

## ESTRUTURA DE CONTROLE PARCIALMENTE EM MALHA-FECHADA PARA SISTEMAS LINEARES ESTOCÁSTICOS

O.S. Silva Fº  
Centro Tecnológico para Informática  
Instituto de Automação  
Caixa Postal 6162  
13081 Campinas - SP - Brasil

J.C. Geromel  
Universidade Estadual de Campinas  
Faculdade de Engenharia Elétrica  
Caixa Postal 6101  
13081 Campinas - SP - Brasil

### Resumo

Neste trabalho é abordado o controle ótimo de sistemas lineares SISO, estocásticos e discretos no tempo, com variáveis de controle e saída sujeitas a restrições probabilísticas. Com objetivo de eliminar a infactibilidade do problema determinístico associado é proposta uma estrutura de controle parcialmente em malha fechada. Um exemplo de controle estocástico de uma unidade hidroelétrica da região sudeste do país é apresentado.

Partial Closed-Loop Control Structure for Linear Stochastic Systems

### Abstract

Optimal control of SISO linear, discrete-time, stochastic systems with control and output variables subject to probabilistic constraints is analysed. In order to eliminate the unfeasibility of the associated deterministic problem, a partial closed-loop control structure is proposed. An example of stochastic control of an hydroelectric unit in the south-east of Brazil is included.

### 1. INTRODUÇÃO

Neste artigo, analisa-se a solução em malha aberta de um sistema linear, estocástico e discreto no tempo com variáveis de saída e controle sujeitas a restrições probabilísticas. Ao invés de considerar uma função de penalização, uma solução mais realista pode ser obtida impondo restrições probabilísticas com grau de violação fixado a priori [Lassere, 1984]. Certamente este é o caso do problema de geração hidroelétrica a ser introduzido na seção 5.

Seguindo um resultado recentemente publicado [Lassere, 1984], obtém-se uma formulação determinística equivalente para o problema estocástico, a qual preserva suas propriedades estruturais e permite obter uma política ótima em malha aberta.

O problema determinístico associado pode ser infactível e, neste caso, falha no sentido de se obter uma política de controle em malha aberta. Esta indesejável característica ocorre devido à natureza das suposições necessárias para definir esta formulação equivalente. Isto é, no instante inicial de

tempo, o estado é observado (perfeita informação de estado) e é assumido que medidas futuras não serão permitidas. Consequentemente, o controle é essencialmente determinístico. Ocorre, no entanto, que as restrições do problema determinístico dependem fortemente do segundo momento estatístico do estado que evolui sem controle no tempo (malha-aberta). Sabe-se que, em princípio, os segundos momentos da variável de estado são completamente determinados pela estatística do ruído e do modo em malha-aberta do sistema [Bertsekas, 1976].

Se o sistema em malha aberta é instável, a variância da saída é ilimitada. Como consequência, o problema determinístico pode tornar-se infactível para qualquer grau de violação das restrições imposto pelo projetista.

Assim conclui-se que para adotar restrições probabilísticas, deve-se modificar o procedimento proposto em [Lassere, 1984] no sentido de controlar tanto a média quanto a variância do processo [Geromel e Silva Fº, 1988].

Para superar estas dificuldades, propõe-se a estrutura de controle ilustrada na Figura 1.1. A média é determinada como em [Lassere,

[1984] enquanto a variância é determinada pela solução de um problema de variância mínima estabelecida de tal modo que o risco de infactibilidade seja minimizado. Como resultado, determinam-se as faixas em que as restrições probabilísticas admitem soluções factíveis.

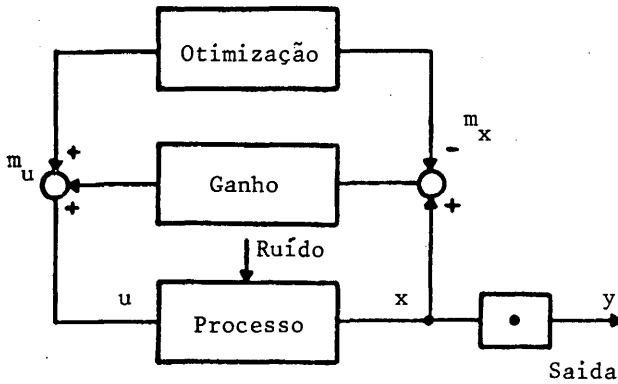


Fig. 1.1: Estrutura de controle proposta

O procedimento também se mantém válido para modelos mais complicados, como é o caso do problema sob enfoque de imperfeita informação de estado. De fato, considerando a linearidade do sistema e a hipótese de estatísticas gaussianas para os ruídos pertinentes, tem-se que toda informação necessária para os objetivos de controle são dadas pela estimativa ótima do estado obtida através do filtro de Kalman. Por conseguinte, a política de realimentação, dada pelo problema de variância mínima, segue como uma consequência imediata da aplicação do Teorema da Separação.

Por fim, adotando-se um modelo simplificado de uma usina do parque hidroelétrico da região sudeste do país, aplica-se o procedimento proposto para obter uma política ótima de controle de geração de energia. Resultados são fornecidos para os casos de perfeita e imperfeita informação de estado.

## 2. CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Introduz-se nesta seção a notação a ser adotada em seguida. Considere-se  $z(k) \in \mathbb{R}^n$  um vetor gaussiano, com distribuição definida por uma média e variância dadas por  $m_z(k)$  e  $V_z(k)$ , respectivamente. A função distribuição de  $\delta_z(k) \triangleq z(k) - m_z(k)$  é denotada por  $F_{z,k}(\cdot)$ .

Seja, então, um sistema estocástico discreto no tempo, descrito por:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (1)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}$  e  $y(k) \in \mathbb{R}$  representam, respectivamente, as variáveis de estado, controle e saída. O vetor  $w(k)$  é um ruído gaussiano com média  $m_w(k)$  e variância invariante no tempo  $V_w \geq 0$ . Assume-se ainda que no instante  $k=0$ , a condição inicial  $x(0) = x_0$  é conhecida. A política de controle  $\{u(k), k=0, \dots, N-1\}$ , para algum  $N \geq 1$  fixado, deve ser determinada de tal modo que a função objetivo

$$J(u) = E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} f_k(x(k), u(k)) + f_N(x(N)) \right\} \quad (2)$$

seja minimizada. As variáveis de controle e saída estão sujeitas às seguintes restrições probabilísticas:

$$\begin{aligned} \text{prob} \{u(k) \in U\} &\geq 2\beta - 1 \\ &k=0, \dots, N-1 \\ \text{prob} \{y(k+1) \in Y\} &\geq 2\alpha - 1 \end{aligned} \quad (3)$$

onde  $\alpha, \beta \in [1/2, 1)$  são parâmetros fixados a priori e

$$\begin{aligned} U &\triangleq \{u \in \mathbb{R} \mid \underline{u} \leq u \leq \bar{u}\} \\ Y &\triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid \underline{y} \leq y \leq \bar{y}\} \end{aligned} \quad (4)$$

Uma solução em malha-aberta (e portanto sub-ótima) para este problema pode ser obtida assumindo-se que, para  $\forall k \geq 1$ , medidas do sistema não serão permitidas. Como consequência, a sequência  $\{u(k)\}$  pode ser tomada como determinística, isto é,  $u(k) = m_u(k) \in U$ ,  $V_u(k) = 0$ ,  $k=0, \dots, N-1$  e a primeira restrição em (3) é automaticamente satisfeita para  $\forall \beta \in [1/2, 1]$ . A função distribuição do estado  $F_{x,k}(\cdot)$  é facilmente calculada e a segunda restrição probabilística em (3) é satisfeita sempre que

$$m_y(k) \in Y_k \quad (5)$$

onde  $Y_k$  é definida como segue, [Lassere, 1984]:

$$Y_k \triangleq \{y \in \mathbb{R} \mid \underline{y}_k \leq y \leq \bar{y}_k\} \subseteq Y \quad (6)$$

com  $\underline{y}_k \triangleq \underline{y} + F_{y,k}^{-1}(\alpha)$  e  $\bar{y}_k \triangleq \bar{y} - F_{y,k}^{-1}(\alpha)$ . Além disto, em cada instante  $k$ , as funções em (2) são transformadas para,

$$\begin{aligned} F_k(m_x(k), m_u(k)) &\triangleq E\{f_k(x(k), u(k))\} \\ F_N(m_x(N)) &\triangleq E\{f_N(x(N))\} \end{aligned} \quad (7)$$

A solução em malha aberta do problema em consideração é dada por  $u^*(k) = m_u(k)$ , onde a sequência  $\{m_u(k), k=0, \dots, N-1\}$  resolve o seguinte problema determinístico equivalente [Lassere, 1984]:

$$\begin{aligned} \text{Min} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(m_x(k), m_u(k)) + F_N(m_x(N)) \\ \text{s.a.} \\ m_x(k+1) = Am_x(k) + Bm_u(k) + m_w(k) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} m_x(0) &= x_0 \\ m_u(k) &\in U \\ C m_x(k+1) &\in Y_k \end{aligned}$$

É importante, neste ponto, salientar que (8) exibe as mesmas propriedades estruturais do problema estocástico estabelecido anteriormente. Além disto, (7) preserva passíveis propriedades de convexidade da função objetivo (2) e (6) preserva a linearidade das restrições. Estes aspectos tornam o resultado apresentado em [Lassere, 1984] extremamente atrativo, desde que (8) pode ser resolvido eficientemente, independente de qual seja sua dimensão [Geromel e Valente Ferreira, 1986].

Entretanto, sérias dificuldades podem ocorrer. Pode-se verificar diretamente de (6) que se para algum  $k \geq 1$

$$\alpha > F_{y,k}(\Delta y/2) \quad (9)$$

onde  $\Delta y \triangleq \bar{y} - \underline{y}$ , então  $Y_k \equiv \emptyset$  (conjunto vazio). Neste caso (8) é infactível e consequentemente falha no sentido de fornecer uma política de controle ótima. Além do mais, o lado direito de (9) é uma função decrescente de  $V_y(k)$  que é dada por  $V_y(k) = CV_x(k)C'$  com

$$\begin{cases} V_x(k+1) = AV_x(k)A' + V_w \\ V_x(0) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

sendo então óbvio que  $V_y(k+1) \geq V_y(k) \forall k \geq 0$ . Tem-se então, como resultado, que o pior caso, em termos de projeto, ocorrerá para  $k = N$ , isto é,

$$\alpha > \min_k F_{y,k}(\Delta y/2) = F_{y,N}(\Delta y/2) \quad (11)$$

Conclui-se, da desigualdade que em muitos casos o problema (8) pode tornar-se infactível. Por exemplo, supondo-se  $A$  instável e o par  $(A,C)$  observável, a sequência  $\{V_y(k)\}_0^\infty$  é ilimitada e por conseguinte o lado direito de (11) tenderá para  $1/2$  (dependendo do valor de  $N$ ). Isto implicará na infactibilidade de (8), por menor que seja o grau de violação da restrição de probabilidade (3), fixado pelo projetista.

Na seção seguinte, mostra-se que esta indesejável característica pode ser superada a partir de uma apropriada seleção do bloco de realimentação da estrutura de controle ilustrada na Figura 1.1.

### 3. PRINCIPAIS RESULTADOS

A discussão anterior deixa clara a necessidade de controlar a variância de estado. Para este propósito assume-se perfeita informação de estado e coloca-se

$$u(k) = m_u(k) - G(x(k) - m_x(k)) \quad (12)$$

onde o ganho  $G' \in \mathbb{R}^n$ , invariante no tempo, deve ser determinado. Desde que (12) é linear, o sistema em malha fechada permanece gaussiano e  $V_y(k) = CV_x(k)C'$  e  $V_u(k) = GV_x(k)G'$ , devem agora satisfazer a

$$\begin{cases} V_x(k+1) = A_f V_x(k) A_f' + V_w \\ V_x(0) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

com  $A_f \triangleq A - BG$ . Uma vez que as variâncias de saída  $f$  e controle tenham sido controladas (após a escolha de  $G$ ), as trajetórias ótimas em malha aberta de  $m_u(k)$  e  $m_x(k)$  resolvem (8) onde a restrição sobre  $m_u(k)$  é substituída por  $m_u(k) \in U_k$ . Além disto (12) implica que  $u(k)$  é uma variável aleatória que satisfaz a restrição probabilística (3) sempre que  $m_u(k) \in U_k$  onde

$$U_k \triangleq \{u \in \mathbb{R} \mid \underline{u}_k \leq u \leq \bar{u}_k\} \subseteq U \quad (14)$$

com  $\underline{u}_k \triangleq \bar{u} + F_{u,k}^{-1}(\beta)$  e  $\bar{u}_k \triangleq \underline{u} - F_{u,k}^{-1}(\beta)$ . Definindo  $\Delta u \triangleq \bar{u} - \underline{u}$ , se para algum  $k \geq 0$ , ocorrer  $\beta > F_{u,k}(\Delta u/2)$  então  $U_k \equiv \emptyset$ . O pior caso aqui ocorre para  $k = N-1$ .

Conclui-se então que se  $U_k$  e/ou  $Y_{k+1}$  são conjuntos vazios para algum  $0 \leq k \leq N-1$ , o problema (8) torna-se infactível, pois

$$(\alpha + \beta) > F_{y,N}(\Delta y/2) + F_{u,N-1}(\Delta u/2) \quad (15)$$

O lado direito de (15) pode ser usado como uma medida de infactibilidade de (8). Sua maximização fornece o ganho de realimentação  $G$ .

De modo a facilitar a determinação de  $G$ , considera-se o seguinte problema de variância mínima

$$\min_G \{V_y(k+1) + rV_u(k)\} \quad (16)$$

onde  $r \in \mathbb{R}_+$  deve ser determinado. A solução ótima de (16) sujeita a restrição dinâmica (13) é dada por

$$G = G(r) = \frac{\langle B, C' \rangle}{\langle B, C' \rangle^2 + r} CA \quad (17)$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  indica o produto escalar. Esta solução mostra que  $V_y(N)$  decresce somente se  $V_u(N-1)$  decrescer e vice-versa. De fato  $r \in \mathbb{R}_+$  pode ser interpretado como um parâmetro de compromisso entre as variâncias de controle e saída e deve ser determinada tendo em mente que as faixas  $\Delta y$  e  $\Delta u$  dos conjuntos  $Y$  e  $U$  podem ser completamente diferentes.

Desde que tanto  $V_y(N)$  quanto  $V_u(N-1)$  dependem de  $r$ , quando  $r$  varia, o conjunto de todas as variâncias de saída e controle geradas pelo ganho parametrizado  $G(r)$  pode ser definido como

$$\Gamma_N \triangleq \{(\theta, \gamma) \mid \theta = V_y(N); \gamma = V_u(N-1), r \in \mathbb{R}_+\} \quad (18)$$

Associado a qualquer elemento  $(\theta, \gamma) \in \Gamma_N$ , de

finem-se as funções

$$v_y(\theta) \triangleq F_{y,N}(\Delta y/2) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Delta y/2\sqrt{\theta}} \exp(-\tau^2/2) d\tau \quad (19)$$

e  $v_u(\gamma) = F_{u,N-1}(\Delta u/2)$ . Consequentemente, usando o ganho de realimentação parametrizado (17), o máximo do lado direito de (15) é obtido para  $r = r^*$  associado à solução de

$$\text{Max}_r \{v_y(\theta) + v_u(\gamma) \mid (\theta, \gamma) \in \Gamma_N\} \quad (20)$$

É importante notar que a solução deste problema é numericamente simples de calcular desde que envolve um procedimento de pesquisa no  $\mathbb{R}_+$ . Adicionalmente, (20) fornece uma informação muito importante acerca da factibilidade de (8). De fato, sendo  $(\theta^*, \gamma^*)$  sua solução ótima, o projetista deve se restringir a usar  $\alpha \leq v_y(\theta^*)$  e  $\beta \leq v_u(\gamma^*)$ , pois caso contrário, (8) é infactível.

Assim, partindo-se de (12), a solução ótima em malha aberta do problema de controle estocástico formulado anteriormente é dado por

$$u(k) = m_u(k) - G^*(x(k) - m_x(k)) \quad (21)$$

onde a média  $m_u(\cdot)$ ,  $m_x(\cdot)$  e  $G^*$  são determinados pelo seguinte procedimento:

**PASSO 1 (Problema de Variância):** Seja  $(\theta^*, \gamma^*)$  a solução ótima de

$$\text{Max} \{v_y(\theta) + v_u(\gamma) \mid (\theta, \gamma) \in \Gamma_N\}$$

calcula-se, a partir de (17),  $G^* = G(r^*)$  e seleciona-se  $\alpha, \beta$  tal que  $\alpha \leq v_y(\theta^*)$  e  $\beta \leq v_u(\gamma^*)$ . De (13) calculam-se as variâncias de saída e controle e  $F_{y,k+1}^{-1}(\alpha)$ ,  $F_{u,k}^{-1}(\beta)$  para  $k=0, 1, \dots, N-1$ .

**PASSO 2 (Problema da Média):** Definido os conjuntos  $U_k$  e  $Y_{k+1}$ .

Resolve-se, por meio de qualquer método aplicável, o problema determinístico equivalente:

$$\text{Min} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(m_x(k), m_u(k)) + F_N(m_x(N))$$

s.a.

$$m_x(k+1) = A m_x(k) + B m_u(k) + m_w(k)$$

$$m_x(0) = x_0$$

$$m_u(k) \in U_k$$

$$C m_x(k+1) \in Y_{k+1}$$

Neste ponto, alguns comentários são importantes. Primeiro, o problema de otimização a ser resolvido no passo 1, pode ser simplificado usando a conhecida desigualdade de Tcheby-

cheff. Assim, partindo-se de (19) obtém-se:

$$v_y(\theta) = \frac{1}{2} \text{prob} \left\{ |y - m_y| \leq \frac{\Delta y}{2} \right\} + \frac{1}{2} \\ \geq 1 - 2 \cdot \frac{\theta}{\Delta y^2} \quad (22)$$

e  $v_u(\gamma) \geq 1 - 2 \cdot \frac{\gamma}{\Delta u^2}$ , consequentemente.

$$v_y(\theta) + v_u(\gamma) \geq 2 \left\{ 1 - \frac{\theta}{\Delta y^2} - \frac{\gamma}{\Delta u^2} \right\} \quad (23)$$

O maior limitante inferior (23) da função objetivo de (20) é obtida quando (16) é resolvida para  $r = r_0$  dado por

$$r_0 = \frac{\Delta y^2}{\Delta u^2} \quad (24)$$

Segundo, o resultado apresentado em [Lassere, 1984] pode ser visto como um caso especial do procedimento proposto. De fato, fixando-se  $r = +\infty$ , então  $V_u(k) = 0$  e  $U_k \equiv 0 \forall \beta \in [1/2, 1)$  e  $0 \leq k \leq N-1$ . Neste caso o problema a ser resolvido no passo 2 reduz-se a (8).

#### 4. IMPERFEITA INFORMAÇÃO DE ESTADO

Nesta seção discute-se a aplicação da estrutura de controle, proposta anteriormente, para resolver o problema de controle ótimo estocástico sob o enfoque de imperfeita informação de estado. A importância de tratar esta classe de problemas advém do fato de que na prática somente algumas variáveis de estado do sistema são verdadeiramente medidas e tais medidas são, em geral, inexatas.

Seja, então, a equação da saída em (1) acrescida de um ruído aditivo,  $v(k) \in \mathbb{R}$ , com distribuição normal dada por uma média nula e variância invariante no tempo  $V_v > 0$ . Assim sendo, o vetor de estado do sistema deixa de ser diretamente acessível para os propósitos de controle, que por seu turno passa a depender, para cada instante  $k$ , de um vetor de medidas disponíveis  $I_k$ , que guarda medidas passadas do controle e da saída, isto é,

$$I_k \triangleq \{u(0), u(1), \dots, u(k-1), \\ y(0), y(1), \dots, y(k)\} \supset I_{k-1} \quad (25)$$

onde a propriedade de inclusão assinala o fato de que cada sequência de informação contém seu predecessor.

Uma vez que, a estrutura do sistema é linear e as incertezas envolvidas são gaussianas (não correlatas), então a função densidade de probabilidade do estado condicionado a (25) será igualmente gaussiana e pode portanto ser parametrizada pela média e covariância condicional, geradas no tempo pela equação do filtro de Kalman, como segue [Bertsekas, 1976]

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + m_w(k) + P_x(k+1)C'v_v^{-1} \cdot [y(k+1) - C(A\hat{x}(k) + Bu(k))] \quad (26)$$

$$\begin{cases} P_x(k+1) = \bar{P}_x(k+1) - \bar{P}_x(k+1) \cdot C'[C\bar{P}_x(k+1)C' + V_v]^{-1}C\bar{P}_x(k+1) \\ \bar{P}_x(k+1) = AP_x(k)A' + V_w \end{cases} \quad (27)$$

onde  $P_x(k) = E\{(x(k) - \hat{x}(k))(x(k) - \hat{x}(k))'\}$ ,  $\hat{x}(k) = E\{x(k) | I_k\}$  e tendo como condições iniciais

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = m_x(0) + P_x(0)C'v_v^{-1}[y(0) - Cm_x(0)] \\ P_x(0) = V_x(0) - V_x(0)C'[CV_x(0)C' + V_v]^{-1}CV_x(0) \end{cases} \quad (28)$$

onde  $m_x(0)$  e  $V_x(0)$  denotam a estatística do estado inicial  $x(0)$ .

Desde que as equações (26) e (27) resumem toda informação disponível ( $I_k$ ), no instante  $k$ , sobre o comportamento futuro do sistema [Striebel, 1975], pode-se então estender a aplicação do procedimento proposto, no item anterior, para tratar este caso. De fato, com o conhecimento da função densidade de probabilidade condicional do estado, a redução do problema estocástico ao problema determinístico equivalente (passo 2) é análoga ao estabelecido previamente.

Para o problema da Variância (passo 1), a utilização do Teorema da Separação [Astron, 1970] permite dividi-lo em dois problemas independentes: um de estimação, de onde obtém-se a estimativa condicionada do estado (26) e outro de controle, de onde obtém-se o ganho de realimentação parametrizado  $G(r)$  (assumindo-se exata informação de estado). Assim a política ótima de controle que deve atuar no sistema é dada por

$$u(k) = m_u(k) + G(r)(\hat{x}(k) - m_x(k)) \quad (29)$$

com  $G(r)$  dado por (17). Segue ainda, que o ganho ótimo  $G(r^*)$  obtido como resultado do problema (20), depende da evolução das variâncias de controle  $V_u(k) = GV_x(k)G'$  e de saída  $V_y(k) = CV_x(k)C' + V_v$  que neste caso devem satisfazer

$$\begin{cases} V_x(k+1) = A_f V_x(k)A_f' + BGP_x(k)G'B' + V_w(k) \\ V_x(0) = 0 \end{cases} \quad (30)$$

onde  $V_x(k) = E\{(x(k) - m_x(k))(x(k) - m_x(k))'\}$ ,  $A_f = A - BG$ . E  $P_x(k) \geq 0$ , dada por (27) e (28).

É interessante, por fim, assinalar que uma solução sub-ótima para o passo 1, pode ser dada como segue: calcula-se (20) como se o estado real fosse acessível (perfeita informação de estado), obtendo-se como solução o par  $(\theta^*, \gamma^*)$  com  $r = r^*$ , que é exatamente

o mesmo obtido na seção 3. Substitui-se então  $x(k)$  em (21) pela estimativa  $\hat{x}(k)$  e tem-se a política de controle que deve atuar no sistema.

## 5. APLICAÇÃO

Nesta seção considera-se um modelo simplificado de uma unidade hidroelétrica denominada São Simão, localizada na região sudeste do país. São Simão possui um reservatório de regularização cuja dinâmica satisfaz [Halliburton, 1984]:

$$x(k+1) = x(k) - u(k) + w(k) \quad (31)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}$  representa o volume de água armazenado,  $u(k) \in \mathbb{R}$  representa o volume de água turbinado. A variável  $w(k)$ , por hipótese gaussiana, denota os aportes de água (chuva, evaporação, etc.) da usina. A partir de um histórico ano/mês, contendo informações sobre esta última variável, um modelo linear autoregressivo de ordem 10 foi estabelecido para representá-la [Silva F9, 1982].

$$w(k) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_{10} z^{-10}} \theta(k) + m_w(k) \quad (32)$$

com  $\theta(k)$  denotando o ruído branco gaussiano e  $m_w(k) = E\{w(k)\}$ .

Reduzindo-se então através de simples transformações a equação (32) para uma representação equivalente na forma de estados, obteve-se, adicionando (31), um modelo completo da usina de dimensão 11. Além disto, considera-se que o estado do reservatório é medido através do seguinte dispositivo:

$$y(k) = x(k) + v(k) \quad (33)$$

onde  $v(k) \in \mathbb{R}$  denota o erro nas medidas observadas, sendo gaussiana com média nula e variância  $V_v$ . Todas as variáveis são dadas em  $10^9 m^3$ .

O objetivo é maximizar a esperança matemática da função de geração de potência [Geromel e Luna (1981); Geromel e Valente Ferreira (1986)]

$$J(u) = \text{Max}_{u(k)} E \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} u(k)h(x(k)) \right\} \quad (34)$$

medida em  $10^9$  watts. A tabela 1, a seguir, fornece os dados numéricos do modelo.

A seguir são fornecidos os resultados obtidos a partir do procedimento proposto aplicado a este exemplo, tanto para o enfoque de perfeita quanto imperfeita informação de estado.

### - Perfeita Informação de Estado

Supondo-se aqui  $v(k) = 0$ , inicialmente tentou-se resolver o procedimento proposto

TABELA 1 Dados do problema

$m_w(k)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	4.0	4.5	4.5	3.5	2.5	2.0	2.0	2.0	2.0	2.0	2.5	3.0
$\sqrt{v_\theta} = 0.65$ $x(0) = 10$ $\underline{u} = 2$ $\bar{u} = 7$ $\underline{y} = 7$ $\bar{y} = 13$												
$h(x) = (0.65E-2)x + 0.166$ $N = 12$ $\alpha = 0.95$ $\beta = 0.5$												
$a_1 = 0.585$ $a_2 = 0.034$ $a_{10} = -0.09$												

por Lassere (1984). Fixando-se  $r = +\infty$  obteve-se  $v_y(\theta) \approx 0.7208$  e  $v_u(\gamma) = 1.00$ . Desde que,  $0.95 = \alpha > v_y(\theta)$ , o problema (8) é infactível e o procedimento falha em fornecer uma política ótima de controle.

Em seguida, aplicou-se o algoritmo proposto. A Figura 5.1 mostra as trajetórias de estado e controle correspondentes a duas situações diferentes.

A solução ótima do problema da variância (passo 1) obtida é tal que  $v_y(\theta^*) \approx 0.99964$  e  $v_u(\gamma^*) \approx 0.99932$  com  $r = r^* \approx 0.773$ . Usando a solução aproximada (24) obteve-se  $v_y(\theta) \approx 0.9949$  e  $v_u(\gamma) \approx 0.9999$  com  $r = r_0 = 1.44$ . Consequentemente, para ambas as casos o problema da média (passo 1) será factível.

Um ponto a ser assinalado, com respeito às soluções do passo 1, é que a despeito da diferença entre a solução ótima e a solução aproximada ser significativa, os valores obtidos para  $v_y(\theta^*) + v_u(\gamma^*)$  e  $v_y(\theta) + v_u(\gamma)$  não são significativos. Portanto, conclui-se que para este exemplo, o valor máximo do limite inferior da função (23) constitui uma boa aproximação para o problema (20).

- Imperfeita Informação de Estado

Assume-se para este caso que o ruído nas medidas é caracterizado pela seguinte estatística (gaussiana):  $m_v(k) = 0$  e  $\sqrt{v_v} = 0.1$ . Como resultado do procedimento proposto obteve-se as seguintes trajetórias de estado e controle, ilustradas na Figura 5.2.

A solução ótima do problema da variância  $v_y(\theta^*) \approx 0.99962$  e  $v_u(\gamma^*) \approx 0.99931$  com  $r = r^* \approx 0.767$ . Para a solução aproximada (maior limitante inferior de (23)) obteve-se  $v_y(\theta) \approx 0.9947$  e  $v_u(\gamma) \approx 0.9998$  associado a  $r = r_0 = 1.44$ . Estes resultados garantem a factibilidade do problema da média, desde que  $\alpha$  e  $\beta$  selecionados, satisfazem (15). Como observação final, nota-se que para solução sub-ótima, o parâmetro de ponderação é  $r^* = 0.773$  (perfeita informação de estado).

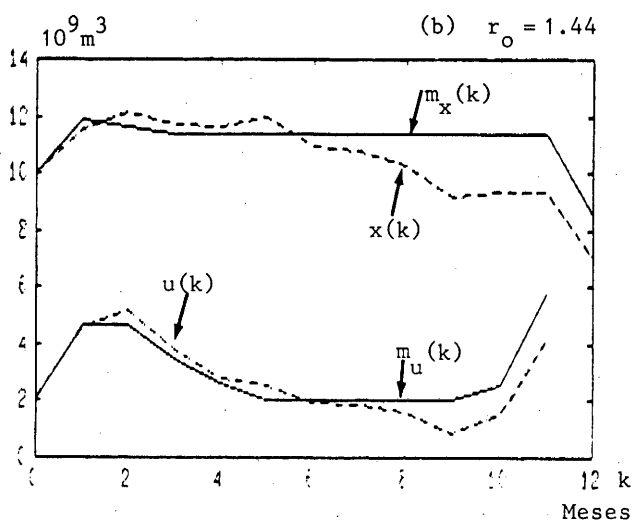
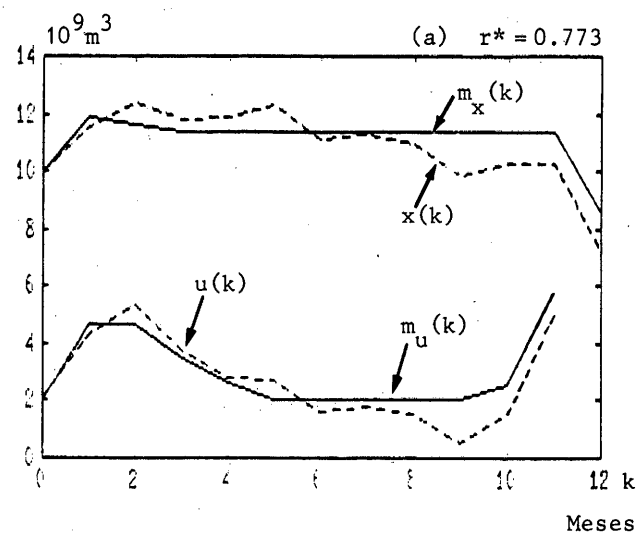


Fig. 5.1: Trajetórias ótimas

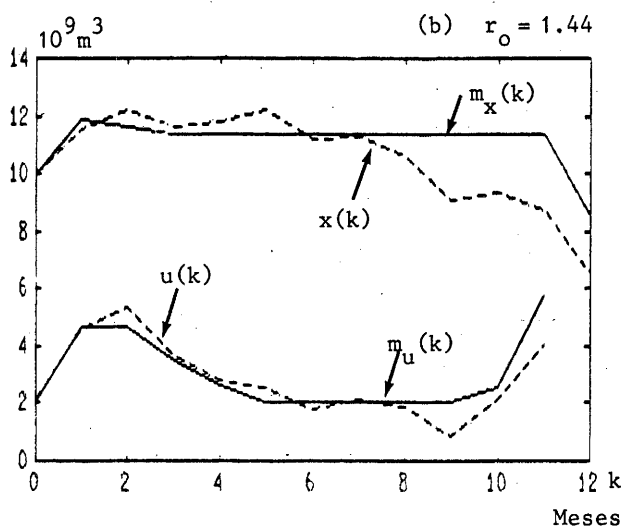
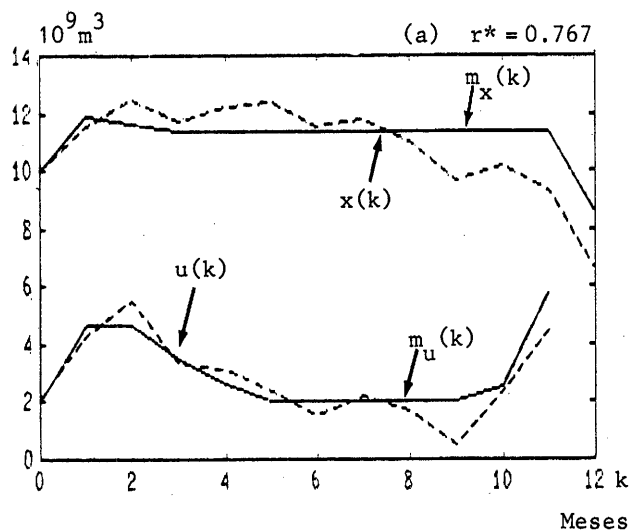


Fig. 5.2: Trajetórias ótimas

## 6. CONCLUSÃO

Neste artigo mostrou-se que é possível de finir um ganho de realimentação linear invariante no tempo, o qual torna possível a determinação de soluções ótimas em malha aberta de problemas de controle estocásticos como o formulado em [Lassere, 1984]. A idéia consiste em fazer a matriz ganho  $G(\cdot)$  dependente de um parâmetro positivo que é determinado tal que a medida de inactibilidade do problema determinístico associado seja minimizada.

É importante lembrar que modelos mais complicados podem ser considerados, como o discutido na seção 4. Além disso, o procedimento apresenta a vantagem de poder ser aplicado a problemas multi-dimensionais. Supondo-se (1) representando um modelo MIMO onde as variáveis de controle e saída estão sujeitas ao mesmo tipo de restrição probabilística (3). Então (16) torna-se

$$\min_G \{T_r(QV_y(k+1)) + T_r(RV_u(k))\}$$

onde  $Q$  e  $R$  são matrizes simétricas definidas positivas, a serem determinadas de tal modo que uma medida da inactibilidade das restrições probabilísticas seja minimizada. Adotando-se uma medida adicional e usando a desigualdade de Tchebycheff segue que

$$Q_o^{-1} = \text{diag} \{\Delta y_i^2\}; \quad R_o^{-1} = \text{diag} \{\Delta u_i^2\}$$

## 7. REFERÊNCIAS

- Astrom, K.J. (1970). "Introduction to Stochastic Control", Mathematics in Science and Engineering, vol. 70, Academic Press, N.Y.
- Bertsekas, D.P. (1976). "Dynamic Programming and Stochastic Control", Mathematics in Science and Engineering, vol. 125, Academic Press, N.Y.
- Geromel, G.C. & Luna, H.P.L. (1981). "Projection and Duality Techniques in Economic Equilibrium Models", *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics*, vol. SMC-11, nº 5.
- Geromel, J.C. & Valente Ferreira, P.A. (1986). "A Dual-Projection Method for Large Systems Optimization", *Journal on Theory and Advanced Technology*, Special Issue on Large Scale Systems, Tokyo, vol. 2, nº 2.
- Geromel, J.C. & Silva Fº, O.S. (1988). "Partial Closed-Loop Control Structure for Linear Stochastic Systems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, (to appear).
- Halliburton, T.S. & Sirisena H.R. (1984). "Development of a Stochastic Optimizarion for Multireservoir Scheduling, *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-29, nº 1.
- Lassere, J.B.; Bes C. & Roubellat, F. (1984). "On the Open-Loop Solution of Linear Stochastic Optimal Control Problems". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. AC-29, nº 6.
- Silva Fº, O.S. (1982). "Modelamento Linear e Controle Ótimo Estocástico de Usinas Hidráulicas com Representação Individualizada", *Tese de Mestrado, FEC/UNICAMP*.
- Striebel, C. (1975). "Optimal Control of Discrete Time Stochastic Systems", *Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems*, Springer-Verlag, N.Y., vol. 110.