SBA: Controle & Automação, Vol. 2, Nº 1, pp. 71-75, (NT)

SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS ATRAVÉS DA TEORIA DE CONTROLE

Amit Bhaya
Roosevelt J. Dias

Programa de Engenharia Elétrica
COPPE/UFRJ
C.P. 68504
21945 - Rio de Janeiro, RJ

Resumo

Este trabalho apresenta um algoritmo geral, baseado na teoria de controle, para achar soluções simultâneas de duas equações polinomiais em duas variáveis. Uma simples mudança de variáveis nos permite considerar os dois polinômios como o numerador e o denominador de uma função de transferência (SISO) parametrizada por uma variável α. Mostra-se que a observabilidade da realização desta função de transferência, na forma companheira controlável, depende das raízes de um determinado polinômio em α. Estas raízes são usadas para determinar, *a priori*, o número de soluções e depois, via o cálculo de um máximo divisor comum, as próprias soluções do sistema polinomial. Compara-se o algoritmo com o método da continuação-homotópica e o método clássico da eliminação. São apresentados aplicações e vários exemplos ilustrativos.

Palavras-chaves: O teorema de Bézout, observabilidade/controlabilidade, forma canônica controlável, coprimo.

Abstract

This paper presents a general control-theoretic elimination method to find simultaneous solutions of two polynomial equations in two unknowns. A simple change of variables allows us to consider the two polynomials as numerator and denominator of a SISO transfer-function parametrized by a variable α. The observability of the control canonical form of the realization of this transfer-function is shown to be determined by the roots of a certain polynomial in α. These roots are then used to determine, *a priori*, the number of solutions to the polynomial equations and then, via the calculation of a highest common factor, the solutions themselves. The algorithm is compared with the continuation-homotopy method and the classical elimination method. Applications and several illustrative examples are presented.

Keywords: Bézout's theorem, observability/controlability, controller canonical form, coprime.

1. INTRODUÇÃO

A obtenção de soluções simultâneas de um sistema de equações polinomiais é uma tarefa necessária para diversos problemas de engenharia: na área de computação gráfica, modelagem geométrica, modelagem de cinética química, sistemas multidimensionais (2-D, n-D), robótica, etc.

Entre os métodos mais populares para resolver sistemas polinomiais, podemos citar o de continuação homotópica (Allgower e Georg, 1980; Li, 1987). Este método, de larga utilização, é geralmente rápido, mas se mostra lento para sistemas que possuem soluções no infinito. Para tais sistemas, chamados deficientes (v. seç. 2 embaixo), o algoritmo pode seguir trajetórias que divergem para soluções infinitas e, portanto, torna-se difícil achar os ramos que convergem para as soluções finitas e distinguir entre uma convergência lenta e uma divergência. Existem algoritmos modificados que resolvem este problema para uma classe restrita de sistemas (Li et al., 1987) ou sob hipóteses adicionais sobre o conjunto das soluções infinitas (Morgan, 1986).

À luz disso, procurou-se desenvolver um método que fosse conceitualmente simples e geral, que desse o número exato de soluções finitas e que não precisasse de nenhuma hipótese sobre o conjunto de soluções. A solução, para o caso de sistemas de dois polinômios em duas variáveis, foi obtida através da teoria de controle, sendo utilizadas as seguintes idéias básicas: uma mudança de variáveis, realização de um sistema controlável, a observabilidade deste sistema e a teoria de polinômios coprimos. Um enfoque parecido para o isolamento de raízes múltiplas de um polinômio se deve a Zeni, 1984.

2. DEFINIÇÕES E RESULTADOS ÚTEIS

Sejam $p_1(x_1,x_2)$, $p_2(x_1,x_2)$ dois polinômios com coeficientes reais em duas variáveis x_1,x_2. Escreveremos p_1, p_2 ε $\mathbf{R}[x_1,x_2]$,

$x = (x_1, x_2)$, $P(x) = (p_1(x), p_2(x))$ e queremos achar todos os zeros isolados do *sistema polinomial* $P(x)=0$, i.e. achar $(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^2$ tal que $p_1(x_1,x_2) = p_2(x_1,x_2) = 0$.

Na linguagem de geometria algébrica, queremos achar as interseções (finitas) das variedades $p_1 = 0$, $p_2=0$. O resultado clássico da geometria algébrica é:

O teorema de Bézout (van der Waerden, 1953 ; Kendig, 1977)

Para o sistema polinomial $P(x) = (p_1(x),\dots, p_n(x))$ onde $x = (x_1,\dots,x_n)$, $p_i \in \mathbb{R}[x_1,\dots, x_n]$, grau $(p_i) = d_i$, e os p_i's não possuem fatores comuns, o número de zeros de $P(x) = 0$ é superiormente limitado por d, $d_1 \dots d_n = :d$, onde d é denominado *o número de Bézout* do sistema P(x).

Observação: Embora um sistema 'genérico' P(x) tenha o número de Bézout de soluções (por exemplo, $x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0$, $x_1-x_2-1 = 0$ tem 2x1=2 soluções), a grande maioria dos sistemas polinomiais nas aplicações possui um número de soluções menor - e, às vezes, muito menor - do que o número de Bézout (Li et al., 1987).

Definição: Um sistema polinomial que possui um número de soluções menor do que seu número de Bézout é chamado *deficiente*.

Exemplos: 1. $p_1(x_1,x_2) = x_1+x_2$, $p_2(x_1,x_2)=x_1+x_2-1$

O número de Bézout é 1x1=1. É evidente que geometricamente p_1 e p_2 representam duas retas paralelas que "se interceptam" somente no "infinito" ($x_1 = \pm \infty$, $x_2 = \mp \infty$).

2. (Marcus, 1978) $p_1(x_1,x_2) = x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_2(x_2-2)x_1 + x_2^2 - 4$, $p_2(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_2 + 2$.

O número de Bézout é 3 x 2 =6. No entanto, o sistema possui apenas 3 soluções finitas (v. seç. 5, Ex. 2 abaixo).

3. (Morgan, 1986) p_1: $x_1^2 + x_2^2 - a^2 = 0$, p_2: $(x_1-b)^2 + x_2^2 - c^2 = 0$, P_3: $x_3-d = 0$.

O número de Bézout é 2x2x1 = 4, porém o sistema tem somente duas soluções finitas. Precisamos dos seguintes resultados da teoria de controle e da teoria de polinômios coprimos:

Teorema 1 (v. por exemplo, Kailath, 1980, p. 108)

A realização {A, b,c} em forma companheira controlável da função de transferência $f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, d(s) mônico, é observável se e somente se n(s) e d(s) forem coprimos.

Observação 1: Por negação do Teor. 1, podemos concluir que se a realização em forma companheira controlável for inobservável, então n(s) e d(s) terão divisores comuns, e, em particular, um máximo divisor comum (mdc). E, de fato, temos:

Teorema 2 (Barnett, 1971, 1973 p.3,Thm . 1 , 1983)

Sejam

$d(s): = s^m + a_{m-1} s^{n-1} + \dots + a_o \in \mathbf{R}[s]$;

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ -a_o & -a_1 & & & -a_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mxm},$$

a matriz companheira associada ao polinômio d(s);

$$n(s) := c_{m-1}s^{m-1} + \dots + c_o \in \mathbb{R}[s]$$

$$\underset{\sim}{c} := [c_o \dots c_{m-1}] \in \mathbb{R}^{1xm}$$

Então,

$$\text{grau } (\text{mdc}(n(s), d(s)) = m\text{-posto} \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{m-1} \end{bmatrix}$$

3. O ALGORITMO

Dados dois polinômios $p_1(x_1,x_2)$, $p_2(x_1, x_2) \in \mathbb{R}[x_1,x_2]$, queremos achar o par (a,b) tal que $p_1(a,b) = p_2(a,b) = 0$. Para simplificar o algoritmo suporemos que p_1 e p_2 não possuem nenhum fator comum (v., porém, Seç . 5 abaixo)

1º passo Mudança de variáveis:

$$x_1 \leftarrow s$$
$$x_2 \leftarrow s + \alpha$$

Após estas substituições, os polinômios $p_1(s, s + \alpha)$, $p_2(s,s+\alpha)$ podem ser considerados elementos de $\mathbb{R}[\alpha][s]$ (isto é, polinômios em s cujos coeficientes são polinômios em α). O grau em s de um dos polinômios será maior ou igual ao grau do outro: chamaremos o primeiro de $\tilde{n}^\alpha(s)$ e o outro $\tilde{d}^\alpha(s)$, de maneira que:

$$\text{grau } (\tilde{n}^\alpha(s)) \geq \text{grau } (\tilde{d}^\alpha(s))$$

2º passo Montagem de uma função de transferência e sua realização:

Dividindo $\tilde{n}^\alpha(s)$ por $\tilde{d}^\alpha(s)$, obtém-se o resto $n^\alpha(s)$, onde

$$\text{grau } (n^\alpha(s)) < \text{grau } (\tilde{d}^\alpha(s)).$$

Acha-se $h \in \mathbb{R}$ {0} tal que $h\tilde{d}^\alpha(s)$ seja mônico e define-se $d^\alpha(s) := h\tilde{d}^\alpha(s)$. Então, a função de transferência é

$$f^\alpha(s) := \frac{n^\alpha(s)}{d^\alpha(s)} := \frac{\sum_{i=0}^{k} n_i(\alpha)s^i}{s^\ell + \sum_{j=0}^{\ell-1} d_j(\alpha)s^j},$$

onde grau $(n^\alpha(s)) = k < \ell =$ grau $(d^\alpha(s))$ e

$$n_i(\alpha),\ d_j(\alpha) \in \mathbb{R}[\alpha].$$

Sejam

$$A(\alpha) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -d_0(\alpha) & -d_1(\alpha) & & & -d_{\ell-1}(\alpha) \end{bmatrix}$$

$c(\alpha) := [n_0(\alpha)\ n_1(\alpha) \dots n_k(\alpha)\ 0 \dots 0]$ com $A(\alpha) \in \mathbb{R}[\alpha]^{\ell x \ell}$ e $c(\alpha) \in \mathbb{R}[\alpha]^{1x\ell}$ as matrizes da realização na forma canônica controlável da função de transferência $f^{\alpha}(s)$.

3º passo. Monta-se a matriz de observabilidade da realização:

$$\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha)) := \begin{bmatrix} c(\alpha) \\ c(\alpha)A(\alpha) \\ \vdots \\ c(\alpha)A(\alpha)^{\ell-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[\alpha]^{\ell x \ell}$$

4º passo. Calcula-se o determinante de $\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))$

$$q(\alpha) := \det [\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))] \in \mathbb{R}[\alpha]$$

e acha-se as raízes $\{\alpha_i\}_{i=1}^{m}$ do polinômio $q(\alpha)$.

5º passo. Para cada $\alpha_i \in \mathbb{C}$ distinto, acha-se o máximo divisor comun (mdc) de $n^{\alpha_i}(s)$, $d^{\alpha_i}(s)$. Seja

$$r^{\alpha_i}(s) := \mathrm{mdc}(n^{\alpha_i}(s), d^{\alpha_i}(s)),\ \mathrm{grau}(r^{\alpha_i}(s)) =: g^{\alpha_i}$$

6º passo. Acha-se as raízes $\{s_j^{\alpha_i}\}_{j=1}^{g^{\alpha_i}}$ do polinômio $r^{\alpha_i}(s)$.

7º passo. As soluções finitas do sistema polinomial $p_1(x_1,x_2)=p_2(x_1,x_2)=0$ são:

$$x_1(j) = s_j^{\alpha_i} \qquad j=1,\dots,g^{\alpha_i}; i \in I$$
$$x_2(j) = s_j^{\alpha_i} + \alpha_i$$

onde $I \subset \{1,2,\dots,m\}$ é um conjunto de índices tal que para $i, j \in I$, $i \neq j \rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$.

O número total de soluções finitas é, evidentemente $\sum_{i\in I} g^{\alpha_i}$.

Comentários:

1º O algoritmo é, evidentemente, teórico. No entanto, os programas de manipulação de símbolos (por exemplo, MACSYMA e μMATH) são cada vez mais poderosos e viáveis para uso prático. Sugerimos, então, o uso de um tal programa nos primeiros quatro passos (com a exceção da última parte do 4º passo, que se refere ao cálculo de raízes).

2º Existem algoritmos eficientes para o cálculo de mdc's (5º passo) - v., por exemplo, A. V. Aho et al., 1974, Sec. 8.4, e Barnett, 1971, 1983. Por outro lado, ao invés de achar um mdc de dois polinômios temos a seguinte alternativa: 5º passo (alternativo). Para cada α_i distinto, acha-se as raízes do polinômio $n^{\alpha_i}(s)$ e verifica-se, por substituição, se cada uma delas também é uma raíz de $d^{\alpha_i}(s)$. Assim acha-se o conjunto $\{s_j^{\alpha_i}\}_{j=1}^{g^{\alpha_i}}$ e pode-se omitir o 6º passo. Esta alternativa, embora seja sensível do ponto de vista de cálculo numérico, pode ser implementada por computação paralela já que os cálculos de raízes para cada α_i e para $n^{\alpha_i}(s)$ e $d^{\alpha_i}(s)$ são problemas independentes (desacoplados).

3º O algoritmo é equivalente, por um lado, ao cálculo da resultante de Sylvester, a qual é uma ferramenta clássica da teoria de eliminação (veja, por exemplo, Jacobson, 1974, Mostowski e Stark, 1964 ou Marcus, 1978). Por outro lado, ele fornece mais informações (número de soluções, etc.) do que o simples cálculo de uma resultante. Para uma comparação concreta, veja Seção 5.

4º Na linguagem de sistemas multidimensionais (v. Bose, 1982), o algoritmo é um teste para decidir se dois 2-D polinômios (i.e. polinômios em 2 variáveis) que são *fator-coprimos* (i.e., nenhum fator comum) também são *zero-coprimos* (i.e., nenhum zero comum) (v.Ex.3, Seç.5). Se estes polinômios forem o numerador e o denominador de uma 2-D-função de transferência, então temos um algoritmo para calcular as chamadas singularidades não-essenciais do segundo tipo (SNST)-i.e. os zeros comuns - e daí uma maneira de testar a condição suficiente para BIBO - estabilidade da 2-D função de transferência em questão (nenhuma SNST deve estar sobre a fronteira destacada do bidisco unitário, $\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|=|z_2| = 1\}$) (v. Bose, 1982, para as definições e os resultados acima usados).

5º Como não fazemos nenhuma transformação projetiva ou homotópica não precisamos nos preocupar com "soluções infinitas" (Morgan, 1986, Li et al, 1987).

Finalmente, uma consequência imediata do Teor. 2 é:

Teorema 3: O número total de soluções finitas do sistema $P(x) = 0$, $\sum_{i\in I} g^{\alpha_i}$, é dado por $\sum_{i\in I} (\ell - \mathrm{posto}[\mathcal{O}(c(\alpha_i), A(\alpha_i)]))$ onde I é o conjunto definido no 7º passo do algoritmo.

Comentário: Depois do 4º passo do algoritmo, conhecemos $\{\alpha_i, i\in I\}$ e podemos usar o Teor. 3 acima para achar o número total de soluções finitas *sem ter que calculá-las*. Aliás, pelo Teor. 2, sabemos que $g^{\alpha_i} := \mathrm{grau}\ (r^{\alpha_i}(s))$ (v. 5º passo) é dado por ℓ-posto$[\mathcal{O}(c(\alpha_i), A(\alpha_i)]$. Este resultado é teórico porque o cálculo do posto de uma matriz é geralmente difícil (numericamente). Novamente o uso de um programa de manipulação simbólica pode contornar este problema da seguinte maneira: Acha-se a forma canônica de Smith (v. Kailath, 1980), chamada $S(\alpha)$, da matriz polinomial $\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))$. O cálculo do posto da matriz numérica e *diagonal* $S(\alpha_i)$, para cada α_i, é simples e, inclusive, pode ser feito em paralelo.

4. JUSTIFICATIVA DO ALGORITMO

A mudança de variáveis do 1º passo é um artifício para fazer com que o problema recaia num problema conhecido da teoria de controle. É evidente, pela simples forma da mudança, que é sempre possível fazê-la. O intuito dos primeiros dois passos é montar uma função de transferência cuja realização é da menor ordem possível, de modo que a matriz de observabilidade $\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))$ (3º passo) também seja da menor ordem possível, simplificando assim o cálculo de $q(\alpha) := \det[\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))]$ no 4º passo. Como a realização se torna inobservável para cada α_i, sabemos - pela observação 1, seção 2 - que existe um mdc não-trivial de $n^{\alpha_i}(s)$, $d^{\alpha_i}(s)$, o qual chamamos de $r^{\alpha_i}(s)$ no 5º passo. Obviamente, as raízes do *máximo* divisor *comum* são *todas* as soluções *comuns* (simultâneas) de $n^{\alpha_i}(s)$, $d^{\alpha_i}(s)$. Como $\tilde{n}^{\alpha}(a) = h^{-1}d^{\alpha}(s)_{\alpha}$ (quociente) $+ n^{\alpha}_{\alpha}(s)$, $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (v. 2º passo), $n^{\alpha_i}(s_j^{\alpha_i}) = d^{\alpha_i}(s_j^{\alpha_i}) = 0$ se e só se $\tilde{n}^{\alpha}(s_j^{\alpha_i}) = 0$. Consequentemente, as soluções simultâneas de $n^{\alpha_i}(s)$ e $d^{\alpha_i}(s)$ dão, através da mudança de variáveis, as soluções simultâneas de $p_1(x_1,x_2)$ e $p_2(x_1,x_2)$ assim explicando o 6º e o 7º passos.

5. EXEMPLOS

1. $p_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^3 - 9 = 0, \quad x_1 = s$

$$p_2(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 3 = 0, \quad x_2 = s+\alpha$$

$$f^{\alpha}(s) = \frac{n^{\alpha}(s)}{d^{\alpha}(s)} = \frac{2s + \alpha - 3}{s^3+(3\alpha+1)s^2+3\alpha^2 s+\alpha^3-9},$$

realização $c(\alpha), A(\alpha)$

$$q^{\alpha}(s) = \det[\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))] = -(\alpha-1)(\alpha+3)(\alpha+9).$$

Para $\alpha = 1, -3$ e -9, queda de posto de $\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha)) = 1$, portanto, o número de soluções = Σ (quedas de posto) = 3.

$\alpha=1 \to \mathrm{mdc}(n^{\alpha}, d^{\alpha}) = s-1 \to x_1=1,\ x_2=2$

$\alpha=-3 \to \mathrm{mdc}(n^{\alpha}, d^{\alpha}) = s-3 \to x_1=3,\ x_2=0$

$\alpha=-9 \to \mathrm{mdc}(n^{\alpha}, d^{\alpha}) = s-6 \to x_1=6,\ x_2=-3$

Comentário: Neste exemplo, o número de Bézout do sistema p_1, p_2, $3.1=3$, coincide com o número de soluções finitas. Portanto, não há soluções infinitas.

2. $p_1(x_1,x_2) = x_1^3+2x_1^2x_2 + 2x_2(x_2-2)x_1+x_2^2 - 4$

$$p_2(x_1,x_2) = x_1^2+2x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_2 + 2$$

$$f^{\alpha}(s) = \frac{3\alpha s + \alpha^2+10\alpha-24}{s^2+(\frac{6}{5}\alpha-1)s+(\frac{2}{5}\alpha^2-\alpha+\frac{2}{5})}$$

$$q(\alpha) = \det[\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha))] = (\alpha-2)(\alpha-6)^2(\alpha-8)$$

Para $\alpha=2, 6, 8$, queda de posto de $\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha)) = 1$, portanto temos 3 soluções correspondendo aos mdc's s, $s+4$ e $s+5$. As soluções são então, $(0,2)$, $(-4,2)$, $(-5,3)$.

Comentário: Marcus, 1978, p241-242 usa o método da resultante para achar as soluções do sistema polinomial acima. Comparando este método com o nosso nota-se que a resultante na variável x, é o determinante de uma matriz polinomial em $\mathbb{R}[x_1]^{4\times 4}$, ao passo que o nosso polinômio $q(\alpha)$ (que é a resultante em α) é o determinante de $\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha)) \in \mathbb{R}[\alpha]^{2\times 2}$. Além disso, nosso algoritmo é capaz de dar, *a priori*, o número de soluções deste sistema polinomial deficiente, cujo número de Bézout é 6. As três soluções que estão faltando encontram-se num hiperplano no infinito no espaço projetivo $\mathbf{CP}^2$ e podem ser calculadas pela homogenização (Morgan, 1986). Nota-se também que $\alpha=6$ é uma raiz dupla de $q(\alpha)$, porém a solução correspondente $(-4,2)$ do sistema original tem multiplicidade 1.

Finalmente, apresentamos três exemplos de caso limite do algoritmo.

3. $p_1(x_1,x_2) = x_2 - x_1, \quad x_1 = s$

$$p_2(x_1,x_2) = x_1x_2 \cdot 1, \quad x_2 = s+\alpha$$

$$n^{\alpha}(s) = s+\alpha-s = \alpha, \quad d^{\alpha}(s) = s^2+\alpha s-1$$

$$q(\alpha) = \alpha^2.$$

Para $\alpha=0$, $n^{\alpha}_{\alpha}(s)=0 \to \mathrm{mdc}(n^{\alpha}, d^{\alpha}) = d^{\alpha}$ e como para $\alpha=0$, $d^{\alpha}(s) = s^2-1$, tem-se as soluções $(1,1)$, $(-1,-1)$ (facilmente verificadas) e o número de Bézout é 2 também.

Comentário: O algoritmo continua válido neste caso limite mas é preciso interpretar cada passo cuidadosamente. Nota-se que o exemplo 3 é um caso de dois polinômios fator-coprimos mas não zero-coprimos.

4. $p_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \quad x_1 = s$

$$p_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \quad x_2 = s+\alpha$$

$$\tilde{n}^{\alpha}(s) = s^2+s^2+2\alpha s+\alpha^2-1,$$

$$\tilde{d}^{\alpha}(s) = s^2 + s^2 + 2\alpha s + \alpha^2 - 2$$

$$\tilde{n}^{\alpha}(s) = \tilde{d}^{\alpha}(s) + 1, f^{\alpha}(s) = 1/(s^2+\alpha s+\frac{1}{2}\alpha^2-1)$$

$$\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \to q(\alpha) = 1.$$

Como $q(\alpha)$ é uma constante não-nula, não existe α tal que $q(\alpha) = 0$. Em outras palavras, não há soluções finitas.

Comentário: O número de Bézout é 4, portanto o sistema é deficiente. Geometricamente p_1 e p_2 são dois círculos concêntricos e na teoria clássica de equações um tal sistema se chama *inconsistente*. De fato, $q(\alpha)$ = constante não-nula se e só se o sistema é inconsistente (Mostowski e Stark, 1964).

5. $p_1(x_1,x_2) = x_1^2+x_1^2+2x_1x_2+x_1x_2, \quad x_1=s$

$$p_2(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-1, \quad x_2 = s+\alpha$$

$$\tilde{n}^{\alpha}(s) = 4s^2+(4\alpha+2)s+\alpha^2+\alpha; \quad \tilde{d}^{\alpha}(s) = 4s^2 + 4\alpha s+\alpha^2-1$$

$$\tilde{n}^{\alpha}(s) = \tilde{d}^{\alpha}(s) + 2s + (\alpha+1), \quad f^{\alpha}(s) = \frac{(2s + \alpha + 1)}{(s^2+\alpha s+\frac{1}{4}(\alpha^2-1)}$$

$$\mathcal{O}(c(\alpha), A(\alpha)) = \begin{bmatrix} \alpha+1 & 2 \\ -\frac{1}{2}(\alpha^2-1) & -\alpha+1 \end{bmatrix} \to q(\alpha) \equiv 0$$

Como $q(\alpha)$ é identicamente nulo, pode-se deduzir que o numerador de $f^{\alpha}(s)$, $2s+\alpha+1$, divide o denominador, $s^2+\alpha s+\frac{1}{4}(\alpha^2-1)$, *para todo* α. Em outras palavras, $2s+\alpha+1$ é um fator comum de $\tilde{n}^{\alpha}(s)$ e $\tilde{d}^{\alpha}(s)$, e mudando-se as variáveis, tem-se que x_1+x_2+1 é um fator comum de p_1 e p_2. Extraindo-se o mdc de $n^{\alpha}(s)$, obtém-se a nova função de transferência, $f^{\alpha}(s) = 1/(s+\frac{1}{2}(\alpha-1))$ a qual possui, para todo α, uma realização mínima. Consequentemente $q(\alpha)=1$ e, portanto (v.Exemplo 4), o sistema reduzido é inconsistente. De fato, $p_1(x_1,x_2)=(x_1+x_2)(x_1+x_2+1)$ e $p_2(x_1,x_2) = (x_1+x_2-1)(x_1+x_2+1)$ reduzem-se aos polinômios do Ex. 1, Seç.2 quando suprime-se o fator comum x_1+x_2+1. Neste caso, o sistema possui um conjunto infinito de soluções numa variedade linear e uma solução no infinito. Mais geralmente, quando $q(\alpha)\equiv 0$ faz-se a seguinte modificação no algoritmo: extrai-se o fator comum, obtendo-se uma nova $f^{\alpha}(s)$ e retorna-se ao 2º passo.

6. CONCLUSÕES

Apresentou-se um algoritmo, baseado na teoria de controle, para achar soluções de sistemas polinomiais em duas variáveis. O método é essencialmente equivalente ao cálculo da resultante, porém mais intuitivo e capaz de fornecer informações que mesmo métodos mais sofisticados (como o da continuação) nem sempre fornecerão. Por outro lado, o presente método é teórico e não pretende competir com os métodos numéricos existentes.

Não abordamos aqui as questões relativas à generalização para o caso de várias (> 2) variáveis, à extensão aos sistemas de equações gerais (não necessariamente polinomiais), ao esforço computacional envolvido em problemas mais complexos, que constituem algumas das linhas de pesquisa para continuidade deste trabalho.

REFERÊNCIAS

Aho, A.V., Hopcroft, J.E. e Ullman, J.D.(1974) The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Allgower, E. e Georg, K. (1980) Simplicial and Continuation Methods for approximating Fixed Points and Solutions to Systems of Equations, SIAM Rev., 22, 28-85

Barnett, S. (1971). Greatest Common Divisor of Several Polynomials, Proc. Camb. Phil. Soc., 70, 263-268.

Barnett, S. (1973). Matrices, Polynomials and Linear Time-Invariant Systems, IEEE Trans. on Automat. Control, AC-18, no.1, 1-10.

Barnett, S. (1983). Polynomials and Linear Control Systems, Marcel Dekker, Inc.,New York.

Bose, N.K. (1982). Applied Multidimensional Systems Theory, Van Nostrand Reinhold,New York.

Kailath, T. (1980). Linear Systems, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

Kendig, K. (1977). Elementary Algebraic Geometric, Springer-Verlag, N.Y. Inc.

Li, T.Y. (1987). Solving Polynomial Systems. The Mathematical Intelligencer, 9, No. 3, 33-39.

Li, T.Y., Sauer, T. e Yorke, J.A.(1987). Numerical Solution of a Class of Deficient Polynomial Systems. SIAM J. Numer. Anal., 24, No. 2, 435-451.

Marcus, M. (1978). Introduction to Modern Algebra, Marcel Dekker, Inc., New York.

Morgan, A.P. (1986). A Transformation to Avoid Solutions at Infinity for Polynomial Systems. Applied Math. and Comp., 18, 77-86.

Mostowski, A. e Stark, M. (1964). Introduction to Higher Algebra. Pergamon Press.

Waerden, B.L. van der (1953). Modern Algebra, 2 vols., Ungar, New York.

Zeni Junior, N. (1984). Teoria de Controle Aplicada ao Problema de Solução Iterativa: Um Algoritmo Global e Assintoticamente Estável para o Isolamento das Raízes Múltiplas de um Polinômio. 1º Congresso Latino-Americano de Automática/5º Congresso Brasileiro de Automática. Campina Grande

AGRADECIMENTOS

Queremos agradecer ao Prof. Eugenius Kaszkurewicz pelas sugestões dadas na elaboração deste trabalho.