
OTIMIZAÇÃO DE MANOBRAS DE SATÉLITES ESTABILIZADOS POR "SPIN", UTILIZANDO BOBINA MAGNÉTICA

Víctor O. Gamarra Rosado

Depto. de Mecânica
FEG/UNESP - CP 205
12500 -Guaratinguetá - SP

Atair Rios Neto

Rua Atibaia, 220
Jardim Apolo
12243 - São José dos Campos - SP

Resumo - Apresenta-se o desenvolvimento de uma lei de controle em malha aberta que minimiza o tempo de manobra de atitude de um satélite estabilizado por "spin" através da otimização dos intervalos e polaridades de funcionamento de um atuador do tipo bobina magnética. O torque de controle que executa a manobra é gerado através da interação do campo geomagnético com o momento magnético desta bobina. A proposta de otimização da manobra consta de duas fases ambas com abordagem subótimas: primeiro, otimização com a determinação dos intervalos de funcionamento da bobina, cobrindo separadamente cada período orbital e, segundo, otimização global da manobra, utilizando como parâmetros de partida os intervalos obtidos na fase anterior. Expõem-se os fundamentos teóricos para a formulação do problema, a modelagem da dinâmica de atitude do satélite, o tratamento de otimização para obter a lei de controle e os testes numéricos para avaliar o comportamento do procedimento.

Abstract - The development of an open-loop control law that minimizes the attitude maneuver time of a spin-stabilized satellite is presented: this is done through the optimization of both polarity and lengths of intervals of actuation of a magnetic coil type actuator. The control torque that executes the maneuver is generated by interaction between the magnetic moment of this coil and the geometric field. The proposed maneuver optimization consists of two phases, both with suboptimal approaches: the optimization of the coil's functioning intervals, covering every orbital period separately, and the maneuver global optimization, using the intervals obtained in the previous phase as the starting parameters. The theoretical fundamentals for the formulation of the problem, the modelling of the satellite attitude dynamics, the optimization treatment to obtain the control law and numerical tests to evaluate the behavior of the procedure are presented.

1. INTRODUÇÃO

A interação entre o momento magnético gerado a bordo e a indução do campo geomagnético tem sido muito utilizada para o controle de atitude de satélites. Renard (1967) obteve uma lei de controle de atitude através do processo "averaging", o qual considerava invariante o deslocamento do eixo "spin" do satélite durante um período orbital. Shigehara (1972) desenvolveu uma lei de controle do tipo liga-desliga, para um satélite estabilizado por "spin", através do critério de convergência assintótica. Sua ação leva a quatro chaveamentos por órbita, porém não a cada quarto de órbita como o sistema de controle desenvolvido por Renard. Junkins e Turner (1986) desenvolveram uma formulação para a otimização de manobras magnéticas para um satélite estabilizado por "spin" usando o Princípio de Pontryagin.

O presente trabalho difere daqueles localizados na literatura quanto ao procedimento para determinação da lei de controle em malha aberta, para a manobra de atitude de um satélite rígido, axialmente simétrico e estabilizado por "spin". De princípio toma-se a abordagem subótima de parametrização da função de controle (Williamson, 1971; Rios Neto e Ceballos, 1979), usando-se em seguida um procedimento direto de solução numérica, resultando em cada iteração um problema de Programação Matemática.

2. MODELAGEM DA DINÂMICA DO SATÉLITE

Conforme a figura 1, considera-se o sistema inercial (X, Y, Z) com origem no centro da Terra, o eixo X na direção do equinócio Vernal, o eixo Y perpendicular ao eixo X , contido no plano equatorial, e o eixo Z na direção

do eixo "spin" da Terra; e o sistema de coordenadas associado ao satélite (x, y, z), tal que o eixo z define o eixo de "spin" do satélite (dado no sistema inercial pela ascensão reta α e a declinação δ), e o eixo x paralelo ao plano inercial (X, Y).

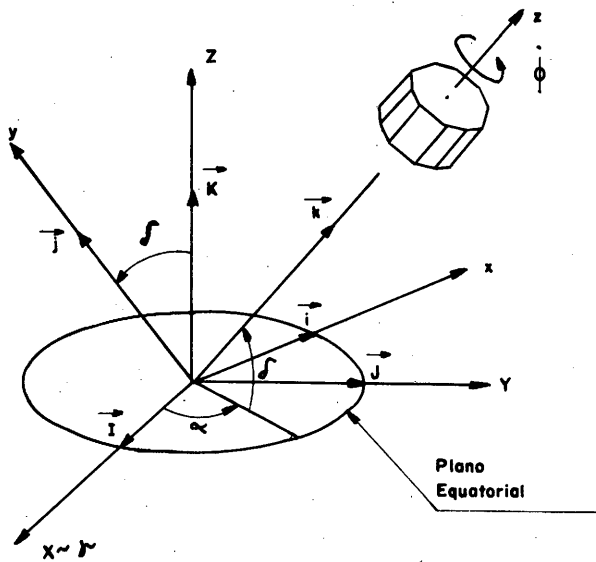


Fig. 1 - Representação do sistema inercial e o sistema associado ao satélite

Admite-se que o vetor do momento angular \vec{H} do satélite simétrico coincide com o eixo "spin" (Wertz, 1978), isto é:

$$\vec{H} = I_3 \dot{\phi} \vec{k} \quad (1)$$

onde I_3 é o momento principal de inércia na direção do vetor \vec{k} e $\dot{\phi}$ é a taxa do "spin" do satélite.

Sendo

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right) = \vec{T} \quad (2)$$

onde \vec{T} é o momento em relação ao centro de massa, resultante de todas as forças externas atuando no satélite, obtém-se

$$\dot{\vec{H}} = I_3 \left[\dot{\phi} \vec{k} + \dot{\phi} (\vec{\omega} \times \vec{k}) \right] \quad (3)$$

onde $\vec{\omega} = -\dot{\delta} \vec{i} + \dot{\alpha} \cos \delta \vec{j} + \dot{\alpha} \sin \delta \vec{k}$ é a velocidade angular do sistema associado ao satélite em relação ao sistema inercial. Combinando estas expressões obtém-se as componentes do torque no sistema associado ao satélite, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{T_x}{(I_3 \dot{\phi} \cos \delta)} \\ \dot{\delta} &= \frac{T_y}{(I_3 \dot{\phi})} \end{aligned} \quad (4)$$

Note que estas expressões (4) representam as componentes aproximadas de deslocamento do eixo para satélites estabilizados por "spin", onde os termos do momento do "spin" geralmente são dominantes.

3. MODELAGEM DOS TORQUES DE CONTROLE

3.1. Torque Magnético

O torque magnético é dado por (Wertz, 1978)

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B} = mB \sin \theta \quad (5)$$

onde \vec{m} é o momento magnético da bobina, \vec{B} é a indução geomagnética e θ o ângulo entre os dois vetores. O momento magnético da bobina é dado por

$$\vec{m} = p_m m \vec{k} \quad (6)$$

onde m é a magnitude do momento magnético, p_m é a polaridade e \vec{k} é o vetor unitário do eixo "spin".

3.2. Dipolo Geomagnético

Considera-se o campo geomagnético representado por um dipolo magnético \vec{M} , inclinado de ξ em relação ao eixo de rotação terrestre, e o sistema da órbita (x_0, y_0, z_0), com o eixo x_0 na direção do nodo ascendente e o eixo z_0 normal ao plano da órbita (figura 2).

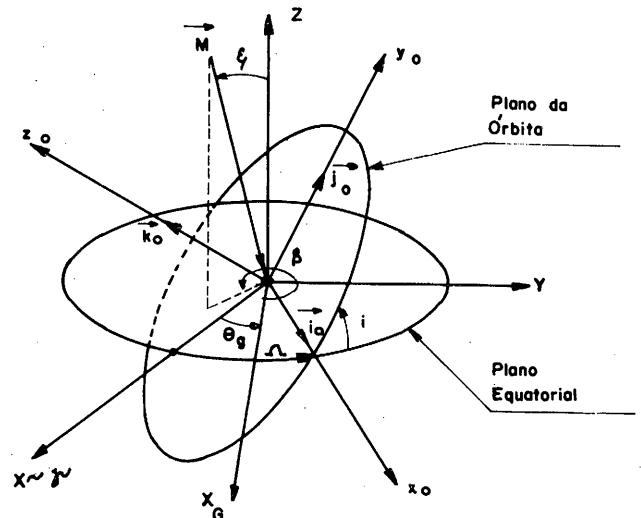


Fig. 2 - Sistemas de referência

O dipolo geomagnético representado no sistema inercial é dado por (Wertz, 1978)

$$\vec{M}_I = M \left[-\sin \xi \cos (\beta + \theta_g), \right. \\ \left. \sin \xi \sin (\beta + \theta_g), -\cos \xi \right] \quad (7)$$

onde $\xi = 11,4^\circ$; $\beta = 289,3^\circ$; $M = 8,1 \times 10^{15}$ Wb.m e θ_g é o tempo sideral de Greenwich.

3.3. Componentes Instantâneas do Torque de Controle

Estas expressões (Renard, 1967) consideram fixa a magnitude do momento magnético da bobina m , onde $\vec{k} = [\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta]$ fornece a orientação do eixo "spin" do satélite, \vec{B}_0 representa a indução do campo geomagnético no sistema da órbita, e as componentes do torque de controle dadas a cada instante são

$$(\vec{T})_0 = m (\vec{k} \times \vec{B})_0 \quad (8)$$

onde

$$\vec{B}_0 = \left[\left(\frac{3My_0}{r^3} \right) (\sin \chi \cos \chi) + \left(\frac{Mx_0}{r^3} \right) (3\cos^2 \chi - 1), \right. \\ \left. \left(\frac{My_0}{r^3} \right) (3\sin^2 \chi - 1) + \left(\frac{3Mx_0}{r^3} \right) (\sin \chi \cos \chi), \right. \\ \left. \frac{-Mz_0}{r^3} \right] \quad (9)$$

sendo $\chi = \omega + \nu$ o ângulo entre o nodo ascendente e o raio vetor do satélite, ν é a anomalia verdadeira, ω é o argumento do perigeu, r é a distância do satélite desde o centro da Terra, e Mx_0 , My_0 e Mz_0 são as componentes do dipolo geomagnético no sistema da órbita. Ver figura 2.

3.4. Considerações Sobre o Torque de Controle (Renard, 1967)

Ao considerar um satélite estabilizado por "spin", pode-se desprezar a influência da atitude do satélite sobre a órbita. Contudo, existe forte influência dos parâmetros orbitais sobre os torques perturbadores de atitude.

Para efeitos de cálculo do torque de controle, causados pelo campo geomagnético em períodos orbitais muito menores que um dia, a regressão nodal e a rotação apsidal são considerados desprezíveis. De igual forma considera-se, para efeitos de atualização dos parâmetros orbitais ao longo da manobra, que o argumento do perigeu e a ascensão reta do nodo ascendente sofrem variações seculares; o semi-eixo maior, a excentricidade e a inclinação da órbita são contantes.

4. PROCEDIMENTO DE CONTROLE

4.1. Procedimento Subótimo

A subotimização é feita pela transformação do problema de controle ótimo em problema de otimização de parâmetros, pela imposição de uma forma matemática parametrizada particular ao controle (Rios Neto e Ceballos, 1979).

O problema básico de controle ótimo consiste em encontrar a função ótima de controle $u(t)$ no intervalo $t_i \leq t \leq t_f$ de modo a satisfazer as condições a seguir

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & IP = IP(x_f, t_f) \\ \text{Sujeito a: } & \dot{x} = f(x, u, t) \\ & M(x_f, t_f) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

onde x é o vetor de estado, $n \times 1$; $x(t_i)$ e t_i são dados; x_f é o vetor de estado final; u é o vetor de controle, $p \times 1$; e M é o vetor de condições terminais, $m \times 1$.

Estendendo este problema para o caso de sistemas com parâmetros inerentes otimizáveis, a partir da substituição de $u(t)$ por $u(a, t)$ ou, em uma forma mais geral, por $u(a, x, t)$, obtem-se o problema a seguir

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & IP = IP(x_f, a_g) \\ \text{Sujeito a: } & \dot{x} = f(x, a_1, a_2, \dots, a_{g-1}, t) \\ & M(x_f, a_g) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

onde $x(t_i)$ e t_i são dados; a é o vetor $g \times 1$ de parâmetros a serem otimizados e a_g é o tempo final.

4.2. Problema Associado à Iteração Típica

A partir de uma perturbação linear das equações (11) de restrições e do índice de desempenho, respeitados os vínculos dinâmicos, obtem-se

$$\Delta M = M_{x_f} x_{f_a} \Delta a + M_{a_g} \Delta a_g \quad (12)$$

$$\Delta IP = IP_{x_f} x_{f_a} \Delta a + IP_{a_g} \Delta a_g$$

onde os subscritos referem-se a derivadas parciais de M , x_f e IP em relação a x_f , a e a_g .

A condição de caminhar na direção de satisfação dos vínculos e da minimização de IP sugere as seguintes imposições

$$\Delta M = \alpha M \quad , \quad -1 \leq \alpha \leq 0 \quad (13)$$

$$\Delta IP \geq \beta |\overline{IP}| \quad , \quad \beta < 0$$

Das equações anteriores pode ser proposto o problema associado a cada iteração típica, conforme a seguir

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } & G = W_1 |\Delta a_1| + W_2 |\Delta a_2| + \dots \\ & + W_g |\Delta a_g| + \overline{W} \Delta IP \quad , \quad \overline{W} > 0, W_i > 0 \\ \text{Sujeito a: } & M_{x_f} x_{f_a} \Delta a + M_{a_g} \Delta a_g = \alpha M \\ & IP_{x_f} x_{f_a} \Delta a + IP_{a_g} \Delta a_g \geq \beta |\overline{IP}| \end{aligned} \quad (14)$$

A transformação do problema (14) para um problema equivalente na forma usual de programação linear é imediata (Ceballos, 1980), resultando

$$\text{Minimizar: } G = \sum_{i=1}^{2g+1} \eta_i S_i, \quad \eta_i > 0$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^g A_{ji} S_i - \sum_{i=1}^g A_{ji} S_{g+i} = \alpha M_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^g B_i S_i - \sum_{i=1}^g B_i S_{g+i} - S_{2g+1} = \beta |\overline{IP}| \quad (15)$$

onde

$$A_{ji} = \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_f} \right) \left(\frac{\partial x_f}{\partial a_i} \right), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, g-1$$

$$A_{jg} = \left(\frac{\partial M_j}{\partial x_f} \right) \left(\frac{\partial x_f}{\partial a_g} \right) + \left(\frac{\partial M_j}{\partial a_g} \right)$$

$$B_i = \left(\frac{\partial IP}{\partial x_f} \right) \left(\frac{\partial x_f}{\partial a_i} \right), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, g-1$$

$$B_g = \left(\frac{\partial IP}{\partial x_f} \right) \left(\frac{\partial x_f}{\partial a_g} \right) + \left(\frac{\partial IP}{\partial a_g} \right)$$

4.3. CONTROLE INICIAL

Shigehara (1972) desenvolveu uma função de chaveamento deduzida de uma condição de estabilidade assintótica, a qual consiste em controlar a orientação do eixo "spin" em termos do momento angular \vec{H} , isto é, reduzir a diferença dada por $\vec{E} = \vec{H}_f - \vec{H}$ onde o estado inicial e final são dados por $\vec{H} = I\omega_x \vec{i} + I\omega_y \vec{j} + I\omega_z \vec{k}$ e $\vec{H}_f = I_3 \dot{\phi} \vec{k}_f$ respectivamente, sendo a orientação final do eixo "spin" dada por \vec{k}_f .

A função de chaveamento é definida por

$$S \equiv \vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{B}) \quad (16)$$

onde a lei de controle tipo "bang-bang", que governa a polaridade de m , é a seguinte:

$$\begin{aligned} p_m &= +1, \quad \text{quando } S > 0 \\ p_m &= -1, \quad \text{quando } S < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Desenvolvendo-se a equação (16), a qual reorienta o eixo "spin" de (Θ, Ψ) para (Θ_f, Ψ_f) , obtém-se

$$\left(\frac{S}{I_3 \dot{\phi}} \right) = (\sin \Psi_f \sin \Theta_f \cos \Theta - \cos \Theta_f \sin \Psi \sin \Theta) B_{01} +$$

$$(\cos \Theta_f \cos \Psi \sin \Theta - \cos \Psi_f \sin \Theta_f \cos \Theta) B_{02} +$$

$$(\cos \Psi_f \sin \Theta_f \sin \Psi \sin \Theta - \sin \Psi_f \sin \Theta_f \cos \Psi \sin \Theta) B_{03}$$

onde Ψ e Θ são os ângulos de azimute e co-elevação no sistema da órbita, respectivamente, e B_{01} , B_{02} e B_{03} são as componentes da indução geomagnética \vec{B} também no sistema da órbita.

4.4. Implementação da Lei de Controle

Para a manobra otimizada, segundo critério de tempo mínimo:

- i. Verifica-se das equações de vínculo (8) que a função Hamiltoniana é linear em m .
- ii. Considera-se a magnitude do momento magnético da bobina m como sendo constante, com duas polaridades: $|m(t)| = m$.
- iii. Das duas considerações anteriores, conclui-se que a lei geral de comando é do tipo "bang-bang" (Kirk, 1970).
- iv. Auxiliados pela lei controle com critério de estabilização desenvolvida por Shigehara (1972), propõe-se esta como a lei de controle inicial por período, conforme a seguir (ver figura 3)

$$\begin{aligned} m^1 &= +m, \quad \chi_i^1 \leq \chi \leq \chi_f^1 \\ m^2 &= -m, \quad \chi_i^2 \leq \chi \leq \chi_f^2 \\ m^3 &= +m, \quad \chi_i^3 \leq \chi \leq \chi_f^3 \\ m^4 &= -m, \quad \chi_i^4 \leq \chi \leq \chi_f^4 \end{aligned} \quad (18)$$

ou, no sentido inverso, conforme indique a função de chaveamento (17).

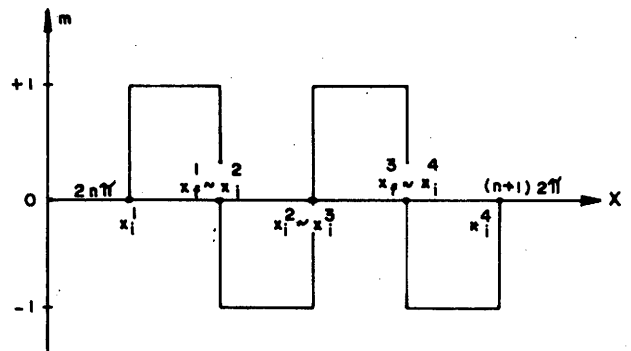


Fig. 3 - Implementação da lei geral de comando durante um período orbital

A otimização desta lei de controle inicial se executa em dois níveis de aproximação. O primeiro nível trata da otimização da manobra por período, conforme a seguir:

- i. Calcula-se os pontos de chaveamento do problema de teste conforme a função de chaveamento desenvolvida por Shigehara (1972);
- ii. Aplica-se o procedimento subótimo em cada período da órbita em que se realiza a manobra, através das suposições iniciais obtidas no item anterior; e
- iii. Assim sucessivamente, período por período, até finalizar a manobra.

Desta maneira, obtém-se o torque máximo na direção desejada, em cada período orbital. O segundo nível consiste na otimização global da manobra, utilizando os intervalos obtidos a cada período orbital no nível anterior como parâmetros de partida no procedimento subótimo.

5. TESTE DO PROCEDIMENTO

5.1. Problema de Teste

O problema de controle ótimo a ser tratado de uma forma geral é

$$\text{Minimizar: } IP = t_f \\ p_m(t)$$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x}_1 = T_y \frac{p_m(t)}{H} \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = T_x \frac{p_m(t)}{H \cos x_1}$$

onde $H = I_3 \dot{\phi}$.

$$\text{Condições iniciais: } x_1(t_i) = \delta_i, \quad x_2(t_i) = \alpha_i$$

$$\text{Condições finais: } x_1(t_f) = \delta_f, \quad x_2(t_f) = \alpha_f$$

onde $p_m(t)$ é a polaridade temporal do momento magnético da bobina, x_1 é a declinação, x_2 é a ascensão reta, H é o momento angular do satélite, e T_x e T_y representam as componentes do torque de controle no sistema associado ao satélite, conforme a seção 2.

5.2. Otimização por Período

A posição dos pontos de chaveamento, conforme a implementação da lei de controle inicial, é dado por

$$\begin{aligned} a_1 &= x_f^1 \\ a_2 &= x_f^2 \\ a_3 &= x_f^3 \end{aligned} \quad (20)$$

sendo o problema a minimizar o seguinte

$$\text{Minimizar: } IP = W_1 [x_{f1} - x_1(t_{fn})]^2 + \\ p_m(t) \quad W_2 [x_{f2} - x_2(t_{fn})]^2 \quad (21)$$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x} = f(x, a_1, a_2, a_3, t)$$

onde t_i e $x(t_i)$ são dados, x_{f1} e x_{f2} são valores do estado no instante final da manobra, e $x_1(t_{fn})$ e $x_2(t_{fn})$ indicam o estado final do n -ésimo período orbital.

5.3. Otimização Global

O problema de otimização a ser tratado em uma forma geral é dado por

$$\text{Minimizar: } IP = a_g$$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x} = f(x, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{g-1}, t) \quad (22)$$

$$M(x_f, a_g) = 0$$

dados t_i e $x(t_i)$.

Substituindo as condições do problema, obtém-se

$$\text{Minimizar: } IP = t_f \\ p_m(t)$$

$$\text{Sujeito a: } \dot{x}_1 = \frac{T_y}{H} \\ \dot{x}_2 = \frac{T_x}{H \cos x_1} \quad (23)$$

$$M_1(x_{f1}, t_f) = x_1(t_f) - x_{f1} = 0$$

$$M_2(x_{f2}, t_f) = x_2(t_f) - x_{f2} = 0$$

onde x_{f1} e x_{f2} são valores conhecidos do estado no final da manobra.

5.4. Modelo Simulado e Resultados do Controle Inicial

O problema de teste e a função de chaveamento que fornece o controle inicial são dados por Shigehara (1972): os dados do satélite são $I_3 = 8,1 \text{ kg.m}^2$, $\dot{\phi} = 12 \text{ rpm}$, $m = 25 \text{ A.m}^2$; órbita circular de 1.000 km de altitude, $i = 30^\circ$, $\Omega = 40,966^\circ$, sendo as condições iniciais e finais da manobra dadas por $\delta_i = 30^\circ$, $\alpha_i = 130,966^\circ$, $\delta_f = 60^\circ$, $\alpha_f = 310,966^\circ$.

Os resultados obtidos (figura 4) são os seguintes:

Tempo final da manobra:

$$t_f = 1.455 \text{ minutos} \cong 24 \text{ horas}$$

Valores do estado no instante final:

$$\delta_f = 60,743^\circ, \quad \alpha_f = 312,5^\circ$$

5.5. Resultados da Otimização por Período

Para este caso os resultados foram (figura 5):

Tempo final da manobra:

$$t_f = 1.290 \text{ minutos} \cong 21 \text{ horas}$$

Valores do estado no instante final:

$$\delta_f \cong 58^\circ, \quad \alpha_f \cong 308^\circ$$

5.6. Resultados da Otimização Global

Para este caso (figura 6) os resultados foram:

Tempo final da manobra:

$$t_f \cong 1.272 \text{ minutos} \cong 21 \text{ horas}$$

Valores do estado no instante final:

$$\delta_f \cong 60^\circ, \quad \alpha_f \cong 310^\circ$$

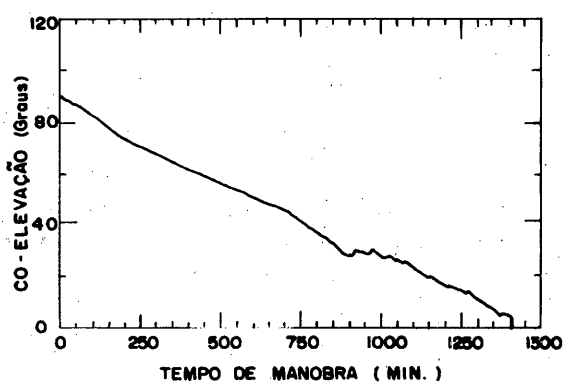
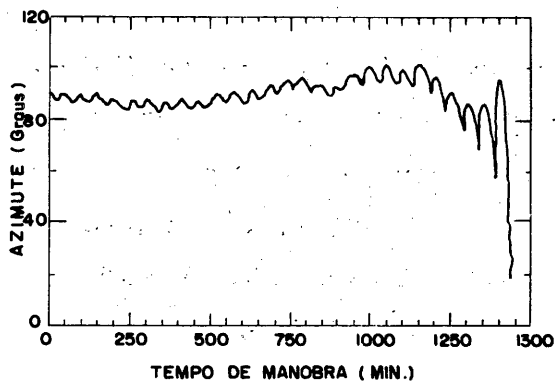
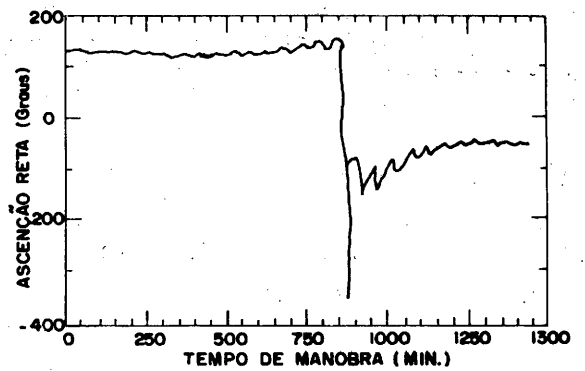
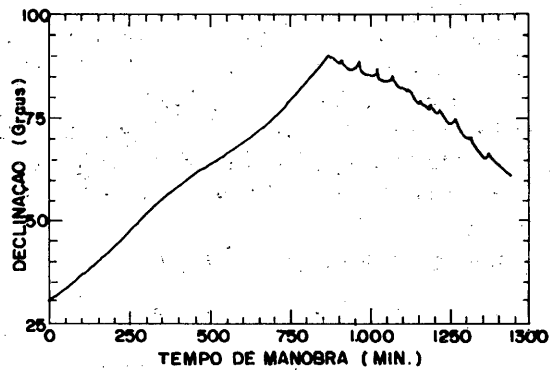
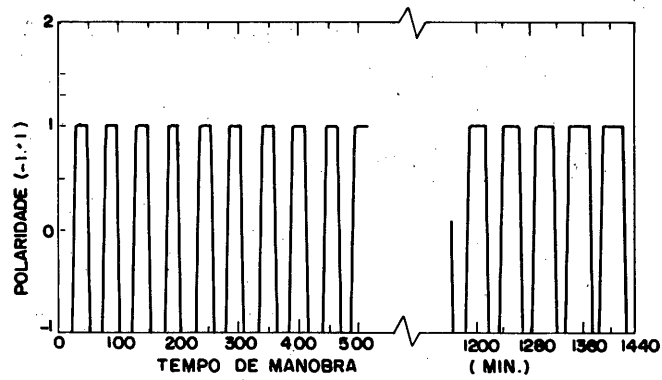


Fig. 4 - Respostas do controle inicial

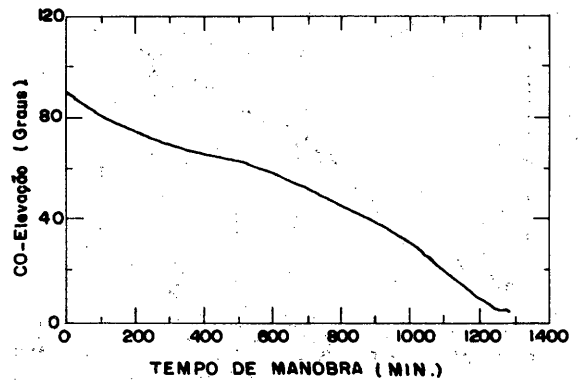
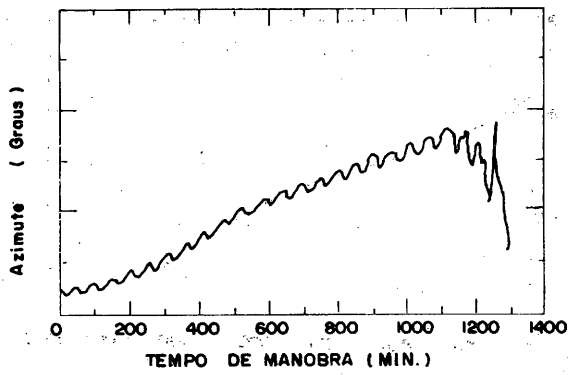
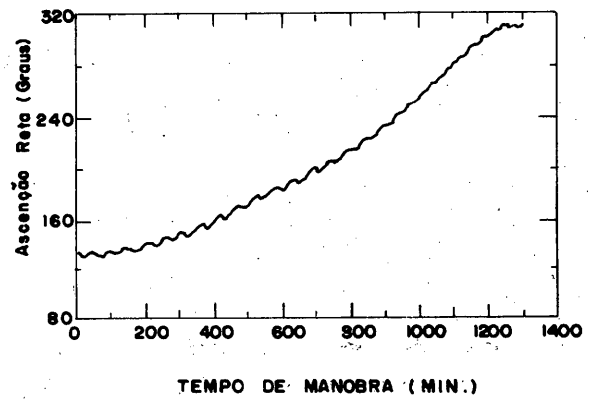
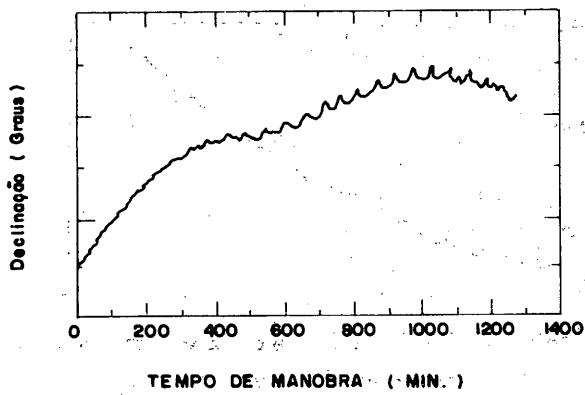
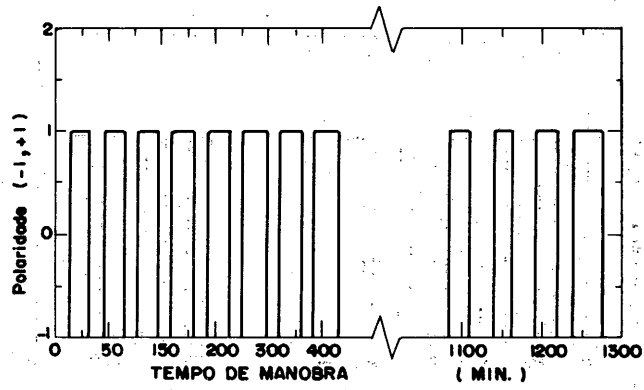


Fig. 5 - Respostas da otimização por período

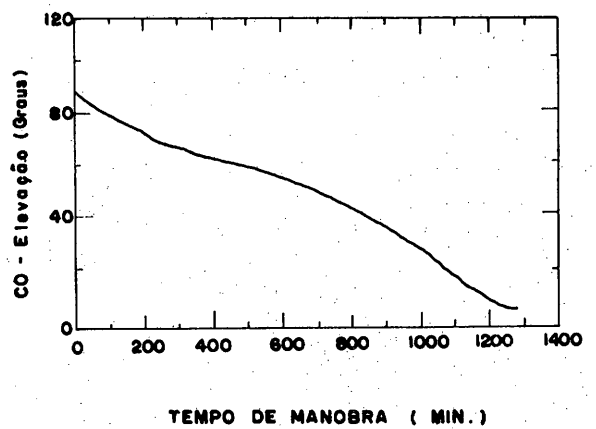
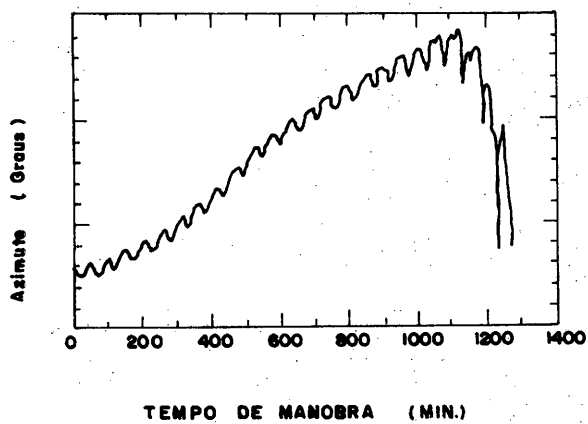
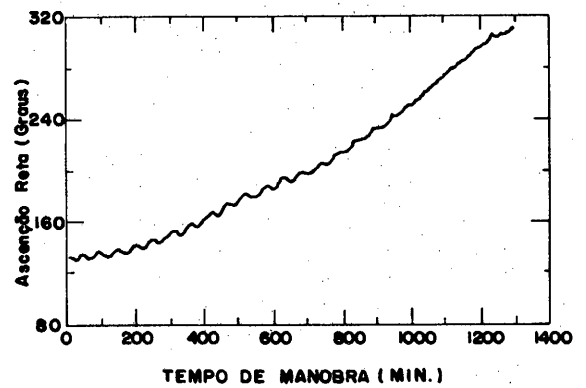
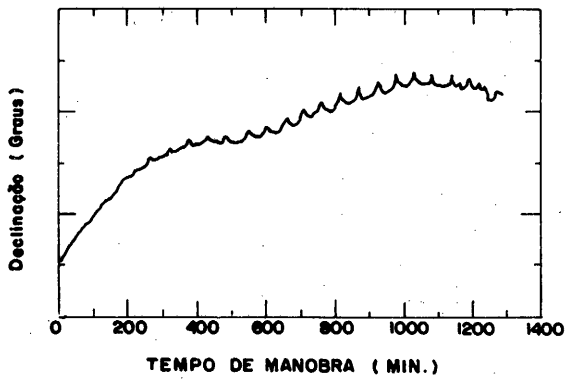
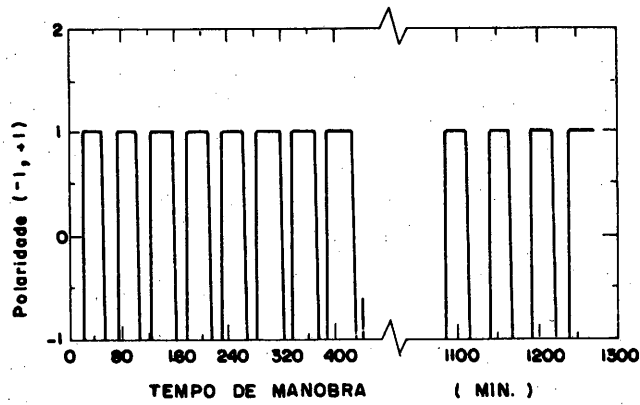


Fig. 6 - Respostas da otimização global

6. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

Os resultados obtidos pelo controle inicial foram verificados através dos resultados obtidos por Shigehara (1972).

Dos resultados da otimização por período, deduz-se que o tempo final foi reduzido de aproximadamente 12% relativo ao tempo de manobra fornecido pela lei de controle inicial, concluindo-se que os resultados são satisfatórios. Na fase seguinte, otimização global, as interações influenciaram de uma maneira global durante o período da manobra, porém os resultados indicam a inexistência de grandes mudanças em relação aos resultados da otimização por período; acredita-se que as principais causas sejam as condições de quase periodicidade devidos as variações lentas do eixo "spin" do satélite, consideradas neste trabalho.

Portanto, verificou-se a validade da nova formulação e a obtenção de uma lei de controle ótimo conforme o desenvolvimento de otimização proposto, para manobras de satélites estabilizados por "spin" utilizando a interação com o campo geomagnético.

Uma análise mais abrangente deverá ser feita para melhor avaliar as diferenças entre manobras otimizadas por período e manobras otimizadas globalmente. A representação da atitude do satélite através de quaternions deve também ser considerada, tendo em vista evitarem-se problemas de singularidade.

Levando em conta estas considerações e tendo em vista recursos computacionais normalmente hoje existentes a bordo de satélites, o processo de otimização proposto é certamente viável, na execução de manobras de satélites estabilizados por "spin" e atuados por bobinas magnéticas, como é o caso do satélite de Coleta de Dados da MECB (Missão Espacial Completa Brasileira).

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi desenvolvido no INPE, durante o programa de Mestrado do primeiro autor, como bolsista da CAPES. Os autores agradecem o apoio dado por estas Instituições.

7. REFERÊNCIAS

- CEBALLOS, D.C. (1980), Aproximações Subótimas para o Controle em Problemas Dinâmicos de Otimização, Tese de Mestrado, INPE, São José dos Campos.
- JUNKINS, J.L. & TURNER, J.D. (1986), Optimal Spacecraft Rotational Maneuvers, Studies in Astronautics, Elsevier, New York.
- KIRK, D.E. (1970), Optimal Control Theory, Prentice-Hall Inc., New Jersey.
- RENARD, M.L. (1967), Command Laws for Magnetic Attitude Control of Spin-Stabilized Earth Satellites, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 4, pp. 156-163.
- RIOS NETO, A. & CEBALLOS, D.C. (1979). Approximation by Polynomial Arcs to Generate Suboptimal Numerical Solutions in Control Problems, V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Unicamp, Campinas, SP.
- SHIGEHARA, M. (1972), Geomagnetic Attitude Control of an Axisymmetric Spinning Satellite, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 9, pp. 391-398.
- WERTZ, J.R. (1978), Spacecraft Attitude Determination and Control, D. Reidel, London.
- WILLIAMSON, W.E. (1971), Use of Polynomial Approximations to Calculate Suboptimal Controls, AIAA Journal, Vol. 9, pp. 2271-2273.