campinas - 13.081 - Brasil

Resumo

Para um dado sistema linear invariante no tempo, este trabalho analisa a relação entre uma lei de controle por realimentação proporcional-derivativa do estado e subespaços quase (A - B) invariantes. Em seguida, mostra-se que o critério de solvabilidade do problema de rejeição quase total de perturbação é equivalente à existência de uma lei de controle que utiliza realimentação proporcional-derivativa do estado e que resolve o problema de rejeição de perturbação.

DISTURBANCE DECOUPLING BY A PROPORTIONAL-DERIVATIVE FEEDBACK

Abstract

For a given time-invariant linear system, this paper investigates the relationship between a proportional-derivative state feedback law and almost (A - B) invariant subspaces. It is then shown that the solvability criterion for the almost disturbance decoupling problem is equivalent to the existence of a control law which uses proportional-derivative state feedback and which solves the disturbance decoupling problem.

1. INTRODUÇÃO

Um conceito fundamental dentro da abordagem geométrica de problemas de controle em sistemas lineares invariantes no tempo (Wonham, 1979) é o de subespaços (A - B) invariantes que possuem a seguinte propriedade: para qualquer condição inicial num dado subespaço quase (A - B) invariante existe um controle tal que a trajetória de estado resultante permanece arbitrariamente próxima desse subespaço.

Através do uso de subespaços quase (A-B) invariantes Willems (1981) resolveu o problema de rejeição quase total de perturbação (RQTP) que é descrito a seguir de maneira informal.

Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gd$$

$$z = Dx$$

onde u, d e z são vetores que representam, respectivamente as variáveis de controle, as perturbações desconhecidas e as variáveis a serem controladas.

O problema (RQTP) está relacionado com a existência de uma lei de controle por realimentação de estado, $u = Fx$, tal que no sistema de malha fechada a influência de d em z é arbitrariamente pequena.

A condição de solvabilidade desse problema é expressa em termos de um certo subespaço quase (A - B) invariante e uma vez que essa condição é satisfeita então o mapa F envolvido na solução é tal que $F \to \infty$.

O objetivo maior deste artigo é mostrar que para uma classe de funções de perturbações que admitem derivadas de suficiente ordem, a condição de solvabilidade do problema (RQTP) é equivalente à existência de uma lei de controle

$$u = F_1x + F_2\dot{x} + F_3d$$

tal que no sistema de malha fechada

$$(I - BF_2)\dot{x} = (A + BF_1)x + (G + BF_3)d$$

$$z = Dx$$

a matriz de transferência de d para z é zero, isto é, o problema de rejeição de perturbação é resolvido.

Uma propriedade da lei de controle acima é que o mapa $(I - BF_2)$ é singular e a matriz "pencil" (usaremos daqui por diante simplesmente a terminologia pencil) $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é regular (Gantmacher, 1959).

Sob a hipótese de controlabilidade do par (A,B) analisa-se também a configuração de zeros finitos e infinitos que pode ser obtida para o pencil acima. São apresentadas também algumas relações entre os subespaços invariantes de $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ e subespaços quase (A - B) invariantes.

Notação

Usaremos letra minúscula para vetores, maiúscula para matrizes e mapas, e "script" para subespaços e espaços vetorais.

Im e ker denotam imagem e kernel (espaço nulo) de um mapa.

Se $\mathcal{X}$ é um espaço vetorial de dimensão finita, $A:\mathcal{X} \to \mathcal{X}$ é um mapa e $\mathcal{L}$ é um subespaço A - invariante de $\mathcal{X}$ então $A|\mathcal{L}$ representa a restrição de A a $\mathcal{L}$. Se $A\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$, então $\mathcal{K}\,|\,A\,|\,\mathcal{L}$ representa a restrição de A a $\mathcal{L}$ com codomínio em $\mathcal{K}$. Se $\mathcal{L} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ são ambos A - invariantes, então $A \,||\, \mathcal{K}/\mathcal{L}$ representa o mapa induzido no espaço quociente $\mathcal{K}|\mathcal{L}$.

Para $A:\mathcal{X} \to \mathcal{X}$, dim $\mathcal{X} = n$ e $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$, $< A \,|\, \mathcal{L} >$ denota o menor subespaço A - invariante que contem $\mathcal{L}$, isto é, $<A \,|\, \mathcal{L}> = \mathcal{L} + A\mathcal{L} + \ldots + A^{n-1}\mathcal{L}$.

$\sigma(A)$ representa o conjunto de autovalores de A e $\mathcal{R}$ representa a reta real.

Se n é um inteiro positivo, então $\underline{n}$ denota o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. PRELIMINARES

Nesta seção é apresentado o material básico necessário para o desenvolvimento do artigo.

2.1. O pencil regular (sE - T)

Sejam E e T mapas de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{X}$, dim $\mathcal{X}$ = n, e seja s a variável complexa. O pencil (sE - T) é chamado regular (Gantmacher, 1959) se det $(sE - T) \neq 0$.

As principais propriedades de um pencil regular são descritas no próximo lema (Armentano, 1986a).

Lema 1 : Para o pencil regular (sE - T):

a) Existem subespaços $\mathcal{S}^*$ e $\mathcal{W}_b^*$ tais que

i) $\mathcal{S}^* \oplus \mathcal{W}_b^* = \mathcal{X}$; ii) $E\mathcal{S}^* \oplus T\,\mathcal{W}_b^* = \mathcal{X}$

iii) $T\mathcal{S}^* \subset E\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}^* \supset \ker T$;

iv) $E\,\mathcal{S}^* \subset T\,\mathcal{W}_b^*$, $\mathcal{W}_b^* \supset \ker E$

b) Existem dim $\mathcal{S}^*$ zeros finitos que são os autovalores do mapa $L: = E\,\mathcal{S}^*|T|\mathcal{S}^*$.

c) O mapa $J: = T\mathcal{W}_b^*\,|E|\,\mathcal{W}_b^*$ é nilpotente (isto é, tem autovalores nulos) e existem $p: = \dim(\ker E \cap T^{-1}(\mathrm{Im}E))$ blocos de Jordan de dimensão maior que um. Seja $n_i + 1$, $i \in \underline{p}$, a dimensão de um bloco i. Então existem p zeros infinitos de ordens n_i, $i \in \underline{p}$.

Sequências finitas de subespaços que conduzem ao cálculo de $\mathcal{S}^*$ e $\mathcal{W}_b^*$ são apresentadas em (Armentano, 1986a).

Ao pencil regular (sE - T) associamos o seguinte sistema linear generalizado (também chamado na literatura de sistema singular ou descriptor).

$$E\dot{x} = Tx \tag{1}$$

cuja resposta a uma condição inicial $x(0^-)$ é uma distribuição que consiste de uma componente exponencial e uma componente impulsiva (funcional delta e suas derivadas). Para mostrar isto, seja M um mapa não singular (veja ii) no Lema 1a) definido por

$$M^{-1}x = \begin{cases} Ex & , \; x \in \mathcal{S}^* \\ Tx & , \; x \in \mathcal{W}_b^* \end{cases}$$

Pelo Lema 1 temos então

$$MT|\mathcal{S}^* = L \quad ; \quad MT|\mathcal{W}_b^* = I$$

$$ME|\mathcal{S}^* = I \quad ; \quad ME|\mathcal{W}_b^* = J$$

ou seja, $\mathcal{S}^*$ e $\mathcal{W}_b^*$ são simultaneamente MT e ME - invariantes.

Seja $Q_s: \mathcal{X} \to \mathcal{S}^*$ a projeção em $\mathcal{S}^*$ ao longo de $\mathcal{W}_b^*$ e seja $Q_w = \mathcal{X} \to \mathcal{W}_b^*$ a projeção em $\mathcal{W}_b^*$ ao longo de $\mathcal{S}^*$.

Pré-multiplicando (1) por Q_sM e Q_wM, respectivamente, resulta na seguinte decomposição

$$\dot{x}_s = Lx_s \quad , \quad x_s = Q_s x \tag{2}$$

$$J\dot{x}_w = x_w \quad , \quad x_w = Q_w x \tag{3}$$

Verghese, Lévy e Kailath (1981) mostraram que a resposta de (3) é dada por

$$x_w = - \sum_{i=1}^{q-1} \delta^{(i-1)} J^i x_w(0^-)$$

onde q é o índice de nilpotência de J ($J^q = 0$) e $\delta^{(k)}$ representa a derivada (no sentido de distribuição) de ordem k do funcional delta.

O lema a seguir identifica o subespaço onde se situa a distribuição x_w.

Lema 2: Para qualquer $x_w(0^-) \in \mathcal{W}_b^*$, a resposta x_w pertence a $\mathcal{W}_a^*$ onde

$$\mathcal{W}_a^*: = \mathcal{W}_a^n \; ; \; \mathcal{W}_a^u = T^{-1}(\mathrm{Im}E) \cap E^{-1}(T\mathcal{W}_a^{u-1}) \; , \quad u \in \underline{n} \; ; \; \mathcal{W}_a^o = 0 \tag{4}$$

Além disso

$$T^{-1}(\mathrm{Im}E) = \mathcal{S}^* \oplus \mathcal{W}_a^*$$

Foi também mostrado em (Armentano, 1986a) que as ordens n_i, $i \in \underline{p}$ dos zeros infinitos podem ser calculadas a partir dos números

$\phi_u = \dim \mathcal{W}_a^u - \dim \mathcal{W}_a^{u-}$ e que $\sum_{i \in \underline{p}} n_i = \dim \mathcal{W}_a^*$.

Portanto, o número total de zeros (finitos e infinitos) do pencil regular (sE - T) é dado por $\dim S^* + \dim \mathcal{W}_a^*$.

2.2. Subespaços Quase (A - B) Invariantes

Nesta sub-seção são apresentados os tipos de subespaços quase (A - B) invariantes, as sequências que conduzem ao cálculo desses subespaços e algumas relações geométricas. Para uma exposição detalhada no assunto veja as referências (Trentelman, 1983 ; Willems, 1980 ; Wonham, 1979).

Considere o sistema linear

$$\Sigma : \dot{x} = Ax + Bu \tag{5}$$

$$x \in X : = \mathcal{R}^n \ , \ u \in \mathcal{U} : = \mathcal{R}^m$$

Seja K um dado subespaço de X e $\mathcal{B} : = \mathrm{Im}B$. Então

1) $\mathcal{V}_K^*$ é o maior subespaço (A - B)-invariante contido em K e é dado pela sequência

$$\mathcal{V}_K^* : = \mathcal{V}^n \ ; \ \mathcal{V}^u = K \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{u-1} + \mathcal{B}) \ , \quad u \in \underline{n} \ ; \ \mathcal{V}^o = X \tag{6}$$

2) $\mathcal{R}_K^*$ é o maior subespaço de controlabilidade contido em K e é dado pela sequência

$$\mathcal{R}_K^* : = \mathcal{R}^n \ , \ \mathcal{R}^u = \mathcal{V}_K^* \cap (A\mathcal{R}^{u-1} + \mathcal{B}) \ , \quad u \in \underline{n} \ ; \ \mathcal{R}^o = 0 \tag{7}$$

3) $\mathcal{R}_{a,K}^*$ é o maior subespaço de quase controlabilidade contido em K e é dado pela sequência

$$\mathcal{R}_{a,K}^* : = \mathcal{R}_a^n \ ; \ \mathcal{R}_a^u = K \cap (A\mathcal{R}^{u-1} + \mathcal{B}) \quad u \in \underline{n} \ ; \ \mathcal{R}_a^o = 0 \tag{8}$$

4) $\mathcal{V}_{a,K}^*$ é o maior subespaço quase (A - B) invariante contido em K e satisfaz

$$\mathcal{V}_{a,K}^* = \mathcal{V}_K^* + \mathcal{R}_{a,K}^* \tag{9}$$

5) $\mathcal{V}_{b,K}^*$ é o supremo subespaço Lp - quase (A - B) invariante e satisfaz

$$\mathcal{V}_{b,K}^* = A\mathcal{R}_{a,K}^* + \mathcal{B} + \mathcal{V}_K^* \tag{10}$$

A seguir introduz-se uma sequência de subespaços com o objetivo de obter decomposições para $\mathcal{V}_{a,K}^*$ e $\mathcal{V}_{b,K}^*$. Para tal seja $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ qualquer subespaço tal que

$$\mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{V}_K^* \oplus \overline{\mathcal{B}} \tag{11}$$

e considere o subespaço $\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$ definido pela seguinte sequência

$$\overline{\mathcal{R}}_{a,K} : = \overline{\mathcal{R}}_a^n \ ; \ \overline{\mathcal{R}}_a^u = K \cap (A\overline{\mathcal{R}}_a^{u-1} + \overline{\mathcal{B}}) \ , \quad u \in \underline{n} \ ; \ \overline{\mathcal{R}}_a^o = 0 \tag{12}$$

Em Armentano (1984) foi provado que $\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$ é um subespaço de quase controlabilidade.

Lema 3:

a) $\mathcal{R}_a^u = \overline{\mathcal{R}}_a^u + \mathcal{R}^u$

b) $\overline{\mathcal{R}}_a^u \cap \mathcal{V}_K^* = 0$

Prova: As relações acima apareceram em Commault e Dion (1981) e podem ser provadas facilmente por indução em u.

□

Como $\mathcal{R}_K^* \subset \mathcal{V}_K^*$, obtemos então de (9) e do lema 3.

$$\mathcal{V}_{a,K}^* = \mathcal{V}_K^* \oplus \overline{\mathcal{R}}_{a,K} \tag{13}$$

Do lema 3b também temos que

$$\mathcal{V}_{\overline{\mathcal{R}}_{a,K}}^* = 0 \tag{14}$$

ou seja, $\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$ é um subespaço de quase controlabilidade com a propriedade de que nesse subespaço não existem trajetórias geradas por Σ. Todas as "trajetórias" nesse subespaço são geradas por controles impulsivos (funcional delta e suas derivadas).

De (6) e (14) obtemos

$$\overline{\mathcal{R}}_{a,K} \cap A^{-1}\mathcal{B} = 0$$

o que implica

$$A\overline{\mathcal{R}}_{a,K} \cap \mathcal{B} = 0 \tag{15}$$

e

$$\ker A \cap \overline{\mathcal{R}}_{a,K} = 0 \tag{16}$$

Do lema 3a e o fato de que $\mathcal{R}_K^* \subset \mathcal{V}_K^*$ obtemos então de (10) que

$$\mathcal{V}_{b,K}^* = A\overline{\mathcal{R}}_{a,K} + \mathcal{B} + \mathcal{V}_K^*$$

Suponha agora que $A\overline{\mathcal{R}}_{a,K} \cap (\mathcal{B} + \mathcal{V}_K^*) \neq 0$. Então $Ar = b + v$, para algum $r \in \overline{\mathcal{R}}_{a,K}$, $b \in \mathcal{B}$ e $v \in \mathcal{V}_K^*$, o que implica $r \in K \cap A^{-1}(\mathcal{V}_K^* + \mathcal{B}) = \mathcal{V}_K^*$ e portanto pelo Lema 3b temos que r = 0. De (11) e (15) temos então

$$\mathcal{V}_{b,K}^* = \overline{\mathcal{R}}_{b,K} \oplus \mathcal{V}_K^* \tag{17}$$

onde

$$\overline{\mathcal{R}}_{b,K} : = A\overline{\mathcal{R}}_{a,K} \oplus \overline{\mathcal{B}}$$

Note de (12) que

$$\overline{\mathcal{R}}_{a,K} = K \cap \overline{\mathcal{R}}_{b,K} \tag{18}$$

3. LEIS PD REGULARES E SUBESPAÇOS QUASE (A - B) INVARIANTES

Nesta seção são estabelecidas algumas conexões interessantes entre uma lei proporcional-derivativa (PD), $u = F_1x + F_2\dot{x}$, aplicada ao sistema linear Σ, e subespaços quase (A - B) invariantes.

Definição: Uma lei PD, $u = F_1x + F_2\dot{x}$, é chamada regular se o mapa $(I - BF_2)$ é singular e o pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é regular.

O teorema a seguir apresenta características estruturais do sistema de malha fechada

$$\Sigma_{mf}: \ (I - BF_2)\dot{x} = (A + BF_1)x$$

relativo a um dado subespaço quase (A - B) invariante. Para enunciar o teorema precisamos considerar os seguintes conjuntos de números complexos.

Seja Λ_r um conjunto simétrico de dim $\mathcal{R}_K^*$ números complexos e seja $F(\mathcal{V}_K^*)$ a família de mapas F tais que $(A + BF)\mathcal{V}_K^* \subset \mathcal{V}_K^*$.

Então existe (Wonham, 1979) $F_v: \mathcal{V}_K^* \subset \mathcal{U}$, $F_v \in F(\mathcal{V}_K^*)$ tal que

$$\sigma\left[(A + BF_v) \mid \mathcal{V}_K^*\right] = \Lambda_r \cup \Lambda_z \qquad (19)$$

onde $\Lambda_z: = \sigma\left[(A + BF_v) \| \mathcal{V}_K^* / \mathcal{R}_K^*\right]$ é fixo, $\forall F \in F(\mathcal{V}_K^*)$.

Seja Λ_c um conjunto simétrico de n - dim $\mathcal{V}_{b,K}^*$ números complexos. Trentelman (1983,1985) mostrou que se o par (A,B) é controlável então existe um subespaço (A - B) invariante e um mapa $F_c: \mathcal{C} \to \mathcal{U}$, $F_c \in F(\mathcal{C})$ tais que

$$\mathcal{V}_{b,K}^* \oplus \mathcal{C} = \mathcal{X} \qquad (20)$$

e

$$\sigma\left[(A + BF_c) \mid \mathcal{C}\right] = \Lambda_c \qquad (21)$$

Considere também a matriz de transferência $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$, onde $C: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um mapa sobrejetivo com ker $C = \mathcal{K}$. A estrutura de zeros infinitos de G(s) pode ser descrita em termos de subespaços quase (A - B) invariantes (Armentano, 1984; Commault e Dion, 1982). Se $f: = \dim \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{K}$, então G(s) tem f zeros infinitos de ordem $m_i + 1$, $m_i \geq 1$, $i \in \underline{f}$ e $\dim \overline{\mathcal{B}} - \dim \overline{\mathcal{B}} \cap \mathcal{K}$ zeros infinitos de ordem unitária. As ordens m_i, $i \in \underline{f}$ são determinadas a partir de $\dim \overline{\mathcal{R}}_a^u - \dim \overline{\mathcal{R}}_a^{u-1}$, $u \in \underline{n}$.

Pode-se mostrar também (Corfmat e Morse, 1976) que se o par (A,B) é controlável e o par (C,A) é observável então o conjunto Λ_z definido acima coincide com o conjunto de zeros finitos de G(s).

Teorema 1: Suponha que o par (A,B) é controlável e considere os subespaços $\mathcal{V}_{a,K}^*$ e $\mathcal{V}_{b,K}^*$. Existe uma lei PD regular tal que a resposta Σ_{mf} permanece em $\mathcal{V}_{a,K}^*$, $\forall x(0^-) \in \mathcal{V}_{b,K}^*$. Além disso o pencil $s(I - BF_1) - (A + BF_2)$ possui:

i) os conjuntos $\Lambda_c \cup \Lambda_r \cup \Lambda_z$ como seus zeros finitos

ii) f zeros infinitos de ordem m_i, $i \in \underline{f}$.

Prova: A prova é organizada por passos.

Passo 1: Decomposição do espaço de estado

De (17) e (20)

$$\mathcal{X} = \mathcal{V}^\dagger \oplus \overline{\mathcal{R}}_{b,K} \qquad (22)$$

onde

$$\mathcal{V}^\dagger: = \mathcal{V}_K^* \oplus \mathcal{C}$$

que consiste a decomposição desejada.

Passo 2: Definição dos mapas F_1 e F_2.

Seja $q: = \dim \overline{\mathcal{B}}$ e $\{\bar{b}_i\}$, $i \in \underline{q}$, uma base de $\overline{\mathcal{B}}$. Então

$$\bar{b}_i = Bu_i, \ i \in \underline{q}, \text{ para algum } u_i \in \mathcal{U}. \qquad (23)$$

De (16), seja $l: = \dim A\overline{\mathcal{R}}_{a,K} = \dim \overline{\mathcal{R}}_{a,K}$. Se $\{\bar{r}_i\}$, $i \in \underline{l}$, é uma base de $\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$, então $\{A\bar{r}_i\}$, $i \in \underline{l}$, é uma base de $A\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$.

Defina $F_r: \overline{\mathcal{R}}_{b,K} \to \mathcal{U}$ por

$$F_r\bar{b}_i = u_i, \ i \in \underline{q} \quad \text{e} \quad F_rA\bar{r}_i = 0, \ i \in \underline{l}$$

Daí

$$(I - BF_r)\,\bar{b}_i = 0$$

e (24)

$$(I - BF_r)\,A\bar{r}_i = A\bar{r}_i$$

Defina $F_2: \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ por

$$F_2 | \overline{\mathcal{R}}_{b,K} = F_r$$

$$F_2 | \mathcal{V}^\dagger = 0 \qquad (25)$$

Passamos em seguida à definição de F_1. Para tal seja $\hat{F}$ um mapa especificado por

$$\hat{F} | \mathcal{C} = F_c \ ; \ \hat{F} | \mathcal{V}_K^* = F_v \ ; \ \hat{F} | \overline{\mathcal{R}}_{b,K} = 0$$

onde F_c e F_v são dados por (21) e (19) respectivamente.

Usando a decomposição (22) obtemos então

$$\mathrm{Mat}(A + B\hat{F}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \mathrm{Mat}(I - BF_2) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E_{22} \end{bmatrix}$$

onde

$$A_{11} = \mathrm{Mat}(A + B\hat{F}) | \mathcal{V}^\dagger \ ; \ A_{22} = \mathrm{Mat}(A + B\hat{F}) \| \mathcal{X}/\mathcal{V}^\dagger$$

$$\dim I = \dim \mathcal{V}^\dagger \ ; \ E_{22} = \mathrm{Mat}(I - BF_2) | \overline{\mathcal{R}}_{b,K}$$

Portanto na decomposição (22) o pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é representado por

$$\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sE_{22} - A_{22} \end{bmatrix} \tag{26}$$

A representação (26) mostra que se A_{22} é não singular então o pencil é regular (mostraremos depois que a regularidade do pencil também implica A_{22} não singular).

Nosso próximo passo consiste da definição de F_1 de forma que o mapa $(A + BF_1)||X/V^{\dagger}$ seja não singular. Para isto note que

$$\overline{R}_{b,K} = A\overline{R}_{a,K} \oplus \overline{B} = \overline{R}_{a,K} \oplus \tilde{R}_{b,K}$$

onde $\tilde{R}_{b,K}$ é qualquer subespaço que fornece uma soma direta.

Considere as decomposições

$$X = V^{\dagger} \oplus \overline{R}_{a,K} \oplus \tilde{R}_{b,K} \tag{27}$$

$$X = V^{\dagger} \oplus A\overline{R}_{a,K} \oplus \overline{B} \tag{28}$$

e note que $\dim \tilde{R}_{b,K} = \dim \overline{B}$. Seja $\overline{U}$ a matriz formada pelos vetores u_i, $i \in q$, em (23) e seja $\overline{P}: X \to \overline{B}$ a projeção em $\overline{B}$ ao longo de $V^{\dagger} \oplus A\overline{R}_{a,K}$. Como $\overline{P}B\overline{U}$ é não singular, segue-se que o par $(\overline{P}A|\tilde{R}_{b,K}, \overline{P}B\overline{U})$ é controlável e portanto existe $\tilde{F}: \tilde{R}_{b,K} \to \overline{U}$ tal que $\overline{P}(A\tilde{R}_{b,K} + B\overline{U}\tilde{F})$ é não singular.

Defina então

$$F_1|V^{\dagger} = \hat{F}|V^{\dagger} \quad ; \quad F_1|\overline{R}_{a,K} = 0 \quad ;$$

$$F_1|\tilde{R}_{b,K} = \overline{U}\tilde{F} \tag{29}$$

A partir das decomposições (27) e (28) pode-se concluir então que $(A + BF_1)||X/V$ é não singular.

Passo 3: Validação geométrica

Para que os subespaços $V^{\dagger}$ e $\overline{R}_{b,K}$ sejam identificados com os subespaços S^* e W_b^* no Lema 1a devemos ter

i) $V^{\dagger} \oplus \overline{R}_{b,K} = X$

É verdadeiro por definição

ii) Note de (25) que $(I - BF_2)V^{\dagger} = V^{\dagger}$ e represente $(A + BF_1)$ na decomposição (22). Daí

$$\mathrm{Mat}(A + BF_1) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{30}$$

onde $A_{11} = \mathrm{Mat}(A + BF_1)\,|\,V^{\dagger}$

e $A_{22} = \mathrm{Mat}(A + BF_1)\,||\,X/V^{\dagger}$

que é não singular por definição.

Daí para $0 \neq s \in \overline{R}_{b,K}$ temos

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}\,s \\ A_{22}\,s \end{bmatrix} \not\in V^{\dagger} \tag{31}$$

pois $A_{22}\,s \neq 0$. De (31) segue-se $\ker(A + BF_1) \subset V^{\dagger}$. Portanto

$$X = V^{\dagger} \oplus (A + BF_1)\overline{R}_{b,K} \tag{32}$$

iii) De (25) e (29) segue-se que

$$(I - BF_2)V^{\dagger} = V^{\dagger} \supset (A + BF_1)V^{\dagger}$$

Já foi mostrado em ii) que

$V^{\dagger} \supset \ker(A + BF_1)$

iv) Para qualquer $F_2: X \to U$, $\ker(I - BF_2) \subset B$. Mas de (25) $F_2|(B \cap V_K^*) = 0$. Então de (24) $\ker(I - BF_2) = \overline{B} \subset \overline{R}_{b,K}$

A partir da definição de F_2 é fácil verificar que

$$\mathrm{Im}(I - BF_2) = A\overline{R}_{a,K} \oplus V^{\dagger} \tag{33}$$

Além disso de (29)

$$(A + BF_1)\overline{R}_{b,K} \supset (A + BF_1)\overline{R}_{a,K} =$$

$$= A\overline{R}_{a,K} = (I - BF_2)\overline{R}_{b,K}$$

o que verifica iv) no Lema 1a.

Passo 4: Os zeros do pencil

$s(I - BF_2) - (A + BF_1)$

De (33) segue-se que o número de zeros do pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é igual a $\dim \overline{R}_{a,K} + \dim V^{\dagger}$. Vamos verificar a seguir a estrutura de zeros infinitos desse pencil.

Mostremos primeiro que

$$(A + BF_1)^{-1}\,\mathrm{Im}(I - BF_2) = \overline{R}_{a,K} + V^{\dagger} \tag{34}$$

isto é,

$$\overline{R}_{a,K} \oplus V^{\dagger} = \{x\,|\,(A + BF_1)x \in A\overline{R}_{a,K} + V^{\dagger}\}$$

Da definição de F_1 temos que $\overline{R}_{a,K} \oplus V^{\dagger} \subset (A + BF_1)^{-1}\,\mathrm{Im}(I - BF_2)$. Considere agora a decomposição (27) e seja $x = \tilde{r} + \overline{r} + v$, com $\tilde{r} \in \tilde{R}_{b,K}$, $\overline{r} \in \overline{R}_{a,K}$ e $v \in V^{\dagger}$. Então se $x \in (A + BF_1)^{-1}\,\mathrm{Im}(I - BF_2)$ devemos ter $(A + BF_1)x = A\overline{r}_1 + v_1$, para algum $\overline{r}_1 \in \overline{R}_{a,K}$ e algum $v_1 \in V^{\dagger}$.

Da definição de F_1 obtemos que $(A + BF_1)\tilde{r} \in A\overline{R}_{a,K} + V^{\dagger}$. Portanto, para algum $\overline{r}_2 \in \overline{R}_{a,K}$ e algum $v_2 \in V^{\dagger}$ temos que $(A + BF_1)(\tilde{r} - \overline{r}_2) = v_2$. Mas de (32) $v_2 = \tilde{r} - \overline{r}_2 = 0$, o que implica $\tilde{r} \in \overline{R}_{a,K}$ e portanto $\tilde{r} = 0$ o que implica que (34) é verdadeiro.

É fácil agora verificar que

$$\bar{\mathcal{B}} \cap (A + BF_1)^{-1}\mathrm{Im}(I - BF_2) = \bar{\mathcal{R}}_{a,K} \cap \bar{\mathcal{B}}$$

Portanto, das sequências (4) e (12) temos que $\mathcal{W}_a^1 = \bar{\mathcal{R}}_a^1$ e se $\mathcal{W}_a^{u-1} = \bar{\mathcal{R}}_a^{u-1}$, então como $\ker F_1 \supset \bar{\mathcal{R}}_{a,K}$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_a^u &= (\mathcal{V}^\dagger \oplus \bar{\mathcal{R}}_{a,K}) \cap (I - BF_2)^{-1} A\bar{\mathcal{R}}_a^{u-1} \\ &= (\mathcal{V}^\dagger \oplus \bar{\mathcal{R}}_{a,K}) \cap (A\bar{\mathcal{R}}_a^{u-1} + \bar{\mathcal{B}}) \\ &= \bar{\mathcal{R}}_{a,K} \cap (A\bar{\mathcal{R}}_a^{u-1} \oplus \bar{\mathcal{B}}) = \bar{\mathcal{R}}_a^u\end{aligned}$$

Como $\bar{\mathcal{R}}_a^u = \mathcal{W}_a^u$, $u \in \underline{n}$, segue-se que o pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ tem f zeros infinitos de ordens m_i, $i \in \underline{f}$.

Consequentemente, como esperado, os zeros finitos de $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ coincidem com os autovalores do mapa $L := (A + BF_1)| \mathcal{V}^\dagger$ que são dados por $\sigma(L) = \Lambda_r \cup \Lambda_z \cup \Lambda_c$.

Seja $J := (A + BF_1)\bar{\mathcal{R}}_{b,K}| (I - BF_2)|\bar{\mathcal{R}}_{b,K}$. Então o sistema Σ_{mf} pode se decomposto como

$$\dot{x}_v = Lx_v \quad , \quad x_v \in \mathcal{V}^\dagger$$

$$J\dot{x}_r = x_r \quad , \quad x_r \in \bar{\mathcal{R}}_{b,K}$$

É claro que para todo $x_v(0^-) \in \mathcal{V}_K^*$ resulta em $x_v(t) \in \mathcal{V}_K^*$, $t \geqslant 0$. Do lema 2 temos que para todo $x_r(0^-) \in \bar{\mathcal{R}}_{b,K}$ a distribuição x_r resultante permanece em $\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$. Portanto, para todo $x(0^-) \in \mathcal{V}_K^* \oplus \bar{\mathcal{R}}_{b,K} = \mathcal{V}_{b,K}^*$ a resposta de Σ_{mf} permanece em $\mathcal{V}_K^* \oplus \bar{\mathcal{R}}_{a,K} = \mathcal{V}_{a,K}^*$.

<u>Observação</u>: De (26) e (30) obtemos

$$|s(I - BF_2) - (A + BF_1)| = |sI - A_{11}|\,|sE_{22} - A_{22}|$$

Como o pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é regular e tem dim $\mathcal{V}^\dagger$ zeros finitos segue-se que $|sE_{22} - A_{22}| \neq 0$, o que implica que o pencil $(sE_{22} - A_{22})$ tem somente zeros infinitos e portanto $A_{22} = \mathrm{Mat}(A + BF_1) \| \mathcal{X}/\mathcal{V}^\dagger$ tem que ser não singular.

<u>Corolário 1</u>: Seja K um dado subespaço e seja $\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$ o subespaço calculado pela sequência (12). Então existe um mapa de realimentação da derivada $F : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ tal que

a) $(I - BF_2)\,\bar{\mathcal{R}}_{a,K} \subset A\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$

b) $\bar{\mathcal{R}}_{a,K} = K \cap (I - BF_2)^{-1} A\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$

<u>Prova</u>: Note de (24) que

$$(I - BF_2)\bar{\mathcal{R}}_{a,K} \subset (I - BF_2)\bar{\mathcal{R}}_{b,K} = A\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$$

o que mostra a). O item b) decorre a sequência (12) e da definição de F_2.

□

É interessante notar que b) caracteriza o subespaço $\mathcal{R}_{a,K}$ por uma realimentação da derivada do estado enquanto que a) estabelece um tipo de invariância para esse tipo de subespaço. Cabe ressaltar que esse subespaço não admite invariância sob realimentação de estado (veja (14)). O resultado do corolário anterior pode ser interpretado da seguinte maneira: no subespaço $\mathcal{R}_{a,K}$ as velocidades das "trajetórias" geradas por controles impulsivos são infinitas. Portanto a entidade importante a ser realimentada é a derivada e não o estado.

4. <u>REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO</u>

Considere o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gd \qquad (35)$$

$$z = Dx$$

$$x \in \mathcal{X} := R^n \;;\; u \in \mathcal{U} := R^m \;;$$

$$d \in \mathcal{D} := R^s \;;\; z \in \mathcal{Z} := R^l$$

O vetor d em (35) representa perturbações desconhecidas e o vetor z representa as variáveis a serem controladas.

O problema de rejeição de perturbação (RP) está relacionado com a seguinte questão: existe uma lei de controle $u = F_1 x$ tal que a resposta do sistema em malha fechada

$$\dot{x} = (A + BF_1)x + Gd \;,\; x(0) = 0 \qquad (36)$$

pertence a $K := \ker D$, $t \geqslant 0$, para qualquer vetor d de funções contínuas por partes?

O problema acima foi resolvido por Wonham (1979) que mostrou que o problema (RP) tem solução se e somente se

$$\mathrm{Im}\,G \subset \mathcal{V}_K^* \qquad (37)$$

Uma variante do problema (RP) foi introduzida por Bhattachrayya (1975) e é chamada de rejeição de perturbação com "feedforward". Esse problema consiste em achar uma lei de controle $u = F_1x + F_3d$ tal que a resposta do sistema

$$\dot{x} = (A + BF_1)x + (G + BF_3)d \;,\; x(0) = 0$$

pertença a K, $t \geqslant 0$. Foi mostrado que tal lei existe se e somente se

$$\mathrm{Im}G \subset \mathcal{V}_K^* + \mathcal{B} \qquad (38)$$

Willems (1981) introduziu uma versão relaxada do problema (RP) no sentido de que as variáveis z tenham norma L_p arbitrariamente pequena. Esse problema é chamado de problema de rejeição quase total de perturbação (RQTP) que tem a seguinte formulação: existe F_1 tal no sistema de malha fechada $\|z\|_{L_p} < \varepsilon \|d\|_{L_p}$, $\forall \varepsilon > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$?

Foi mostrado que esse problema tem solução se e somente se

$$\operatorname{Im} G \subset \mathcal{V}^*_{b,K} \tag{39}$$

e uma vez que a condição é satisfeita então o mapa F que resolve o problema é tal que $F_1 \to \infty$, quando $\varepsilon \to 0$.

O problema (RQTP) também foi abordado por Armentano (1986b) que mostrou que sob a condição (39) existe uma lei PD, $u = F_1 x + F_2 \dot{x}$, tal que no sistema de malha $\|z\|_{L_p} \leq \varepsilon \|d\|_{L_p}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $1 \leq p \leq \infty$. Além disso os mapas F_1 e F_2 permanecem finitos quando $\varepsilon \to 0$.

É interessante notar também que a condição (39) corresponde a um tipo de lei de controle que resolve exatamente o problema(RP). Willems (1982) mostrou que a lei

$$u = Fx + \sum_{i=0}^{N} F_i\, d^{(i)} \tag{40}$$

onde $d^{(i)}$ representa a derivada de ordem i de d, resolve o problema (RP) se e somente se (39) é verdadeiro. É claro que a lei (40) é aplicável quando $d \in C^N$, onde C^N representa a classe de funções com derivadas até ordem N. Pode-se também mostrar que $N+1$ é a maior ordem de um zero infinito de $D(sI - A)^{-1} B$.

Uma questão natural se apresenta agora : o que se pode conseguir em termos de rejeição de perturbação através de uma lei PD regular como aquela obtida no teorema 1? O objetivo desta seção é examinar alguns aspectos desta questão quando $d \in C^N$.

Considere a lei PD regular, $u = F_1 x + F_2 \dot{x}$ obtida no teorema 1 e aplique-a ao sistema (35). Obtemos então o seguinte sistema linear generalizado

$$(I - BF_2)\dot{x} = (A + BF_1)x + Gd \tag{41a}$$

$$z = Dx \tag{41b}$$

De maneira semelhante a (3), defina o mapa inversível M

$$M^{-1}x = \begin{cases} (I - BF_2)x = x & , \quad x \in \mathcal{V}^{\dagger} \\ (A + BF_1)x & , \quad x \in \bar{\mathcal{R}}_{b,K} \end{cases} \tag{42}$$

Seja $Q_v : \mathcal{X} \to \mathcal{V}^{\dagger}$ a projeção em $\mathcal{V}^{\dagger}$ ao longo de $\bar{\mathcal{R}}_{b,K}$ e $Q_r : \mathcal{X} \to \bar{\mathcal{R}}_{b,K}$ a projeção em $\bar{\mathcal{R}}_{b,K}$ ao longo de $\mathcal{V}^{\dagger}$. Pré-multiplicando (41a) por $Q_v M$ e $Q_r M$, respectivamente, resulta na seguinte decomposição

$$\dot{x}_1 = Lx_1 + G_1 d$$

$$J\dot{x}_2 = x_2 + G_2 d$$

onde

$$x_1 = Q_v x \quad ; \quad x_2 = Q_r x$$

$$L := \operatorname{Mat}(A + BF_1)|\mathcal{V}^{\dagger} \; ; \; J = \operatorname{Mat} M(I - BF_2)|\bar{\mathcal{R}}_{b,K}$$

$$G_1 = Q_v MG \quad ; \quad G_2 = Q_r MG$$

Diremos que as perturbações em (41) são rejeitadas se com $x(0^-) = 0$, obtemos $z(t) = 0$, $\forall t \geq 0$, para todas as perturbações $d \in C^N$.

Uma condição suficiente para isto ocorrer é dada a seguir.

Teorema 2: Seja $d \in C^N$. Suponha que $\operatorname{Im} G \subset \mathcal{V}^*_K \oplus A\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$ para algum subespaço $\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$ como mostrado em (12) e suponha que o par (A,B) é controlável. Existe uma lei PD regular $u = F_1 x + F_2 \dot{x}$ tal que a resposta do sistema de malha fechada

$$(I - BF_2)\dot{x} = (A + BF_1)x + Gd \;\; ; \;\; x(0^-) = 0$$

pertence a K, $t \geq 0$, e tal que a estrutura de zeros do pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é dada pelo Teorema 1.

Prova: Considere a lei PD regular dada pelo Teorema 1 e seja $g \in \operatorname{Im}$. Como $\ker F_1 \supset \bar{\mathcal{R}}_{a,K}$ e $\ker F_2 \supset \mathcal{V}^{\dagger}$, podemos escrever

$$g = v + A\bar{r} = (I - BF_2)v + (A + BF_1)\bar{r} \; , \quad v \in \mathcal{V}^*_K,\; \bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}_{a,K}$$

Portanto, $Mg = v + \bar{r}$, e como $\bar{r} \in \bar{\mathcal{R}}_{b,K}$ temos

$$\operatorname{Im} G_1 = Q_v M \operatorname{Im} G \subset \mathcal{V}^*_K \tag{44a}$$

e

$$\operatorname{Im} G_2 = Q_r M \operatorname{Im} G \subset \mathcal{R}^*_{a,K} \tag{44b}$$

Seja $\mathcal{V}_d \subset \mathcal{V}^{\dagger}$ o subespaço influenciado pelas perturbações em $\mathcal{V}^{\dagger}$. É fácil ver que $\mathcal{V}_d = \langle A + BF_1 | \operatorname{Im} G_1 \rangle$, que é claramente um subespaço (A - B) invariante. Como $F_1 \in F(\mathcal{V}^*_K)$ obtemos então de (44a) que $\mathcal{V}_d \subset \mathcal{V}^*_K$, isto é, a resposta do sub-sistema (43a) pertence a K.

Pelo Corolário 1a resulta que

$M(I - BF_2)\bar{\mathcal{R}}_{a,K} \subset M(A + BF_1)\bar{\mathcal{R}}_{a,K}$ e portanto

$$J\bar{\mathcal{R}}_{a,K} \subset \bar{\mathcal{R}}_{a,K} \tag{45}$$

Considere agora o sub-sistema (43b). Campbell (1980) mostrou que para um dado $d \in C^N$ corresponde uma única solução diferenciável x_2 tal que

$$x_2(t) = -\sum_{i=0}^{n-1} J^i G_2\, d^{(i)}(t) \;, \; t \geq 0$$

Cobb (1980) mostrou que o subespaço influenciado por $d^{(i)}(t)$, $i \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ é dado por

$$\langle J | \operatorname{Im} G_2 \rangle = \operatorname{Im} G_2 + J \operatorname{Im} G_2 + \ldots + J^{N-1} \operatorname{Im} G_2$$

De (44b) e (45) segue-se que $\langle J | \operatorname{Im} G_2 \rangle \subset \bar{\mathcal{R}}_{a,K}$. Consequentemente, a resposta total $x_1(t) + x_2(t)$, $t \geq 0$, pertence a $\mathcal{V}^*_K \oplus \bar{\mathcal{R}}_{a,K} = \mathcal{V}^*_{a,K} \subset K$.

□

Comentário: A condição $\mathrm{Im}G \subset \mathcal{V}_K^* + \overline{\mathcal{R}}_{a,K}$ é difícil de ser verificada, pois existe uma infinidade de subespaços $\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$ de acordo com o subespaço $\overline{\mathcal{B}}$ escolhido em (11).

O teorema a seguir mostra que se adicionarmos uma componente "feedfoward" à lei de controle do Teorema 1, então a condição (39) é equivalente à solução do problema de rejeição de perturbação.

Teorema 3: Seja $d \in C^N$, $\mathrm{Im}G \subset \mathcal{V}_{b,K}^*$ e (A,B) controlável. Existe uma lei

$$u = F_1 x + F_2 \dot{x} + F_3 d \tag{46}$$

tal que a resposta do sistema de malha fechada

$$(I - BF_2)\dot{x} = (A + BF_1)x + (G + BF_3)d \ , \quad x(0^-) = 0 \tag{47}$$

pertence a K, $t \geq 0$ e o pencil $s(I - BF_2) - (A + BF_1)$ é regular com estrutura de zeros dada pelo Teorema 1.

ii) Suponha agora que $d \in C^n$ e que existe uma lei do tipo (46) tal que a resposta de (47) pertença a K, $t \geq 0$, e o pencil

$$s(I - BF_2) - (A + BF_1)$$

é regular. Então $\mathrm{Im}G \subset \mathcal{V}_{b,K}^*$.

Prova:

i) Considere os mapas F_1 e F_2 do Teorema 1 e seja $\{d_1, \dots, d_r, d_{r+1}, \dots, d_s\}$ uma base de $\mathcal{D}$ tal que $\mathrm{Im}G = \mathrm{span}\{Gd_i\}$, $i \in r$. Como $\mathrm{Im}G \subset \mathcal{V}_{b,K}^* = \mathcal{V}_K^* \oplus A\overline{\mathcal{R}}_{a,K} \oplus \overline{\mathcal{B}}$, segue-se que

$Gd_i = v_i + A\bar{r}_i + Bu_i$, $i \in \underline{r}$, para $v_i \in \mathcal{V}_K^*$, $\bar{r}_i \in \overline{\mathcal{R}}_{a,K}$, $u_i \in \mathcal{U}$.

Defina $F_3 \colon \mathcal{D} \to \mathcal{U}$ por

$$F_3 d_i = -u_i \ , \ i \in \underline{r}$$

$$F_3 d_i = 0 \ , \ i \in \{r+1, \dots, s\}$$

Então

$$(BF_3 + G)d_i = v_i + A\bar{r}_i \ , \ i \in \underline{r}$$

o que implica

$$\mathrm{Im}(BF_3 + G) \subset \mathcal{V}_K^* + A\overline{\mathcal{R}}_{a,K}$$

O resto da prova é idêntico à prova do Teorema 2.

□

Nota: Devido à limitação de espaço a prova de ii) do teorema anterior será omitida.

Comentários

1) É claro que a condição (39) é mais facilmente satisfeita do que as condições (37) e (38). No entanto, o preço pago para se obter rejeição de perturbação sob (39) é a medida de $\dot{x}$ que pode não ser factível em certas situações.

2) Pode-se pensar que uma lei PD tal que o mapa $(I - BF_2)$ é não singular pode introduzir uma nova perspectiva em termos do problema (RP). Isto não é verdade. É fácil ver que se as perturbações no sistema

$$\dot{x} = (I - BF_2)^{-1}(A + BF_1)x + (I - BF_2)^{-1} Gd$$

$$z = Dx$$

são rejeitadas, então

$$\mathcal{V}_d := \langle (I - BF_2)^{-1}(A + BF_1) \,|\, \mathrm{Im}(I - BF_2)^{-1}G \rangle \subset K$$

é um subespaço (A - B) invariante e portanto $\mathcal{V}_d \subset \mathcal{V}_K^*$.

No entanto uma lei PD tal que $(I - BF_2)$ é não singular tem importância no problema (RQTP) (Armentano, 1986b).

Observação: uma versão resumida deste artigo apareceu em Armentano (1985).

REFERÊNCIAS

Armentano, V.A. (1984). Sliding Subspaces and the Assignment of Asymptotes for Invertible Linear Systems, Mat. Aplic. Comp., Vol. 3 : 281 - 302.

Armentano, V.A. (1985). Exact Disturbance Decoupling by a Proportional - Derivative State Feedback Law, 24th IEEE Conf. on Decision and Control, Fort Lauderdale, Florida.

Armentano, V.A. (1986a). The pencil (sE - A) and Controllability - Observability for Generalized Linear Systems: A Geometric Approach, SIAM J. Contr. and Optimiz., Vol. 24 : 616 - 638.

Armentano, V.A. (1986b). Almost Disturbance Decoupling by a Proportional - Derivative State Feedback law, Automatica, Vol. 22: 449 - 456.

Bhattachrayya, S.P. (1975). Compensator Design Based on the Invariance Principle, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-20: 708 - 711.

Campbell, S.L. (1980). Singular Systems of Differential Equations, Pitman, London.

Cobb, D.J. (1980). Descriptor Variable and Generalized Singularly Perturbed Systems : A Geometric Approach, Ph.D. Dissertation, University of Illinois, Urbana.

Commault, C.; Dion, J.M. (1981). Structure at Infinity of Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, 20th IEEE Conf. on Decision and Control, San Diego, California.

Commault, C.; Dion, J.M. (1982). Structure at Infinity of Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC - 27 : 693 - 696.

Corfmat, J.P.; Morse, A.S. (1976). Control of Linear Systems Through Specified Imput Channels, SIAM J. Contr. and Optimiz., Vol. 14 : 163 - 175.

Gantmacher, F.R. (1959). The Theory of Matrices, Vol. II, Chelsea, New York.

Trentelman, H. (1983). On the Assignability of Infinite Root Loci in Almost Disturbance Decoupling, Int. J. Contr., Vol. 38 : 147 - 167.

Trentelman, H. (1985). Almost Invariant Subspaces and High Gain Feedback, Doctoral Dissertation, Univ. of Groningen, The Netherlands.

Verghese, G.C. ; Lévy, B.C. ; Kailath, T. (1981). A Generalized State Space for Singular Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC - 26 : 811 - 831.

Willems, J.C. (1980). Almost A (mod $\mathcal{B}$) - Invariant Subspaces, Astérisque, Vol. 75 - 76 : 239 - 248.

Willems, J.C. (1981). Almost Invariant Subspaces: An Approach to High Gain Feedback Design - Part I : Almost Controlled Invariant Subspaces, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC - 26 : 235 - 252.

Willems, J.C. (1982). Feedforward Control, PID Control Laws, and Almost Invariant Subspaces, Syst. Contr. Lett., Vol. 1 : 277 - 282.

Wonham, W.M. (1979). Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, 2nd Ed., Springer - Verlag, New York.