

ELIMINAÇÃO DE OSCILAÇÕES NÃO LINEARES EM SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO

Paulo S.R. Diniz

Programa de Engenharia Elétrica
COPPE/EE/UFRJ
Caixa Postal 68504
21945 - Rio de Janeiro - RJ
Brasil

Resumo

As condições suficientes para possível eliminação de ciclo limite a entrada zero, ciclo limite à entrada constante, e as oscilações devido o overflow nos sistemas discretos no tempo, são mostrados neste trabalho. Para efetuar na prática a eliminação das oscilações não lineares, são sugeridas formas de quantização dos sinais e modificações na realização original.

Abstract

Elimination of Nonlinear Oscillations in Discrete-Time Systems.

Sufficient conditions for elimination of zero-input, constant-input, and overflow limit cycles are shown in this paper. In order to effect the elimination of the nonlinear oscillations, suitable signal quantization and structural modifications are suggested.

1. INTRODUÇÃO

Um sério problema prático relacionado com a implementação dos sistemas discretos no tempo recursivos é a possibilidade de ocorrência de oscilações parasitas. As oscilações parasitas dos sistemas discretos de acordo com a origem podem ser classificadas como ciclo limite granular e ciclo limite devido a overflow.

Todo o sistema discreto estável, se for implementado com aritmética de precisão infinita, deverá apresentar uma resposta assintoticamente decrescente quando a entrada se torna nula a partir de um instante n_0T . Porém, se o referido sistema é implementado com aritmética de precisão finita, quando a entrada se torna nula, os sinais de ruído gerados pelos quantizadores inerentes à aritmética de precisão finita, se tornam altamente correlacionados de amostra à amostra e de fonte para fonte de ruído. Esta correlação gera oscilações autônomas denominadas ciclos limite granulares.

Cabe observar que o ciclo limite granular é proveniente da quantização nos bits menos significativos dos sinais, e sua amplitude pode ser razoavelmente grande em alguns casos. Em muitas aplicações a presença de ciclo limite pode ser um problema sério, consequentemente é desejável eliminá-lo ou manter sua amplitude a menor possível.

O ciclo-limite devido a overflow pode ocorrer em sistemas discretos recursivos, quando os módulos dos sinais internos excedem a faixa dinâmica dos registros disponíveis. Para prevenir o aumento no comprimento de palavra dos sistemas recursivos com intuito de evitar overflow, deve-se introduzir operações não

lineares nos sinais denominados não linearidades de overflow. As não linearidades de overflow influenciam os bits mais significativos causando desta forma severas distorções no sinal. A ocorrência de overflow pode iniciar oscilações auto-sustentadas de grande amplitude denominadas ciclos limite devido a overflow.

Um sistema discreto é considerado livre de ciclo limite devido a overflow, ou dito ter resposta forçada estável, se o erro que é introduzido no sistema após a ocorrência de um overflow decresce com o tempo, de uma tal maneira que a saída do sistema não linear real converge para a saída do sistema linear ideal [1].

Overflow pode ocorrer em qualquer sistema na presença de sinal na entrada, por essa razão o escalamento dos sinais internos ao sistema é geralmente necessário para reduzir a probabilidade de overflow a um nível aceitável.

Neste artigo, serão estudadas condições suficientes para eliminação de ciclo-limite granular e devido a overflow, na realização dos sistemas discretos no tempo.

2. PROCEDIMENTO GERAL PARA ELIMINAÇÃO DO CICLO LIMITE GRANULAR

Um sistema discreto recursivo genérico ideal é representado conforme mostrado na Figura 1, onde a rede linear n portas consiste de multiplicadores e somadores. Se assumirmos que os sinais internos do sistema são quantizados nas variáveis de estado, o sistema real pode ser representado conforme mostrado na Figura 2.

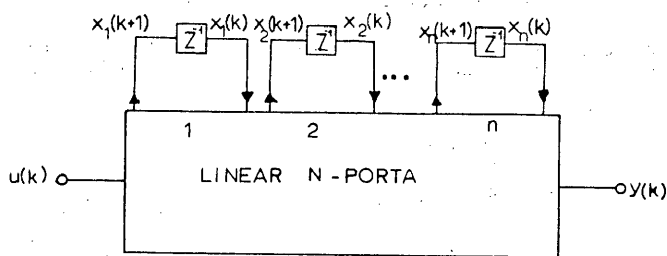


Fig. 1: Rede genérica ideal.

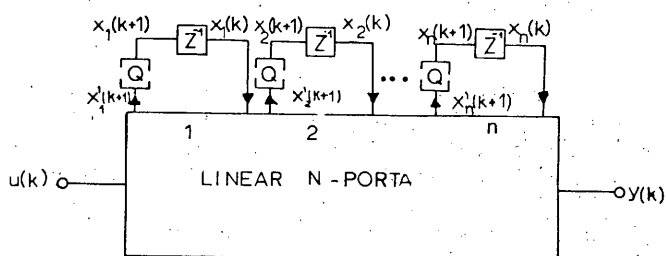


Fig. 2: Rede genérica real

O sistema da Figura 2 pode ser descrito através da formulação de variáveis de estado da seguinte forma

$$X(k+1) = [AX(k) + Bu(k)]_Q \quad (1)$$

$$y(k) = CX(k) + du(k)$$

onde $[.]_Q$ indica o valor quantizado de $[.]$.

Para estudarmos o ciclo limite à entrada zero é suficiente considerarmos somente a parte recursiva da equação de estado descrita por

$$X(k+1) = [AX(k)]_Q = [X'(k+1)]_Q \quad (2)$$

onde a quantização Q efetuada no sistema consiste de operações variantes no tempo, tais como truncamento ou arredondamento e tratamento de overflow.

Teorema 1

Dado um sistema discreto recursivo que possua uma matriz de estado A com autovalores no interior do círculo unitário que satisfaça a seguinte condição:

$$\hat{x}^T (G - A^T G A) \hat{x} \geq 0 \quad (3)$$

onde G é uma matriz $n \times n$ diagonal definida positiva, e \hat{x} é um vetor $n \times 1$ qualquer no \mathbb{R}^n . O ciclo limite granular para entrada zero pode ser eliminado caso a quantização seja feita através de truncamento em magnitude.

Prova:

Considere uma função energia quadrática de finita positiva dada por

$$p(X(k)) = X^T(k) G X(k)$$

que servirá como uma função Lyapunov.

O acréscimo na função energia num período de T é dado por

$$\begin{aligned} \Delta p(k+1) &= p(X(k+1)) - p(X(k)) \\ &= X^T(k+1)GX(k+1) - X^T(k)GX(k) \\ &= [X'^T(k+1)]_Q G [X'(k+1)]_Q - X^T(k)GX(k) = \\ &= [AX(k)]_Q^T G [AX(k)]_Q - X^T(k)G X(k) = \\ &= [AX(k)]^T G [AX(k)] - X^T(k)GX(k) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n [x_i'^2(k+1) - x_i^2(k+1)] g_i = \\ &= X^T(k) [A^T G A - G] X(k) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n [x_i'^2(k+1) - x_i^2(k+1)] g_i \quad (4) \end{aligned}$$

onde g_i são os elementos da diagonal principal de G . Assuma agora que os erros devido à quantização e a overflow nos sinais $x_i'(k+1)$ sejam tais que

$$x_i(k+1) = x_i'(k+1)$$

ou

$$|x_i(k+1)| < |x_i'(k+1)| \quad (5)$$

para $i = 1, 2, \dots, n \quad \forall k$.

Se a equação 3 for verdadeira temos que

$$\Delta p(k+1) \leq 0.$$

Sendo o sistema discreto implementado com aritmética de precisão finita, um número finito de períodos após a entrada se tornar zero o sistema irá oscilar periodicamente ou ficará relaxado em zero. A sustentação de uma oscilação de amplitude não nula não é possível caso as equações 3 e 5 sejam verdadeiras. Consequentemente, as condições 3 e 5 são suficientes para garantir a eliminação do ciclo limite granular com entrada zero em um sistema discreto.

No caso da ocorrência de um overflow num instante qualquer, a quantização não linear terá necessariamente que obedecer à equação 5, consequentemente se a entrada se torna zero nenhuma oscilação poderá ser sustentada.

c.q.d.

A quantização granular obedecendo a equação 5 que gera menor erro é denominada truncamento em magnitude.

Note que a condição da equação 3 é equivalente a exigir que F seja semi-definida positiva onde

$$F = G - A^T G A \quad (6)$$

Cabe observar que para qualquer matriz de estado A com autovalores no interior do círculo unitário sempre existe um G simétrico definido positivo tal que F é simétrica e semi-definida positiva. Ou seja, é sempre possível gerar uma função Lyapunov para qualquer sistema linear estável, porém se G não for diagonal o processo de quantização se torna extremamente complicado [2].

Teorema 2

Seja A uma matriz de estado 2x2 de um sistema com polos no interior do círculo unitário. Existe uma matriz diagonal G definida positiva tal que F seja semi-definida positiva se e somente se [3].

$$a_{12} a_{21} \geq 0$$

ou se

$$a_{12} a_{21} < 0$$

e

$$|a_{11} - a_{22}| + \det(A) \leq 1. \quad (7)$$

Prova

Se $G = A^T G A$ é semi-definida positiva para G diagonal definida positiva temos que

$$F = T^{-1} T^{-1} - A^T T^{-1} T^{-1} A$$

onde $G = (T^{-1})^2$ e T é diagonal e não singular. Logo $T^T F T = T^T T^{-1} T^{-1} T - T^T A^T T^{-1} T^{-1} A T = I - (T^{-1} A T)^T (T^{-1} A T) = I - M$ é semi-definida positiva sendo que $T^T = T$.

Basta então demonstrar que $I - M$ é semi-definida positiva. A matriz $I - M$ será semi-definida positiva, se e somente se seus autovalores são positivos ou zero, já que $I - M$ é simétrica [4].

Alternativamente a matriz $I - M$ será semi-definida positiva s.s.s. o traço de $(I-M)$ e $\det(I-M)$ são positivos ou zero (soma e produto dos autovalores).

Teremos então que

$$\begin{aligned} \det(I-M) &= \det(zI-M) \Big|_{z=1} = \\ &= 1 - \text{tr}(M) + \det(M) = \\ &= 1 - \text{tr}(M) + [\det(A)]^2 \\ \text{tr}(I-M) &= 2 - \text{tr}(M) > 1 + [\det(A)]^2 - \\ &- \text{tr}(M) = \det(I-M) \end{aligned}$$

uma vez que $[\det(A)]^2 < 1$ para filtros estáveis.

Em termos dos elementos de T temos que

$$\begin{aligned} \det(I-M) &= 1 - [\det(A)]^2 - (a_{11}^2 + \\ &+ \alpha^2 a_{12}^2 + \frac{a_{21}^2}{\alpha^2} + a_{22}^2) \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{t_{22}}{t_{11}}$. Calculando o máximo em relação a α temos que

$$\begin{aligned} \det(I-M) &\leq 1 - [\det(A)]^2 - [a_{11}^2 + \\ &+ 2|a_{12} a_{21}| + a_{22}^2] = \\ &= [1 + \det(A)]^2 - [\text{tr}(A)]^2 + \\ &+ 2[a_{12} a_{21} - |a_{21} a_{12}|] \end{aligned}$$

onde $\alpha_{\max}^2 = |a_{21}/a_{12}|$. Para que o lado direito da igualdade acima seja positivo basta que

$$a_{12} a_{21} \geq 0$$

ou seja

$$\det(I-M) \leq (1+\alpha_1+\alpha_2)(1-\alpha_1+\alpha_2) > 0$$

onde α_1 e α_2 são os coeficientes do denominador do sistema de 2ª ordem dado por $D(z) = z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2$.

Se $a_{12} a_{21} < 0$, teremos que

$$\begin{aligned} \det(I-M) &\leq 1 + [\det(A)]^2 - [a_{11}^2 - 2a_{12}a_{21} + \\ &+ a_{22}^2] = [1 - \det(A)]^2 - (a_{11} - a_{22})^2 \end{aligned}$$

A última equação acima será maior ou igual a zero se

$$|a_{11} - a_{22}| + \det(A) \leq 1$$

Conclui-se então que $\exists T$ diagonal tal que $\det(I-M)$ e $\text{tr}(I-M)$ são positivos ou nulos.

c.q.d.

Conforme foi visto acima as condições suficientes para eliminação do ciclo limite à entrada zero estão bem estabelecidas, porém se ao invés da entrada do sistema se estabilizar em zero um sinal constante permanecer aplicado ao sistema, ciclos limite devido à entrada constante poderão ocorrer. Cabe observar que resposta de um sistema linear estável a um sinal constante deve ser um sinal constante.

Um teorema que estabelece as condições suficientes que asseguram a eliminação do ciclo limite à entrada constante em um sistema qualquer no qual o ciclo limite à entrada zero pode ser eliminado é apresentado a seguir [5].

Teorema 3

Assuma que o sistema discreto da Figura 2 não sustenta ciclo limite à entrada zero e que

$$X(k+1) = [AX(k) + Bu(k)]_Q \quad (8)$$

$$y(k+1) = CX(k) + du(k)$$

onde $[\cdot]_Q$ é o valor quantizado de $[\cdot]$.

O ciclo limite a entrada constante pode ser eliminado modificando a estrutura da Figura 2 conforme mostrado na Figura 3, onde P é dado por

$$P = [p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n]^T = (I-A)^{-1} B \quad (9)$$

e $P u_0$ deve ser representável no comprimento de palavra da máquina.

Prova

Sendo a estrutura da Figura 2 livre de ciclo limite à entrada zero, a equação

$$X(k+1) = [A X(k)]_Q \quad (10)$$

descreve um sistema estável, ou seja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

Se a entrada é constante, ou seja $u(k) = u_0$, a estrutura modificada da Figura 3 é caracterizada por

$$X(k+1) = [A X(k) - P u_0 + B u_0]_Q + P u_0 \quad (11)$$

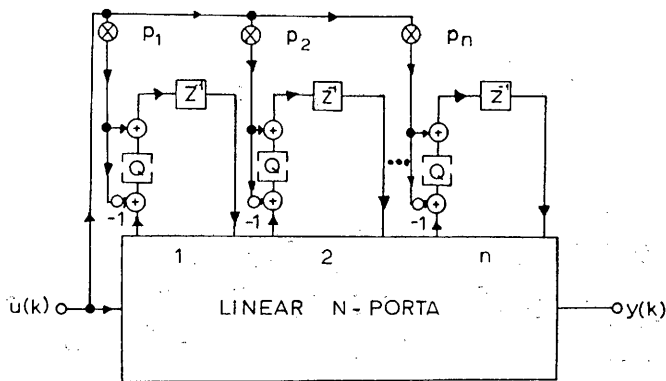


Fig. 3 - Rede de ordem n modificada para eliminação de ciclo limite à entrada constante.

e se a equação 9 é verdadeira, temos que

$$\begin{aligned} X(k+1) &= [A X(k) - I(I-A)^{-1} B u_0 + \\ &+ (I-A) (I-A)^{-1} B u_0]_Q + P u_0 = \\ &= [A X(k) - P u_0]_Q + P u_0 \end{aligned}$$

ou seja

$$\hat{X}(k+1) = [A \hat{X}(k)]_Q \quad (12)$$

onde

$$\hat{X}(k) = X(k) - P u_0.$$

Evidentemente 12 é o mesmo que 10, exceto pela transformação nas variáveis de estado, e consequentemente representa um sistema estável. A estabilidade está garantida se na equação 9 $P \cdot u_0$ puder ser calculado exatamente ou seja $P \cdot u_0$ é representável no comprimento de palavra da máquina.

c.q.d.

Finalmente, cabe mencionar que muitos trabalhos foram publicados com o objetivo de gerar algoritmos livres de ciclo limite à entrada da zero [6]-[8], e algoritmos livres de ciclo limite à entrada constante [9]-[12], porém os procedimentos de análise e geração das redes foram os mais variados possíveis. O principal objetivo aqui foi formalizar um procedimento para o estudo da eliminação do ciclo limite granular que fosse geral e aplicável em todos os casos.

3. ESTABILIDADE DA RESPOSTA FORÇADA DE SISTEMAS DISCRETOS COM NÃO LINEARIDADES DEVIDO AO "OVERFLOW"

O estudo da estabilidade da resposta forçada dos sistemas discretos que possuem não linearidades para controle de overflow deve ser feito considerando sinais de entrada para o qual, no sistema ideal (sem não linearidades de overflow), o nível de overflow nunca é alcançado após um dado instante $k_0 T$. Desta forma, podemos verificar se a saída do sistema real irá se recuperar após um overflow ocorrido antes de $k_0 T$ sem perturbações causa-

das pelo sinal de entrada. Embora o sinal de entrada acima seja uma idealização, se o sistema se recuperar para este tipo de sinal, também irá se recuperar após cada overflow se o tempo de recuperação é menor que o tempo de ocorrência entre dois overflows [1].

Denominando os sinais de saída do sistema não linear real por $F'(k)$ e os do sistema linear ideal por $F(k)$, a resposta forçada do sistema real será estável se e somente se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (F'(k) - F(k)) = [0 \dots 0]^T$$

desde que os sinais de entrada em ambos os sistemas sejam iguais e obedeçam à condição discutida acima.

Considerando as equações que descrevem o sistema linear e não linear mostrados nas Figuras 4 e 5 dadas por:

$$F'(k) = A X'(k) + B U_1(k)$$

$$F(k) = A X(k) + B U_2(k)$$

assumimos que a saída do sistema não linear está devidamente escalada, e portanto nenhuma oscilação devido a overflow pode ocorrer sem que esta ocorra nos estados. As equações dos ramos externos são dadas por

$$X'(k) = [F'(k-1)]_{Q_0}$$

$$X(k) = F(k-1),$$

onde $[.]_{Q_0}$ é a quantização de $[.]$ no caso de ocorrer overflow. Sendo os dois sistemas excitados pelo mesmo sinal temos que

$$U_1(k) = U_2(k).$$

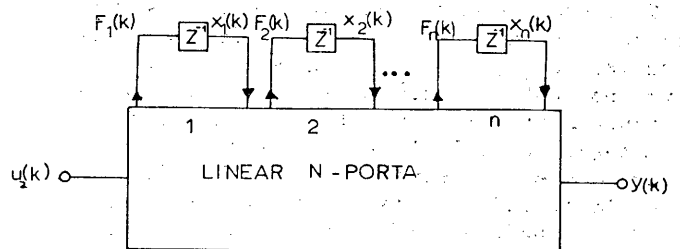


Fig. 4: Rede ideal.

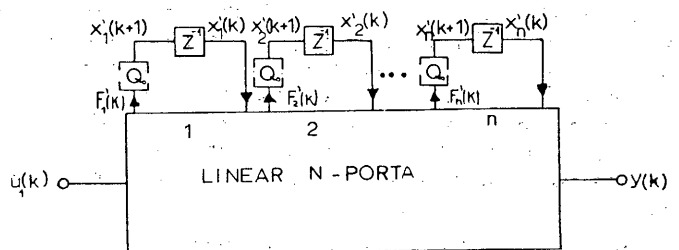


Fig. 5: Rede real.

Comparando os dois sistemas, a diferença entre os sinais de saída pode ser interpretada como um sinal de erro que deve convergir

para zero se a resposta do sistema não linear é estável. Porém se os sinais de erro nas variáveis de estado convergirem para zero, as saídas dos dois sistemas tenderão a se igualar. Os vetores representando os sinais de erro são dados por

$$e(k) = F'(k) - F(k) = A[X'(k) - X(k)] = A e'(k) \quad (13)$$

Das equações dos ramos temos que

$$e'(k) = [F'(k-1)]_{Q_0} - F(k-1) = [e(k-1) + F(k-1)]_{Q_0} - F(k-1) \quad (14)$$

Definindo o vetor variante no tempo $V(e(k), k)$ por

$$V(e(k), k) = [e(k) + F(k)]_{Q_0} - F(k), \quad (15)$$

a equação 14 pode ser reescrita da seguinte forma

$$e'(k) = V(e(k-1), k-1). \quad (16)$$

Das equações 13, 14, 15, os vetores $e(n)$ e $e'(n)$ são os sinais de saída e entrada de um sistema N portas descrito pela matriz A . Note que a matriz A é a matriz de transição do sistema original.

A resposta forçada do sistema não-linear da Figura 5 é estável se e somente se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = [0 \quad \dots \quad 0]^T$$

que é equivalente a exigir que:

"A estabilidade da resposta forçada do sistema da Figura 5 é completamente equivalente à estabilidade devido à entrada zero do mesmo sistema quando a não linearidade nos estados é dada pela equação 15".

Note que a equivalência dos dois sistemas ocorre independente das características da quantização $[.]_{Q_0}$. Consideremos agora os sistemas no qual a quantização era feita através do truncamento em magnitude para garantir a eliminação do ciclo limite à entrada zero. Neste caso, para garantirmos a estabilidade da resposta forçada quando ocorre overflow para redes que obedeçam ao Teorema 1, e que $|F_i(k)| \leq 1$ para $k > k_0$, basta que

$$|V(e_i(k), k)| < |e_i(k)| \text{ para } i=1,2,\dots,N$$

que é equivalente a executar a quantização Q_0 conforme mostrado na Figura 6.

Concluindo, a condição suficiente para garantir a estabilidade à resposta forçada quando ocorre overflow, em sistemas livres de ciclo limite à entrada zero com quantização granular aplicada às variáveis de estado e baseada no truncamento em magnitude, é executar a quantização quando ocorrer overflow conforme ilustrado na Figura 6.

Finalmente, cabe observar que neste artigo foi dada ênfase a procedimentos para eliminação de ciclo limite granular e devido a overflow. Porém cabe mencionar que muitos trabalhos foram publicados, voltados para análise dos vários tipos de ciclo limite, com determinação de suas amplitudes, e períodos. A ênfase escolhida neste artigo nos parece mais im-

portante do ponto de vista do projetista de sistemas discretos no tempo.

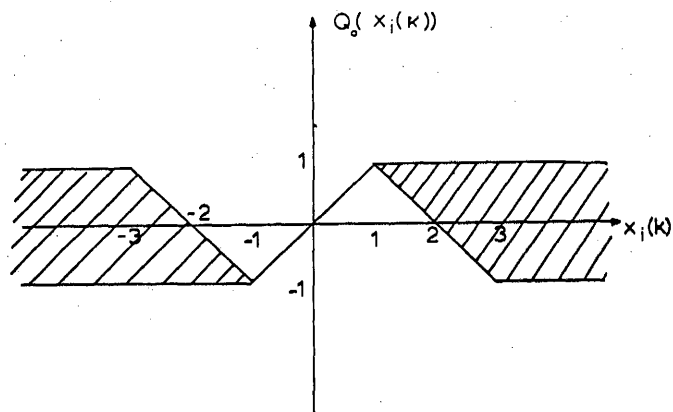


Fig. 6 - Regiões da não-linearidade de overflow que garantem a estabilidade da resposta forçada em redes que obedeçam ao Teorema 1.

4. CONCLUSÕES

As condições suficientes para eliminação do ciclo-limite granular e devido a overflow nos sistemas discretos foram estabelecidas. Como consequência, foram sugeridas as formas de quantização que devem ser efetuadas nos sinais, para garantir que nenhum tipo de oscilação não-linear seja sustentada.

5. REFERÊNCIAS

- [1] T.A.C.M. Claasen, W.F.G. Mecklenbräuker, J.B.H. Peek - "On the Stability of the Forced Response of Digital Filters With Overflow Nonlinearities", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, pp. 692-696, Agosto 1975.
- [2] K. Meerkötter - "Realization of Limit Cycle-Free Second-Order Digital Filters", Proc. 1976 Int. Symp. on Circuits and Systems, pp. 295-298, 1976.
- [3] W.L. Mills, C.T. Mullis and R.A. Roberts - "Digital Filter Realizations Without Overflow Oscillations", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-26, pp. 334-338, Agosto 1978.
- [4] G. Strang - Linear Algebra and its Applications, Academic Press, 2nd ed., 1980.
- [5] P.S.R. Diniz, A. Antoniou - "On the Elimination of Constant-Input Limit Cycles in Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-31, pp. 670-671, Julho 1984.
- [6] K. Meerkötter, W. Wegener - "A New Second-Order Digital Filter Without Parasitic Oscillations", Arquiv. für Elektronik und Übertragungstechnik, Vol. 29, pp. 312-314, Julho/Agosto 1975.

- [7] P.S.R. Diniz, A. Antoniou - "VGIC - Based Digital Filter Structures", 29 Congresso Latinoamericano de Control Automatico, Buenos Aires, pp. 328-333, Outubro 1986.
- [8] A. Fettweis, K. Meerkötter - "Suppression of Parasitic Oscillations in Wave Digital Filters", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, pp. 239-248, Março 1976.
- [9] G. Verkroost, H.J. Butterweck - "Suppression of Parasitic Oscillations in Wave Digital Filters and Related Structures by Means of Controlled Rounding", Archiv. für Elektronik und Übertragungstechnik, Vol. 30, pp. 181-186, Maio 1976.
- [10] G. Verkroost - "A General Second-Order Digital Filter With Controlled Rounding to Exclude Limit Cycles for Constant Input Signals", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-24, pp. 428-431, Agosto 1977
- [11] K.S. Liu, L.E. Turner - "Stability Dynamic-Range and Roundoff Noise in a New Second-Order Recursive Digital Filter", IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-30, pp. 815-821, Novembro 1983.
- [12] P.S.R. Diniz, A. Antoniou - "More Economical State-Space Digital-Filter Structures Which are Free of Constant-Input Limit Cycles", IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-34, pp. 807-815, Agosto 1986.